

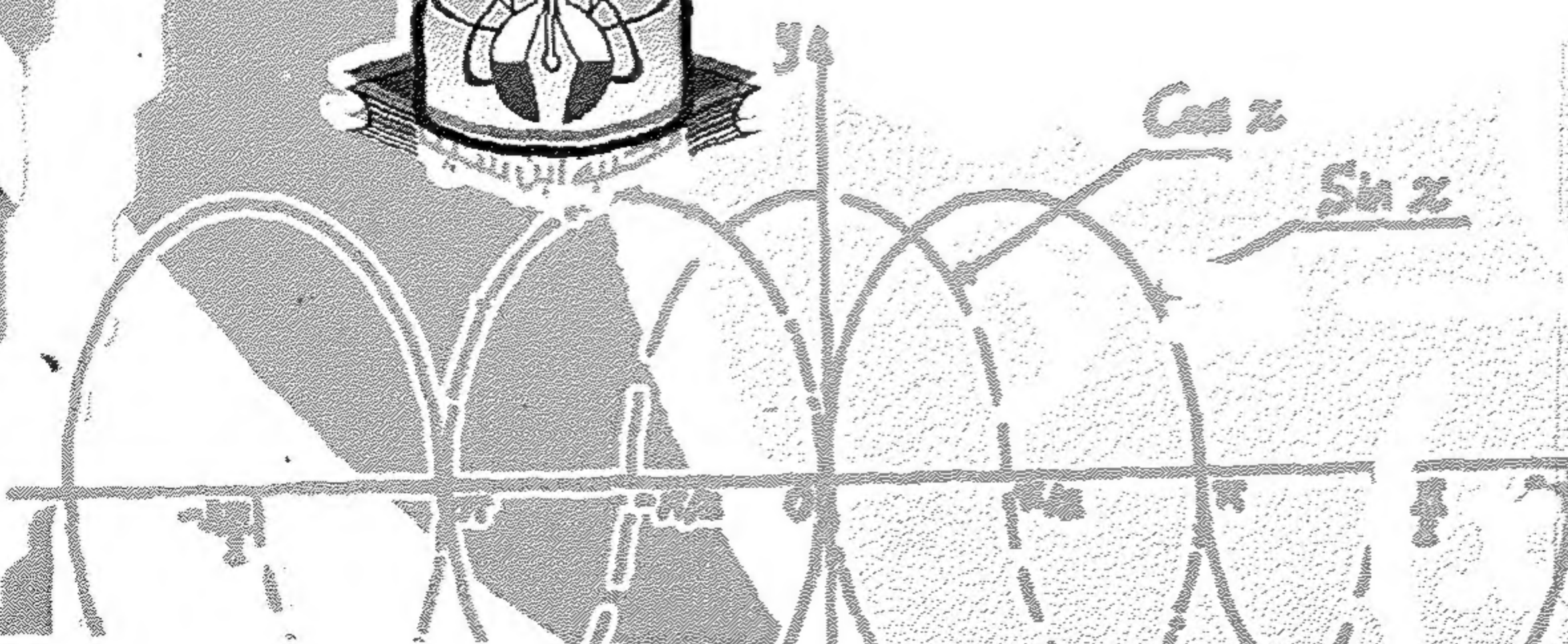
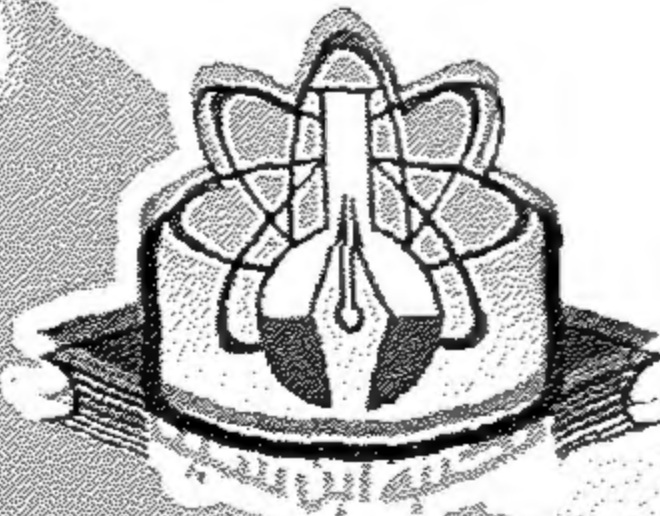
الرياضيات للجميع

سلاح الطالب فى حل مسائل التفاضل

أكثر من ٩٠٠ مسألة ومثال محلول
حلاً نموذجياً فى جميع أبواب التفاضل

التحليل الرياضى والدوال والنهيات
النهيات العظمى والصغرى وتطبيقات عليها
التغير ومعدل التغير - قواعد التفاضل - المعامل التفاضلى
تفاضل اللوغاريتمات بأنواعها - تفاضل الدوال الزائدية والدوال الأسية
تفاضل الدوال المتسامية والدوال المثلثية العكسية - التفاضل الجزئى

مهندس / عاطف منصور



0180654

Bibliotheca Alexandrina

الرياضيات للجميع

سلاح الطالب

في حل مسائل التفاضل

أكثر من ٩٠٠ مسألة ومثال محلول
حلاً نموذجياً في جميع أبواب التفاضل

التحليل الرياضى والدوال والنهايات
النهايات العظمى والصغرى وتطبيقات عليها
التغير ومعدل التغير - قواعد التفاضل - المعامل التفاضلى
تفاضل اللوغاريتمات بأنواعها - تفاضل الدوال الزائدية والدوال الأسية
تفاضل الدوال المتسامية والدوال المثلثية العكسية - التفاضل الجزئى

مهندس / عاطف منصور

مكتبة ابن سينا

للنشر والتوزيع والتصدير

٧٦ شارع محمد فريد - جامع الفتح - النزهة
مصر الجديدة - القاهرة - ٢٤٧١٨٦٢ فاكس ٢٤٨٠٤٨٢

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وكلاء التوزيع

السعودية

مكتبة الساعى : الرياض ت : ٤٣٥٣٧٦٨ فاكس : ٤٣٥٥٩٤٥ - فرع جدة ت : ٦٥٣٢٠٨٩
القصيم - بريدة ت : ٣٢٣١٤٣٤ - المدينة المنورة ت : ٨٢٤٢٧٧٥ - ص.ب: ٥٠٦٤٩ - ١١٥٣٣ الرياض

المغرب

دار الاعتصام : 35/33 المر الملكي - الأحباس - الدار البيضاء - ت : 30 42 85
فاكس : 00 212 02 44 45 39

الإمارات

دار الفضيلة : دبي - ديرة - ص.ب : ١٥٧٦٥ - ت : ٦٩٤٩٦٨ - فاكس : ٦٢١٢٧٦

البحرين

دار الحكمة : ص.ب : ٢٣٨٧٥ - هاتف : ٣٣٦٠٣٢

الجمهورية العربية الليبية

دار الفرجانى : ص.ب : ١٣٢ - هاتف : ٤٤٨٧٣ - ٦٠٤٤٣١ طرابلس - الجماهيرية العربية الليبية

فلسطين

مكتبة اليازجى : غزة - شارع الوحدة - فاكس : ٨٦٧٠٩٩ - ت : ٨٦١٨٩٢

اليمن

مكتبة العاصرية للنشر والتوزيع : صنعاء - الخط الدائرى الغربى
ص.ب : ١٤٤٦٦ - ت : ٢٧٧١٦٨

جميع حقوق الطبع محفوظة للنشر

مقدمة

تتنافس العلوم الرياضية فيما بينها لتقديم الحلول والردود المناسبة على تساؤلات الباحثين والدارسين والمهتمين بالتقنيات والمخترعات الحديثة . وقد ساهم علم التفاضل بمعادلاته ونظرياته فى تطوير وتحسين مستوى النتائج فى معامل الأبحاث التكنولوجية ، وهو ما أدى إلى حدوث التطور المستمر للآلات والمعدات التى تخدم كافة المجالات .

ويقوم علم التفاضل بخدمة عدة فروع عملية أخرى مثل علوم الفيزياء ، والهندسة ، والإحصاء ، والبيولوجى ، والاقتصاد ، والفضاء ، .. إلخ . وعلى صفحات هذا الكتاب سوف نجد المعالجات المشروحة بالرسم والمنحنيات للمبادئ الأساسية لعلم التفاضل ، مع مجموعة متنوعة من الموضوعات مثل مبادئ التحليل الرياضى والدوال والنهائيات والتغير ومعادلاته ، والمعامل التفاضلى وقواعد التفاضل والنهائيات العظمى والصغرى ، والمشتقات والتطبيقات عليها ، والدوال الأسية ، وكذلك الدوال الزائدية والتفاضل الجزئى . إلى جانب ما يتخلل ذلك من موضوعات هامة .

وتضمن الكتاب المعالجات النظرية للموضوعات مع عمل التدريبات والتمارين المأخوذة من التطبيقات العملية مع عدد ضخم من الأمثلة والتمرينات المحولة مأخوذة من امتحانات الجامعات والمدارس والمعاهد العليا والمؤسسات العلمية المتخصصة .

ولقد تم شرح الموضوعات باللغة العربية مع استعمال الرموز والأرقام الأجنبية حتى تساعد القارئ على الربط بين قراءاته في المراجع الأجنبية والكتب العربية.

نرجو الله سبحانه وتعالى أن يحقق لأبنائنا الطلاب والدارسين الفائدة المرجوة من هذا الكتاب .

المؤلف

الباب الأول

مبادئ التحليل الرياضى ، الفئات ، الأعداد

١-١ :- عام :

التحليل الرياضى له فروع كثيرة من فروع الرياضيات وتجمع فيما بينها بعض الخواص ، فهى تهتم بدراسة العلاقات الكمية فى العالم الحقيقى وتمثل هذه العلاقات كما هو الحال فى علم الحساب بمقادير عددية ، غير أن علم الحساب والجبر يدرس فى الغالب المقادير الثابتة التى تتميز الحالة التى نحن بصدددها .

فى حين يتناول التحليل الرياضى المقادير المتغيرة والتى تحدد سير العمليات وعند التعرض للعلاقة والارتباط بين المقادير المتغيرة فإنه ينشأ لنا مفهوم الدالة والنهايات . وفروع التحليل الرياضى متعددة مثل حساب التفاضل والتكامل ونظرية المتسلسلات ونظرية المعادلات التفاضلية . وقد ظهرت مبادئ طرق التحليل الرياضى عند قدماء الإغريق مثل أرشميدس وتطورت ببطء إلى أن جاء القرن السابع عشر حيث قام كل من اسحق نيوتن (١٦٤٢ - ١٧٢٧) وعالم الرياضيات الإنجليزى والفيلسوف الألمانى جوتفريد ولهم لينتز (١٦٤٦ - ١٧١٦) ، قاما وبصورة مستقلة بوضع مفهوم لحساب التفاضل والتكامل بصفة عامة وكذلك بالنسبة للمتسلسلات والمعادلات التفاضلية وقام أويلر بعد ذلك فى القرن ١٨ بتطوير مفهوم المتسلسلات والمعادلات التفاضلية كما قام أويلر أيضاً بوضع أسس لفروع أخرى من فروع التحليل الرياضى وقد اكتمل مفهوم هذه العلوم فى القرن التاسع عشر بجهود علماء كثيرين منهم كوشى فى فرنسا وريمان فى ألمانيا .

١-٢ :- الفئات Sets

الفئة عبارة عن مجموعة من الأشياء محددة تحديداً واضحاً وتُعرف الأشياء المكونة للفئة بالعناصر ، عناصر الفئة أو مكونات الفئة أو أعضاء الفئة element or member

وقد لا تكون هنالك صفة مميزة تجمع بين هذه العناصر وقد تكون غير ذات معنى إلا أنها تكون محددة تحديداً واضحاً .

الإ أنه فى الغالب وخاصة من الناحية العملية ، عادة ما تجمع الفئة الواحدة بين مجموعة من العناصر ذات صفة مميزة واحدة أو أكثر .

ومن أمثلة الفئات :

$$1) S_1 = \{2, 4, 6, 8\}$$

وهى عبارة عن فئة عناصرها عبارة عن الأعداد الزوجية الأكبر من الصفر والأقل من 10

$$2) S_2 = \{ \text{السبت ، الأحد ، الإثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة} \}$$

وهى فئة تجمع بين أيام الأسبوع وعدد عناصرها سبعة . وفى الفئات لا يهم ترتيب العناصر فمثلاً فى الفئة S_1 نجد أن :

$$S_1 = \{2, 4, 6, 8\} = \{8, 2, 6, 4\} = \{4, 8, 2, 6\}$$

وهذه الفئات متساوية لتساوى عناصرها ، مهما اختلف الترتيب فى العناصر وكذلك الفئة التى تجمع طلاب السنة النهائية فى إحدى الكليات والذين تقل أعمارهم عن 22 عاماً ، مثلاً ، وهى فئة تجمع كل الطلاب الذين ينطبق عليهم هذا الشرط بالرغم من أنه قد لا يكون هنالك أى صفة مميزة تجمع بين هؤلاء الطلاب سوى أن أعمارهم أقل من 22 عاماً وطلاب فى السنة النهائية لهذه الكلية .

وكذلك الفئة التى تجمع الرجال الأطول من 2 متر ، وهى فئة تجمع بين كل الرجال الأطول من 200 cm مهما اختلفت أعمارهم أو أوزانهم أو مؤهلاتهم أو جنسياتهم أو ويرمز للفئات بحروف كبيرة A, B, C مثلاً بينما يُرمز لعناصر الفئة برموز من حروف صغيرة مثل a, b, c, d, \dots

فإذا كانت لدينا الفئة A ومكوناتها a, b, c, h مثلاً فإنه يمكن كتابتها كالتالى .
 $A = \{a, b, c, h\}$

وأى عنصر من هذه العناصر ينتمى إلى الفئة A ويُعبر عن هذا كما يلى :-
 $a \in A$ ، $b \in A$ ، $c \in A$ ، $h \in A$ ،
بينما العنصر u مثلاً فهو لا ينتمى للفئة A ويعبر عن هذا كما يلى :-

$u \notin A$ أى أن u لا تنتمى إلى A . ويمكن كتابة عناصر أى فئة بطريقتين وهما :-

الطريقة الأولى :-

وهى أن نكتب عناصر الفئة كلها بالتفصيل

ومثال ذلك : $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

وعناصر هذه الفئة هى الأعداد الزوجية الأكبر من صفر والأصغر من 17 .

الطريقة الثانية :-

وهى أن نكتب الفئة كالتالى بدون كتابة للعناصر ذاتها

$S = \{ \text{الأعداد الزوجية الأكبر من صفر والأصغر من 17} \}$

مثال :-

بالطريقة الأولى :-

$S = \{ \text{السبت ، الأحد ، الإثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة} \}$

بالطريقة الثانية :- $S = \{ \text{أيام الأسبوع} \}$

الفئة الخالية : Empty set

يُطلق على الفئة التى لا تحتوى على أية عناصر ، بالفئة الخالية ويُرمز لها بالرمز Φ
 $\Phi = \{ \}$

ويقال للفئة A بأنها فئة جزئية من الفئة B إذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمى للفئة

B ويعبر عن هذا كما يلى $A \subset B$

وتُقرأ : A فئة جزئية من B "subset" أو A محتواه contained فى B أو B تحتوى

A والأخيرة تكتب هكذا $B \supset A$

١-٣ :- الأعداد

قام الإنسان منذ قديم الأزل بعمليات عد الأشياء التى حوله ومن هنا ظهرت الأعداد $1, 2, 3, \dots$ وتُعرف هذه الأعداد الآن بالأعداد الطبيعية ، ثم ظهرت الكسور نتيجة لعمليات تقسيم وتوزيع الأشياء وقياس المقادير المتصلة المختلفة مثل الوزن والطول وبتطور علم الجبر كأحد فروع الرياضيات ظهرت الأعداد السالبة وكذلك الصفر فى

أوروبا في القرن السابع عشر فقط في حين أنها كانت معروفة في الصين منذ حوالي 2000 عام وفي الهند كذلك منذ حوالي 1500 عام ويُطلق على كل من الأعداد الصحيحة (أو الطبيعية) مثل $1, 2, 3, \dots$ وكذلك على الأعداد السالبة مثل $\dots, -3, -2, -1$ وكذلك الكسور بالأعداد القياسية أو المنطقية .

الأعداد الحقيقية : "R" Real Numbers

كثير من الفئات ، تتكون عناصرها أو أجزائها من أعداد . والأعداد إما أن تكون حقيقية Real أو مركبة Complex ويرمز للأعداد الحقيقية بالحرف الأول من كلمة $Real \leftarrow R$ والأعداد الحقيقية تنقسم بدورها إلى :-

١) الأعداد الطبيعية : "N" Natural Numbers

ويرمز لها بالحرف الأول من كلمة $N \leftarrow Natural$
 $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

وتعرف كذلك بالأعداد الصحيحة الموجبة وتستخدم لعد عناصر الفئة . ومن ضمن عناصر فئة الأعداد الطبيعية ، هنالك مجموعة عناصر عبارة عن أعداد لا تقبل القسمة إلا على الواحد الصحيح أو على نفسها .

ويُطلق على مجموعة هذه العناصر بالأعداد الأولية "P" Prime Numbers

ويرمز لها بالحرف الأول من كلمة $P \leftarrow Prime$
 والأعداد الأولية هي :-

$$P = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, \dots\}$$

وواضح أن الأعداد الأولية هي فئة جزئية من الأعداد الطبيعية . $P \subset N$

كما وأن هنالك الأعداد الزوجية "E" Even Numbers وهي فئة جزئية من الأعداد الطبيعية ويرمز لها بالحرف الأول من كلمة $E \leftarrow Even$

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$E \subset N$$

وبصورة عامة فإن العدد الزوجي يمكن كتابته في الصورة : $E = 2n$

حيث n عدد طبيعي ينتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية $\therefore E = \{2n, n \in N\}$

وهناك أيضاً الأعداد الفردية "O" Odd Numbers وهي فئة جزئية من فئة الأعداد الطبيعية ويُرمز لها بالحرف الأول من كلمة Odd $O \leftarrow$

$$O = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$O \subset N$$

وبصورة عامة فإن العدد الفردي يمكن كتابته في الصورة $O = 2n + 1$, $n \in N$

فمثلاً

$$O = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$= 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$= 2 \times 5 + 1 = 11$$

$$\therefore O = \{2n + 1\} \text{ , } n \in N$$

ويلاحظ أن حاصل جمع عددين طبيعيين مثل " $a + b$ " أو حاصل ضربهما " $a.b$ " للعددين الطبيعيين a, b ، هو عبارة عن عدد طبيعي آخر . وهذا ما يدعونا غالباً إلى القول بأن فئات الأعداد الطبيعية مُقفلة أى تنطبق عليها عمليات الجمع والضرب .

(٢) الأعداد الصحيحة : "Z" Integers Numbers

وهي الأعداد $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ ويرمز لها بالرمز Z

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

وبعض عناصر هذه الفئة ، عبارة عن الأعداد الصحيحة السالبة والصفر

Negative Integers Numbers

$$\bar{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \quad \bar{Z} \text{ ويرمز لها بالرمز } \bar{Z}$$

وباقى عناصر هذه الفئة هي الأعداد الصحيحة الموجبة Positive Integers

$$^+Z = \{1, 2, 3, \dots\} \quad ^+Z \text{ ويرمز لها بالرمز } ^+Z$$

وقد نشأت الأعداد الصحيحة السالبة من حل معادلات مثل : $X + b = C$

حيث C, b أعداد طبيعية ، مما أدى إلى عمليات الطرح أو عكس عمليات الجمع وهنا

تُصبح $X = C - b$ وكل الأعداد الطبيعية تنتمي إلى فئة الأعداد الصحيحة ، أى $N \subset Z$

(٣) الأعداد القياسية أو الكسرية : "Q" Rational Numbers

وهى عبارة عن الأعداد التى يمكن وضعها فى الصورة $\frac{a}{b}$ مثل $\frac{-5}{3}$, $\frac{1}{3}$ وقد نشأت هذه الأعداد من حل بعض المعادلات مثل $bx = a$ وذلك لجميع الأعداد الصحيحة للمقدارين a, b حيث $b \neq 0$ ، وبالتالى فإن $x = \frac{a}{b}$ مما أدى إلى ظهور عمليات القسمة وهى عكس عملية الضرب وبالتالى $x = \frac{a}{b}$ ، $a \div b$ حيث a هى البسط ، b هى المقام فإذا رمزنا للأعداد القياسية بالرمز Q فإن $Q = \frac{a}{b}$ حيث :-

$a =$ أحد عناصر الأعداد الصحيحة ، $a \in Z$ ،

$b =$ أحد عناصر الأعداد الطبيعية ، $b \in N$ ، $b \neq 0$

أمثلة : $0.51 = \frac{51}{100}$, $-0.07 = \frac{-7}{100}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ والعدد 57 يمكن كتابته $\frac{57}{1}$ وبذلك فإن أى عدد قياسى n يمكن كتابته فى صورة كسر $\frac{n}{1}$ وبذلك فإن كل

الأعداد الصحيحة تعتبر فئة جزئية من الأعداد القياسية أى $N \subset Z \subset Q \subset R$.

(٤) الأعداد غير القياسية "اللاقياسية" أو الأعداد الصماء : Irrational Numbers

ويرمز لها بالرمز Q' وهى عبارة عن الأعداد التى لا يمكن التعبير عنها فى الصورة الكسرية $\frac{a}{b}$ حيث a, b أعداداً صحيحة . والأعداد اللاقياسية أو الصماء ، تكون مثل $\sqrt{3}$ والنسبة التقريبية π "ط" ، $\sqrt{2}$ ، $\log 3$ ويلاحظ أنه لا يمكن وضعها فى الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a, b أعداداً صحيحة ، $b \neq 0$ وكل من فئة الأعداد القياسية وفئة الأعداد غير القياسية تُعرف بفئة الأعداد الحقيقية أى أن اتحاد كل من Q ، Q' هو R - اتحاد كل من Q, Q' " $R = Q \cup Q'$. وذلك لتمييزها عن فئة الأعداد التخيلية والجذور التربيعية لمعظم الأعداد تكون لا قياسية ويجب أن لا نغفل أن π عدد لا قياسى ولكن $\frac{22}{7}$ أو 3.14 هى قيمة تقريبية لهذا العدد اللاقياسى .

وفى بعض الأحيان نلجأ إلى التعبير عن الأعداد القياسية (المنطّقة) بأعداد تقريبية فمثلا قد نعتبر قيمة الكسر $\frac{1}{3}$ هى 0.33 فقط وهى أقل من $\frac{1}{3}$ أو قد نعتبرها 0.3333 وهى أيضاً أقل من $\frac{1}{3}$ وفى الحالتين السابقتين 0.33 و 0.3333 فإننا أخذنا قيمة تقريبية للكسر أقل منه أى أقل من $\frac{1}{3}$ وقد تقرب قيمة الكسر إلى 0.34 أو إلى 0.334 أو إلى 0.3334 وهى أكبر من $\frac{1}{3}$ ويتوقف هذا على درجة الدقة المطلوبة .

ولذلك فإن الأعداد القياسية (المنطّقة) ، الموجودة ليست كافية فى تطبيقاتنا العملية عند قياس سمك شريحة معدنية رقيقة مثلا وليكن سمكها مساوياً للعدد 0.058mm ويجب أن لا ننسى هنا درجة الدقة فى كل جهاز مُستخدم فى القياس ومدى الدقة المطلوبة . إلا أنه فى علم الرياضيات فإنه يفترض الدقة المطلقة فى القياس وعلى ذلك كان لزاماً إدخال أعداد جديدة وهى الأعداد الصماء أو اللاقياسية أو اللامنطقة وهى تُعبر عن القياس غير المقاس بوحدات القياس (مثل محيط الدائرة) .

فمثلا لا يمكن التعبير عن طول قطر مربع طول ضلعه L بالأعداد القياسية " طول القطر $= L\sqrt{2}$ " أو عن جيب تمام الزاوية 30° وهو يساوى $\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو عن النسبة بين محيط الدائرة إلى قطرها $= \pi \approx \frac{22}{7}$ تقريباً "

وبصفة عامة فإنه لا يمكننا التعبير عن النسبة بين المستقيمتين غير القياسية بالأعداد القياسية فمثلا العدد $\pi = \frac{22}{7}$ تقريباً هو عدد لا قياسى "أصم" وله قيمة تقريبية = 3.14159 وهى أقل من العدد ذاته كما أنه ذو قيمة تقريبية وطبقاً لدرجة الدقة = 3.14160 وهى أكبر من العدد ذاته والفرق بين هاتين القيمتين التقريبتين هو 0.00001 وعلى ذلك فإن خطأ كل منهما لا يتجاوز فى قدره المطلق العدد 0.00001 وإذا اقتضى الأمر ألا يزيد الخطأ عن المقدار 0.000001 فإننا نجد القيمتين :

3.141592 وهى أقل من π

3.141593 وهى أكبر من π

وعلى هذا فإن العدد اللاقياسى " الأصم أو اللا منطق " لا يمكن أن يكون مساوياً للعدد المنطق بالضبط ، إلا أنه يمكننا أن نجد لكل عدد لا قياسي ، أعداداً قياسية مساوية له بالتقريب كأن تكون أكبر منه قليلاً أو أصغر منه قليلاً وبذلك فإنه يصبح بالإمكان جعل الخطأ صغيراً بدرجة كافية .

ولإيضاح الأعداد الصماء بصورة أكثر ؛ لنعتبر أن لدينا مربع طول ضلعه $x \text{ Cm}$ مثلاً ، باعتبار وحدة القياس هى السنتيمتر فإنه يمكننا أن نرسم مربعات طول ضلعها $x \text{ Cm}$ ، $0.7x$ ، $3x$ ، $\frac{5}{6}x$ وقد لا نكتب وحدة القياس فنكتب $0.7x$ أو $3x$ إذا لم يكن هنالك التباس. وتستخدم عادة فى القياس ، أعداد جذرية موجبة فى غالب الأحيان فإنها تعطى قيمة هذا الطول مقربة بتفريط أو بإفراط " زيادة أو نقصاناً "

فالمربع الذى طول ضلعه 1 Cm	مساحته 1 Cm^2
، والمربع الذى طول ضلعه 2 Cm	مساحته 4 Cm^2
، والمربع الذى طول ضلعه $\frac{5}{2} \text{ Cm}$	مساحته 6.25 Cm^2

ولكن المشكلة تنشأ من أنه إذا كان لدينا مربع معروفة مساحته فهل سيكون طول ضلعه فى جميع الحالات عدداً جذرياً " قياسياً " موجبا ؟؟

والأمر قد يكون سهلاً فى بعض الحالات كما يتضح من الأمثلة التالية :-

$$\begin{aligned} \text{المساحة} &= 16 \text{ Cm}^2 & \leftarrow & \text{طول الضلع} = 4 \\ \text{المساحة} &= \frac{25}{4} \text{ Cm}^2 & \leftarrow & \text{طول الضلع} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ Cm} \end{aligned}$$

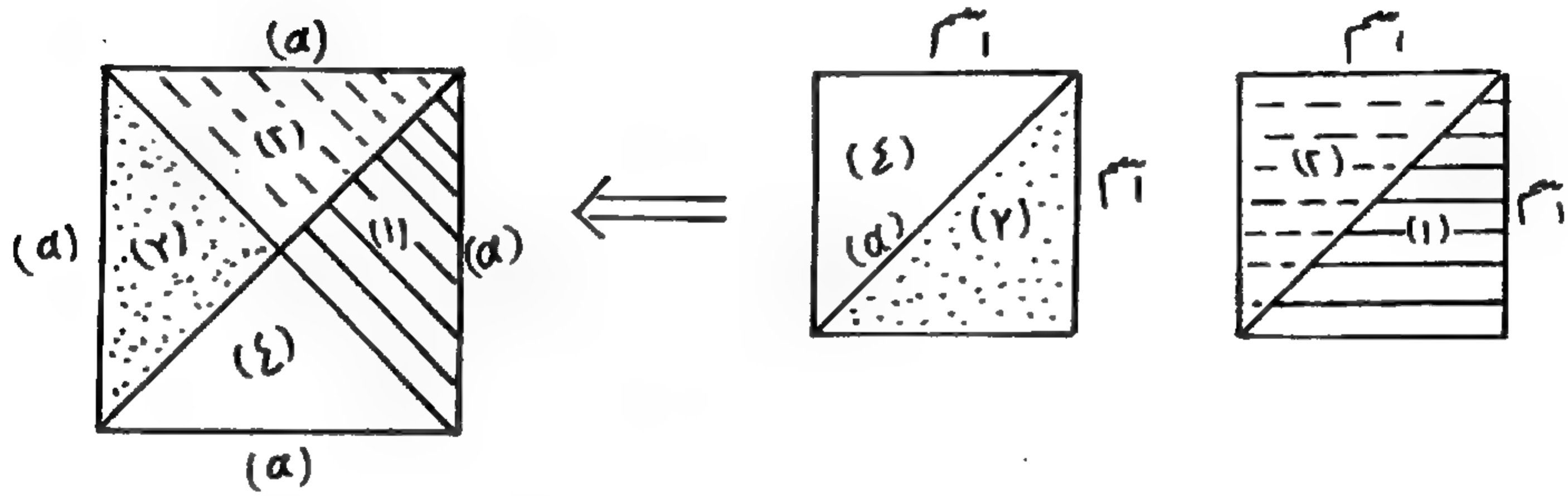
فالعدد الجذرى الموجب الذى مربعه 16 هو العدد 4

، فالعدد الجذرى الموجب الذى مربعه $\frac{25}{4}$ هو العدد $\frac{5}{2}$

وبذلك فإن 4 هى الجذر التربيعى للعدد 16 ، $4 = \sqrt{16}$ ،

، $\frac{5}{2}$ هى الجذر التربيعى للعدد $\frac{25}{4}$ ، $\frac{5}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$

والآن ، سنقوم برسم مربعين على قطعة من الورق ، طول ضلع كل منهما 1 Cm أى أن مساحة كل منهما = وحدة المساحات $= 1 \text{ Cm}^2$ ثم نقوم بتقسيم كل مربع إلى قسمين فى اتجاه القطر ونلون كل جزء منهما أو نميزه ، ثم نقوم بتجميعها مرة ثانية " 4 أجزاء " لعمل مربع واحد كبير وستكون مساحة هذا المربع 2 Cm^2 وطول ضلع كل منهما = طول قطر المربع الصغير $= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = a$
 مساحة المربع $\therefore a^2 = 2 \text{ Cm}^2$



شكل (١-١)

وقد برهن الرياضيون القدامى منذ حوالى 2000 عام أن هذا القياس لـ : a لا ينتمى إلى المجموعة Q وسموه عدداً لا جذرياً ، لا قياسياً أو أصم وكان هذا أول مثال لعدد لا جذرى . وحيث أن $\sqrt{9} = 3$ لأن $9 = 3^2$ فإننا نسمى العدد a الذى مربعه $= 2$ بالجذر التربيعى للعدد 2 ونكتبه $\sqrt{2}$

وهناك أمثلة كثيرة للأعداد اللاجذرية مثل : $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$ وعلمنا مما سبق أن أى عدد أو كل عدد قياسى " جذرى " يمكن أن يكتب فى الصورة

$$\frac{a}{b} \text{ الكسرية حيث } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$$

وقد برهن الرياضيون أن $\sqrt{2}$ وبالمثل $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$ لا يمكن أن تكتب على

الصورة $\frac{a}{b}$ وبالمثل جميع الأعداد اللاجذرية (اللاقياسية)

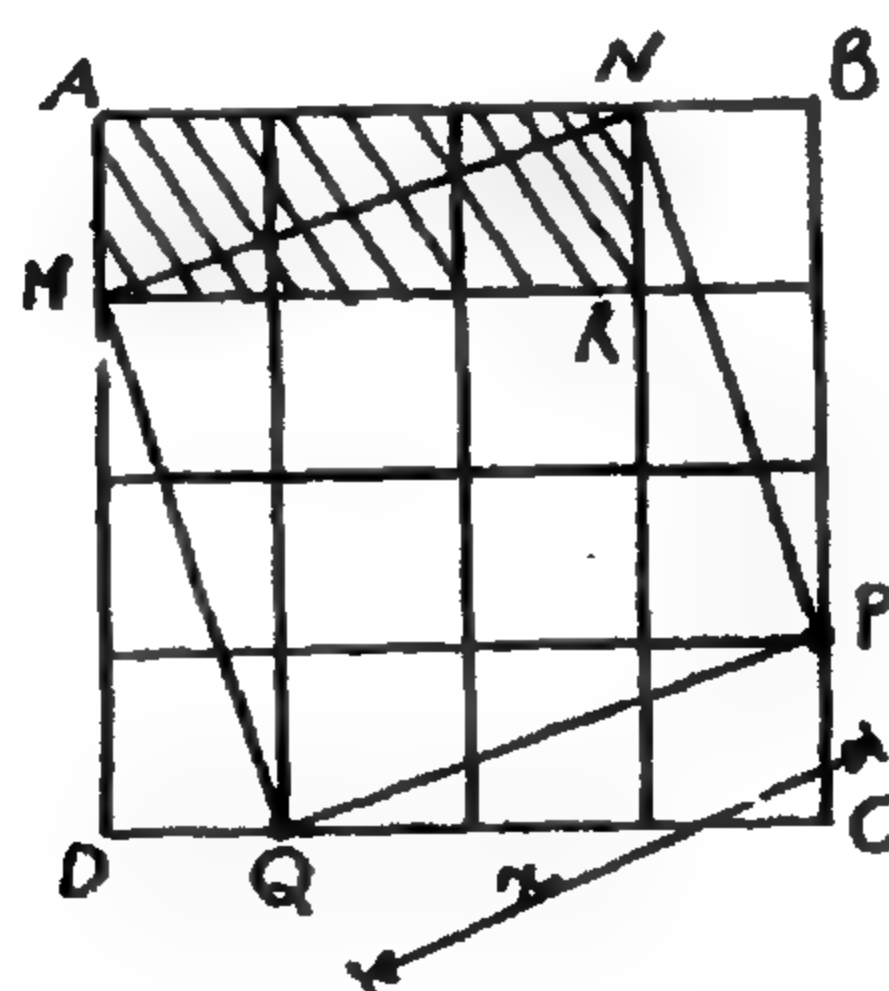
وإذا كان لدينا مكعب حجمه 8 Cm^3 فإن طول ضلعه 2 Cm لأن $2^3 = 8$ هي الجذر التكعيبي للعدد 8 وتكتب $2 = \sqrt[3]{8}$ ولكن إذا كان لدينا مكعب حجمه 2 Cm^3 ، فهل سيكون قياس طول ضلعه عدد جذري موجب ؟

وقد أجاب الرياضيون عن هذا التساؤل بالبرهان بأن هذا القياس لا يتمى هو الآخر للمجموعة Q وكتبوه $\sqrt[3]{2}$

ومن أمثلة هذا الكثير مثل : $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{100}$

وهذا يوصلنا إلى الحقيقة التي ذكرناها سابقا ، أن الأعداد الجذرية الموجبة ، غير كافية للقياس ولنعتبر عدداً أصم أو لا منطق أو لا قياسى أو لا جذرى ، آخر مثل $\sqrt{10}$.

ولنعتبر مربعاً $ABCD$ طول ضلعه 4 Cm ، قُم بتجزئته إلى عدد 16 مربعا متساوياً ، فإذا أخذنا النقط M على AD ، Q على DC ، P على CB ، N على AB كما بالشكل بحيث يكون كل من : DM , QC , PB , NA مساوياً 3 Cm ، ثم ننشئ المستطيل $AMRN$ ومساحته 3 Cm^2 ويمكننا برهان أن الشكل $MQPN$ مربع ومساحته 10 Cm^2 وقياس أو طول ضلع هذا المربع $= \sqrt{10}$ ، فالمساحة : $x^2 = 10 \text{ Cm}^2$



شكل (٢-١)

وسوف نحاول إيجاد بعض القيم لـ x

وتقل بقيمة صغيرة جداً عن 10 ، $3^2 = 9$

وتزيد بقيمة كبيرة جداً عن 10 . $4^2 = 16$

$$\therefore 3 < x < 4$$

وتقل بقيمة صغيرة جداً كذلك $(3.1)^2 = 9.61$ ،

وتقل بقيمة صغيرة كذلك $(3.16)^2 = 9.9856$ ،

وتزيد بقيمة صغيرة عن 10 $(3.17)^2 = 10.0489$ ،

$$\therefore 3.16 < x < 3.17$$

ويمكن أن نستمر بهذه الطريقة لمحاولة إيجاد قيمة أقرب ما تكون وعلى حسب درجة

الدقة المطلوبة إلا أن العملية لن تنتهى أبداً ولن يمكننا الحصول على عدد قياسى

جذرى مربعه $= 10$ تماماً وفى الحقيقة فإن $\sqrt{10}$ لا يمكن التعبير عنه كعدد جذرى

قياسى فى الصورة $\frac{a}{b}$ ولذلك يطلق عليه عدداً لا قياسياً

والجذور التربيعية لمعظم الأعداد هى لا قياسية (ماعدا $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{16}$ مثلاً) ، π هى

أيضاً عدداً لا قياسياً ويجب أن لا ننسى أن 3.14 ، $\frac{22}{7}$ هى مجرد قيمة تقريبية للعدد π

ويلاحظ أن $\sqrt{10} \cong 3.1622777$

مقرباً إلى جزء من عشرة من المليون ، إلا أن مربع هذا العدد لا يزال أقل من 10 ولا

يعطى 10 تماماً ، أبداً .

١-٤ :- التمثيل الهندسى للأعداد الحقيقية :-

يمكن تمثيل أى عدد حقيقى x ينتمى إلى فئة الأعداد الحقيقية R ، $x \in R$ على

خط مستقيم يُعرف بالمحور الحقيقى أو بخط الأعداد الحقيقية *Real line* أو بمحور

الأعداد . وكل عدد حقيقى تناظره نقطة واحدة فقط على الخط المستقيم وبنفس

الطريقة فإنه يوجد عنصر واحد فقط من فئات الأعداد الحقيقية يناظر عنصراً واحداً فقط

من فئات النقط على الخط المستقيم فالأعداد التى على يمين نقطة الأصل 0 هى فئة

الأعداد الموجبة بينما الأعداد التى على يسار 0 هى فئة الأعداد السالبة ونقطة 0 ذاتها

ليست موجبة ولا سالبة .

١-٥ :- العمليات الجبرية على الأعداد الحقيقية :-

إذا كانت R هي فئة الأعداد الحقيقية ، $\{a, b, c\}$ هي فئة جزئية منها :
 $\{a, b, c\} \subset R$

فإن \therefore

(١) كل من حاصل $a+b$ ، $a.b$ ينتميان لفئة الأعداد الحقيقية ويُعرف هذا بقانون الإقفال

ويعرف هذا بقانون الإبدال الجمعي $b+a = a+b$ (٢)

ويعرف هذا بقانون الترافق الجمعي $a+(b+c) = (a+b)+c$ (٣)

" " " الإبدال في الضرب $a.b = b.a$ (٤)

" " " الترافق في الضرب $a.(bc) = (ab).c$ (٥)

" " " التوزيع $a.(b+c) = ab+ac$ (٦)

وتعرف 0 بالعدد المحايد في الجمع $a+0 = 0+a = a$ (٧)

وتعرف 1 بالعدد المحايد في الضرب $a.1 = 1.a = a$ (٨)

(٩) لأي عنصر a ينتمي إلى R يوجد عدد z بحيث أن :

$z+a=0$ وتعرف z بمعكوس a في عمليات الجمع ، $z=-a$

(١٠) لأي مقدار $a \neq 0$ يوجد عدد z ينتمي إلى R بحيث أن $az=1$ وتُعرف z

بمعكوس a في عمليات الضرب ، $z=\frac{1}{a}$ or a^{-1}

١-٦ :- القيمة المطلقة للعدد الحقيقي :-

يرمز للقيمة المطلقة للعدد الحقيقي a بالرمز $|a|$ وتُعرف بمقياس أو معيار a ، a قد

تكون موجبة أو صفر أو سالبة . ، $|a|$ هي المسافة بين العددين a ، 0 أي أنها

$S(a, 0)$ فمثلا : -

$$|4|=4, |-4|=4, |-\sqrt{3}|=|\sqrt{3}|=\sqrt{3}$$

$$|1|=1, |0|=0, \left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$$

أي أن القيمة المطلقة للعدد الحقيقي a هي عدد حقيقي غير سالب أي أن $|a| \geq 0$

ويلاحظ الآتى :-

$$|a \cdot b \cdot c| = |a| |b| |c| \quad (١)$$

$$|a \cdot b \cdot c \dots r| = |a| |b| |c| \dots |r|$$
 ومنها

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (٢)$$

$$|a + b + c \dots r| \leq |a| + |b| + |c| + \dots |r|$$
 ومنها

$$|a - b| \geq |a| - |b| \quad (٣)$$

والمسافة بين النقطتين x_1 ، x_2 وهما من الأعداد الحقيقية على محور الأعداد الحقيقية

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$
 هى :-

٧-١ :- الأسس والجذور :-

إذا ضربنا x فى نفسها عدد n من المرات

أى $x \cdot x \cdot x \dots x$ ، n من المرات

ويمكن أن نعبر رياضيا عن حاصل الضرب السابق كالتالى :-

x^n وتُعرف x بالأساس ، n بالأس .

القواعد الأساسية للوغاريتمات :

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad (١)$$

$$x^4 \cdot x^5 = x^9$$
 فمثلا :

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (٢)$$

$$\frac{x^8}{x^3} = x^{8-3} = x^5$$
 فمثلا :

$$(x^m)^n = x^{mn} \quad (٣)$$

$$(x^2)^3 = x^6$$
 فمثلا :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} \quad (٤)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$$
 فمثلا :

ومن القاعدة الثانية ، - :

$$x^{m-n} = x^0 = 1 \quad \text{فإن} \quad m=n \text{ كانت}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{x^m}{x^m} = \frac{x^n}{x^n} = x^{m-m} = x^{n-n} = x^0 = 1$$

وهذا منطقي لأن :

وذلك طالما $m=n$ وكذلك إذا كان لدينا المقدار x^{m-n} وكانت $m=0$ فإن - :
 $x^{m-n} = x^{-n}$ ومنها $\therefore x^{-n} = 1/x^n$ وإذا كانت $x^n = M$ فإن x تُعرف بأنها
 الجذر النوني (الذى رتبته n) للمقدار M وتكتب هكذا $x = \sqrt[n]{M}$ وأحيانا فإنه قد
 يوجد أكثر من جذر حقيقى رتبته n للمقدار M فمثلا $3^2 = 9$ ، والعدد 9 له
 جذران تربيعيان حقيقيان وهما 3، -3 وإذا كان لدينا m, n عددين صحيحين

$$x^{m/n} \text{ يُمكن وضعه على الصورة } x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$$

٨-١ - اللوغاريتمات - :

إذا كانت $x^m = N$ فإن m تُعرف بأنها لوغاريتم المقدار N للأساس x وتكتب

$$m = \log_x N \quad \text{كالتالى :}$$

$$\log_c a \cdot b = \log_c a + \log_c b \quad ،$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b \quad ،$$

$$\log_c a^b = b \log_c a \quad ،$$

ويُستخدم عادة فى اللوغاريتمات أساسان وهما الأساس 10 ويُعرف بنظام بريجزيان
 والأساس e ويُعرف بالنظام النابيري حيث $e \cong 2.71828.....$

٩-١ - التباينات (اللاتعادلية)

إذا كان لدينا $x - y =$ عددا موجبا فإنه يمكن أن نُعبر عن ذلك بأن x أكبر من y أو
 y أصغر من x ويُعبر عنهما على الترتيب كالتالى $x > y$ أو $y < x$ وإذا كان من
 الممكن أن يكون $x = y$ فإنه يمكن التعبير عن هذه الحالة كالتالى $x \geq y$ أو $y \leq x$
 وتكون x على محور تمثيل الأعداد الحقيقية واقعة على يمين y

أمثلة :-

(١) $x \leq a$ يعنى ذلك أن x عدد حقيقى من الممكن أن يكون مساويا للعدد a أو أقل من a

(٢) $-5 > -6$ ويمكن كتابتها $-6 < -5$

(٣) $6 < 7$ ويمكن كتابتها $7 > 6$

قواعد المتباينات الأساسية :-

إذا كان لدينا a, b, c أعداداً حقيقية فإنه :-

$$\text{" قانون الثلاثية " } \begin{cases} a > b & \text{إما} \\ b > a & \text{أ ،} \\ a = b & \text{أ ،} \end{cases}$$

٢- إذا كانت $a > b, b > c$ فإن $a > c$ " قانون الإنتقالية "

٣- إذا كانت $a > b$ فإن $a + h > b + h$

٤- إذا كانت $a > b, h > 0$ فإن $ah > bh$

٥- إذا كانت $a > b, h < 0$ فإن $ah < bh$

١-١٠ :- الفترات على خط الأعداد الحقيقى :-

(١) الفترة المفتوحة :- Open interval :-

إذا كان a, b عددين حقيقيين وبحيث أن $a < b$ فإن الفترة المفتوحة من a إلى b عبارة عن مجموعة الأعداد x التى تُحقق المتباينة $a < x < b$ ويرمز للفترة المفتوحة بالرمز (a, b) أو بالرمز $]a, b[$ $i.e (a, b) = \{a < x < b, x \in R\}$

(٢) الفترة المغلقة (المقفلة) :- Closed interval :-

إذا كان a, b عددين حقيقيين ، $a < b$ فإن الفترة المغلقة من a إلى b عبارة عن مجموعة الأعداد x التى تُحقق المتباينة $a \leq x \leq b$ ويُرمز للفترة المغلقة بالرمز $[a, b]$ أى أن كل من النهايتين a, b قد أضيفت لعناصر الفترة $a < x < b$

(٣) الفترة النصف مفتوحة :-

وهي مجموعة الأعداد التي تحقق المتباينة $a < x \leq b$ ويرمز لها بالرمز $(a, b]$

(٤) الفترة النصف مغلقة :-

وهي مجموعة الأعداد التي تحقق المتباينة $a \leq x < b$ ويرمز لها بالرمز $[a, b)$

(٥) فئة الأعداد الحقيقية R عبارة عن الفترة المفتوحة $(-\infty, \infty)$

$$i.e. R = (-\infty, \infty) = \{x : -\infty < x < \infty\}$$

ومجموعة الأعداد التي أكبر من a تُسمى بالفترة (a, ∞)

بينما مجموعة الأعداد التي أصغر من a تُسمى بالفترة $(-\infty, a)$

ومن ذلك فإن مجموعة كل الأعداد الحقيقية هي الفترة $(-\infty, \infty)$ والفترة سواء كانت

مفتوحة أو مغلقة يُطلق عليها بمصطلح واحد " الفترة " .

١-١١ :- المقادير المتغيرة والمقادير الثابتة Variables and Constants :-

المقدار المتغير هو المقدار الذي يمكن أن يأخذ قيما مختلفة في المسألة المطروحة في حين أن المقدار الثابت يظل محتفظاً بنفس قيمته تحت نفس شروط المسألة وقد يكون المقدار الثابت في مسألة مطروحة هو مقدار متغير في مسألة أخرى وفي التعبيرات والصيغ الجبرية فإنه تُستعمل رموزاً للتعبير عن المقادير أو الأعداد ، بعضها يمثل مقدار متغير وبعضها يمثل مقدار ثابت .

مثال (١) : لنعتبر الصيغة الرياضية الممثلة لحجم الكرة V ، $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

حيث r = نصف القطر فإن :

(١) كل من r ، V متغيران بتغير حجم الكرة ويطلق عليهما بالمتغيرات

(٢) كل من π ، $\frac{4}{3}$ مقادير ثابتة مهما كان حجم الكرة

مثال (٢) : في حالة سقوط جسم من وضع السكون فإن العلاقة المعبرة عن المسافة

المقطوعة في أى لحظة هي :- $S = \frac{1}{2} gt^2$

حيث تُمثل S ؛ المسافة المقطوعة في الزمن t ، g = عجلة الجاذبية الأرضية . فإن :

(١) كل من t ، S عبارة عن مُتغيرات

(٢) g ، $\frac{1}{2}$ مقادير ثابتة

١٢-١ :- المتغير التابع والمتغير المستقل

-: **Dependent and independent variables**

ويمكننا أن نلاحظ من المثالين السابقين أن هنالك نوعين من المتغيرات ففي حالة :

$V = \frac{4}{3} \pi r^3$. فإنه بزيادة أو نقص r ، فإن الحجم V يزيد أو ينقص على الترتيب أى

أن التغير في V يعتمد على التغير في r .

وفي حالة :- $S = \frac{1}{2} g t^2$ فإن مسافة السقوط S تعتمد على الزمن t وعموماً فإنه في

كل الصيغ والعلاقات الرياضية ، هنالك نوعين من المتغيرات ، المتغير المستقل والمتغير التابع :-

(١) فالمتغير الذى تعتمد قيمته على قيمة ومقدار متغير آخر يعرف بالمتغير التابع dependent Variable مثل V فى مثالنا السابق عن الكرة .

(٢) والمتغير الذى يؤدي التغير فى قيمته إلى قيم مناظرة فى المتغير الآخر ، يُعرف بالمتغير المستقل مثل t ، r فى الأمثلة السابقة .

وعند التعبير عن معادلة من الدرجة الثانية فى صورتها العامة فإن :- $y = ax^2 + bx + c$

فإن كل من a ، b ، c ثوابت تُستخدم لتحديد مدى العلاقة بين x ، y فى حين أن x

هى المتغير المستقل " الذى يبدأ فى التغير " وينتج عن هذا التغير ، تغير مناظر فى y

ولذلك فإن y هى المتغير التابع .

الباب الثانى

الدوال Functions

٢-١ :- عام

تُعرف العلاقة التى تربط بين متغيرين بحيث أن قيمة أحدهما تعتمد على قيمة الآخر بالنص التالى :-

" المتغير التابع دالة فى المتغير المستقل "

وفى الأمثلة السابقة فإن :-

(١) حجم الكرة V دالة فى نصف قطرها

(٢) المسافة المقطوعة S بالجسم الساقط من السكون دالة فى الزمن t وهناك أمثلة لدوال أخرى مثل :-

١- لوغاريتم العدد هو دالة فى العدد فمثلاً $y = \log x$ ، y هو لوغاريتم العدد x وبذلك فإن y دالة فى x أو لوغاريتم العدد دالة فى العدد ذاته .

٢- حجم كتلة معينة من الغاز ، دالة فى درجة الحرارة عند ثبوت الضغط

٣- ضغط كتلة محددة من الغاز ، دالة فى درجة الحرارة عند ثبوت الحجم

٤- جيوب وجيوب تمام وظلال الزوايا هى دوال فى هذه الزوايا

٥- مدى قذيفة المدفع هو دالة فى زاوية القذف مع ثبوت قوة القذف

٢-٢ :- تعريف الدالة : Defination of a function :-

عموماً ، إذا كان هنالك علاقة بين متغيرين X ، Y بحيث أن أى قيمة تأخذها X ، توجد قيمة مناظرة (أو أكثر) لـ Y فإنه يمكن القول أن Y دالة فى X .

٢-٣ :- رموز الدوال Expression of functions :-

إذا كانت y دالة فى x فإنها تكتب $y = f(x)$ أو $y = G(x)$ أو $y = \Phi(x)$ أو $y = \psi(x)$ حيث تعنى الرموز f ، G ، ψ للدالة بينما تعنى $G(a)$ ، $f(a)$ بقيمة الدالة عندما $x = a$.

وإذا كان لكل قيمة تأخذها x قيمة واحدة فقط لـ Y فإن الدالة تُسمى بدالة وحيدة القيمة . أما إذا كانت لكل قيمة تأخذها x أكثر من قيمة لـ Y فإن الدالة تُسمى دالة متعددة القيم مثل $y^2 = x$ ومنها $y = \pm \sqrt{x}$ أى لها قيمتان لكل قيمة لـ x وعموماً فإنه يتم استخدام الحروف الأخيرة من الأبجدية الإنجليزية مثل z, y, x للتعبير عن المتغيرات وعادة تُستخدم x للتعبير عن المتغير المستقل فى حين تُستخدم y للتعبير عن المتغير التابع . أما الثوابت فى الدوال المختلفة فإنه يتم استخدام الحروف الأولى من الأبجدية الإنجليزية للتعبير عنها مثل a, b, c أو بالحروف الوسطى من الأبجدية الإنجليزية مثل l, m, n مثل $y = mx + b$ حيث m, b ثوابت فى المعادلة العامة للخط المستقيم . وعند الرغبة فى التعبير عن الدوال فى الزوايا مثل $y = \sin(a) + \cos(a)$ أو $y = \cos^2 \theta$ أو $y = \tan \Phi$ فإنه تستخدم الرموز اليونانية Greek Letters للتعبير عن الزوايا مثل θ "ثيتا" أو Φ "فاى" "phi" وكذلك تستخدم x فى هذا الصدد .

فإذا كانت لدينا الدالة :

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

فإن $f(1)$ ترمز لقيمة الدالة عددياً عند التعويض بالعدد ١ بدلا من x وبذلك فإنه للدالة السابقة :-

$$f(1) = 1^2 + 3 \times 1 - 4 = 0$$

$$, f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 4 = 6$$

$$, f(0) = 0 + 0 - 4 = -4$$

$$f(a) = a^2 + 3 \times a - 4$$

$$, f(a+h) = (a+h)^2 + 3(a+h) - 4$$

وبالمثل إذا كان لدينا الدالة :

$$\Phi(\theta) = 3 \sin \theta$$

فإن :-

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \times 1 = 3 \\ \Phi(0) &= 3\sin(0) = 0 \\ \Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2.1213\end{aligned}$$

٢ - ٤ : رمز الزيادة في الدالة : Notation for increases in functions

إذا كانت x ترمز لمتغير ما ، فإن الرمز δx أو Δx أحياناً وتُنطق "دلتا - دلتا" x ، يستخدم للدلالة على الزيادة في قيمة x والرمز δ هو الحرف اليوناني المرادف للحرف الإنجليزي "d" .

ولا تعنى Δx كما هو المعتاد في الضرب ، لا تعنى حاصل ضرب $\Delta \times x$ ويجب عدم الفصل بين الحرفين Δ, x . وبذلك فإن Δx تعنى الزيادة أو النقص في x . وهذا خلاف $a \times x$ فهي هنا تعنى حاصل ضرب قيمة كل من a ، قيمة x ، في بعضهما.

ونتيجة للزيادة أو النقص في x فإنه يتبع هذا زيادة أو نقص في y يعادل Δy وعلى هذا فإنه إذا كانت :

$$y = f(x)$$

$$\therefore y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (\text{بالطرح})$$

$$y = x^3 - 5x^2 + 3x \quad \text{فمثلاً إذا كانت :}$$

$$\therefore y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - 5(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x)$$

وقد تُستخدم الحروف الأبجدية الصغيرة للتعبير عن التغير الطفيف في قيمة x فمثلاً في

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{i.e. } S = f(t) \quad \text{مثالنا السابق عن الجسم الساقط :}$$

$$\therefore S + \Delta S = \frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2$$

ويمكن كتابة الأخيرة بالحروف الأبجدية الصغيرة بدلاً من Δ كالتالي :

$$S + d = \frac{1}{2}g(t + h)^2 \quad \text{"d,h"}$$

حيث h هي التغير الطفيف في الزمن d, t هي التغير في المسافة المترتب على التغير في الزمن .

٢ - ٥ : التمثيل البياني للدوال :

Graphic representation of functions

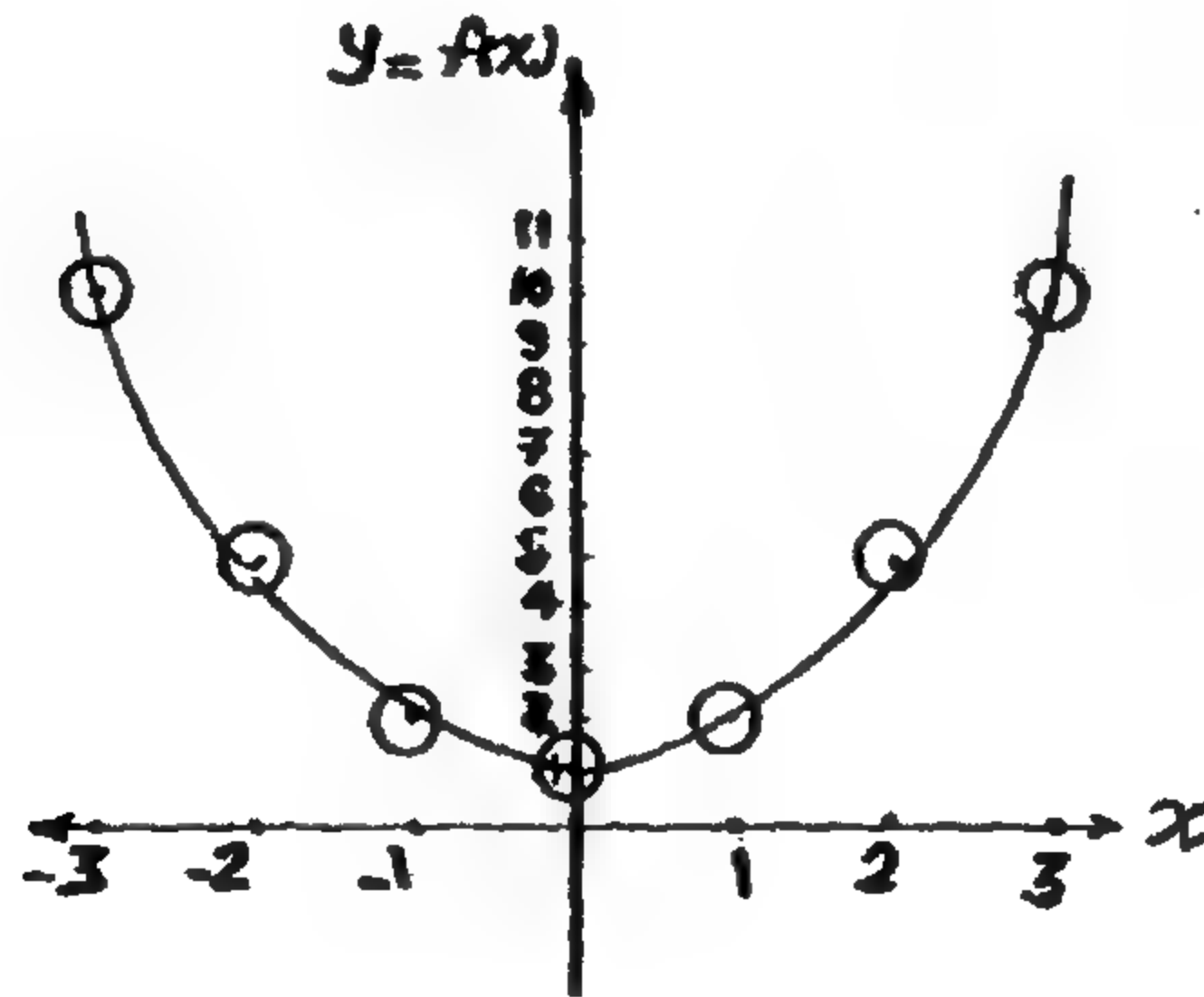
لنعتبر $y = f(x)$ هي دالة في (x) وحيث أنه لكل قيمة تأخذها x توجد قيمة مناظرة تأخذها y ؛ لذلك فإننا نفترض مجموعة قيم مختلفة للمتغير x ونحسب قيم $f(x)$ أو y المناظرة لهذه القيم . ثم ندون النتائج في جدول مناسب كالتالي :

الدالة : $y = f(x) = x^2 + 1$

ونفرض قيم لـ x $[-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3]$ مثلاً ثم نحسب قيم y المناظرة .

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
$y = f(x)$	10	5	2	1	2	5	10

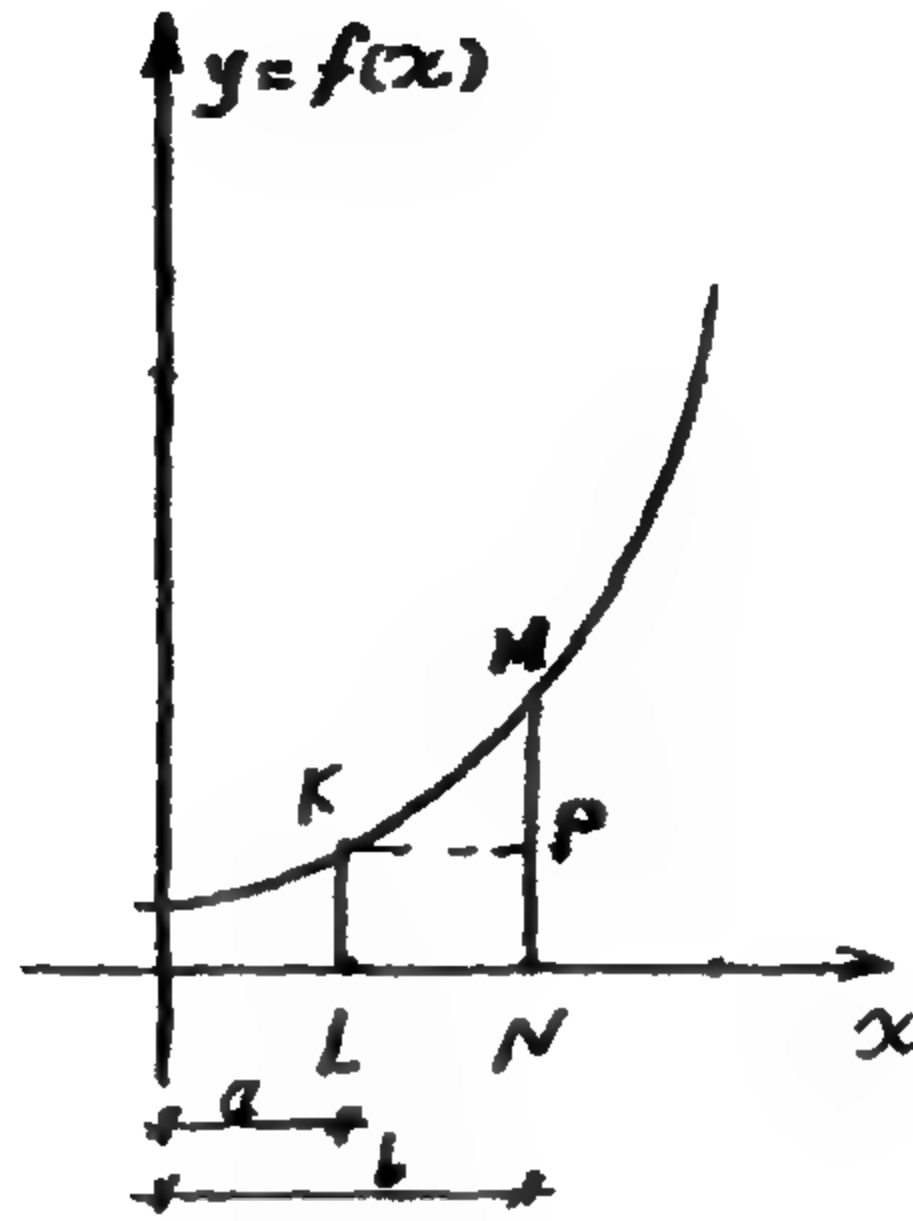
ومن القيم المدونة بالجدول ، يمكنك ملاحظة أن $f(-a)$ لها نفس قيم $f(a)$ وعلى ذلك فإن المنحنى يكون متماثلاً حول محور الصادات " المحور الرأسى " y, y' ، والدالة عبارة عن منحنى قطع مكافئ Parabola . وذلك كما يتضح من الشكل (٢ - ١) .



شكل (٢-١)

$y = f(x) = x^2 + 1$

وفى الشكل (٢-٢) والذي يمثل جزء من المنحنى



شكل (٢-٢)

نأخذ النقط L, N على المحور OX بحيث أن : $OL = a$, $ON = b$

ثم نرسم الإحداثى الرأسى ordinate المناظر (KL, MN) .

$$\therefore KL = f(a) , MN = f(b) .$$

وعموماً ؛ إذا كانت L ، أى نقطة على OX بحيث أن $OL = X$

فإننا إذا اعتبرنا أن X تزيد بالمقدار LN حيث :

$LN = \Delta x$ فإن MP تمثل الزيادة المناظرة فى $f(x)$ أو فى y .

$$\therefore MP = \Delta y , KL = f(x)$$

$$, MN = f(x + \Delta x)$$

$$\therefore MP = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\text{or } \Delta Y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

٢ - ٦ : تصنيف الدوال :-

(١) دوال كثيرة الحدود **Polynomial functions** :-

وتكون فى الصورة : $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$

حيث : a_0, a_1, \dots, a_n ثوابت، n عدد صحيح موجب ومقداره يرمز لدرجة الدالة.

فإذا كانت $f(x)=0$ وهى دالة كثيرة الحدود ، فإن لها على الأقل جذر واحد ،
وعندما تكون n هى درجة الدالة فإنه يكون للدالة حيثذ عدداً من الجذور $n =$.

(٢) الدالة الخطية Linear function :-

عندما $n=1$ فإننا نحصل على كثيرة حدود من الدرجة الأولى وتُعرف بالدالة الخطية

وهى على الصورة : $f(x)=a_0x+a_1$.

وصورتها المألوفة هى : $f(x)=mx+c$ والتى تمثل خطاً

مستقيماً ميله a_0 أو m وطول الجزء المقطوع به من محور الصادات a_1 أو c .

(٣) الدالة التربيعية :- Quadratic function :

عندما تكون $n=2$ فإننا نحصل على كثيرة حدود من الدرجة الثانية وصورتها المألوفة :

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$$

وهى تمثل منحنى فى المستوى .

وصورتها الأكثر شيوعاً :- $f(x)=ax^2+bx+c$

(٤) الدوال أحادية القيمة ومتعددة القيم :-

إذا كانت لكل قيمة من قيم المتغير المستقل x قيمة واحدة فقط مناظرة لها من قيم
الدالة (y) فإن الدالة تُسمى أحادية القيمة .

أما إذا كان لكل قيمة تأخذها x قيمتان أو أكثر للدالة (y) فإن الدالة تُعرف بأنها
متعددة القيم (ثنائية أو ثلاثية أو)

مثال :- عند قذف جسم لأعلى وباعتبار s هى مقدار ارتفاعه عن سطح الأرض
وأن t الزمن الذى مر منذ لحظة قذفه ، هنا تكون s دالة فى المتغير المستقل t وذلك
لأن الجسم يكون فى كل لحظة من زمن حركته على ارتفاع معين .

كما أن t تكون كذلك دالة فى المتغير المستقل s وذلك لأن كل ارتفاع يصل إليه
الجسم تناظره قيمتان من قيم t إحداهما عند صعود الجسم والثانية عند هبوطه .

وفى مثالنا هذا ، تكون s دالة أحادية القيمة فى المتغير المستقل t بينما تكون t دالة
ثنائية القيمة فى المتغير المستقل s .

(٥) الدوال الفردية والدوال الزوجية :-

وقد تكون الدالة فردية أو زوجية ، فيقال للدالة $y = f(x)$ بأنها فردية إذا كانت تحقق العلاقة $f(-x) = -f(x)$.

مثل : $y = \tan x$ ، $y = \sin x$ ، $y = x^5$

بينما يقال للدالة بأنها زوجية إذا كانت تُحقق العلاقة $f(x) = f(-x)$

مثل : $y = \cos x$ ، $y = x^4 + 5$ ، $y = x^2$

وقد تكون الدالة لافردية ولازوجية :-

مثل : $y = x^5 + 5$ ، $y = \sin x + \cos x$

(٦) الدوال الصريحة والدوال الضمنية :-

Explicit and Implicit Functions

إذا كانت $y = f(x)$ وأعطينا المتغير المستقل x قيمة معينة وأمكنا حساب $y = f(x)$

فإنه يقال أن الدالة $f(x)$ دالة صريحة في (x)

مثل : $y_1 = x^2 + 4$ ، $y_2 = 3x - 2$ ، $y_3 = x^2 - 2x + 8$

فإذا ما اعتبرنا قيمة $x = 3$ في الأمثلة السابقة فإنه يمكننا بسهولة حساب $y = f(3)$ ،

لكل من هذه الدوال وتكون قيمتها كالتالي :-

$$y_1 = 13 \text{ ، } y_2 = 7 \text{ ، } y_3 = 11$$

أما إذا كانت العلاقة بين المتغيرين x, y ، لا تُعطي قيمة y مباشرة عند تحديد قيمة معينة لـ x بل يستوجب ذلك إجراء مجموعة من العمليات الجبرية أولاً ؛ فإن الدالة يُطلق عليها بأنها دالة ضمنية في x

أمثلة : (١) $x^2 + 3xy + y^3 = 0$

(٢) $\sqrt{x - 2y^2} = 0$

ويلاحظ من الدوال الأخيرة أنه يصعب إيجاد قيمة y مباشرة عند إعطاء قيمة لـ x بل

يلزم إجراء مجموعة من العمليات الجبرية بحيث نتمكن في النهاية من وضع y في

طرف ، x في الطرف الثاني .

ففى المثال الثانى (٢) السابق :

$$\therefore \sqrt{x-2y^2} = 0$$

$$\therefore x = 2y^2 \quad \therefore y = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

∴ بتربيع الطرفين

وإذا كان هذا ممكناً فى بعض الدوال ، فإنه يكون صعباً وربما مُحال فى دوال أخرى

(٧) الدوال المتصلة (المستمرة) والدوال غير المتصلة (المتقطعة) :-

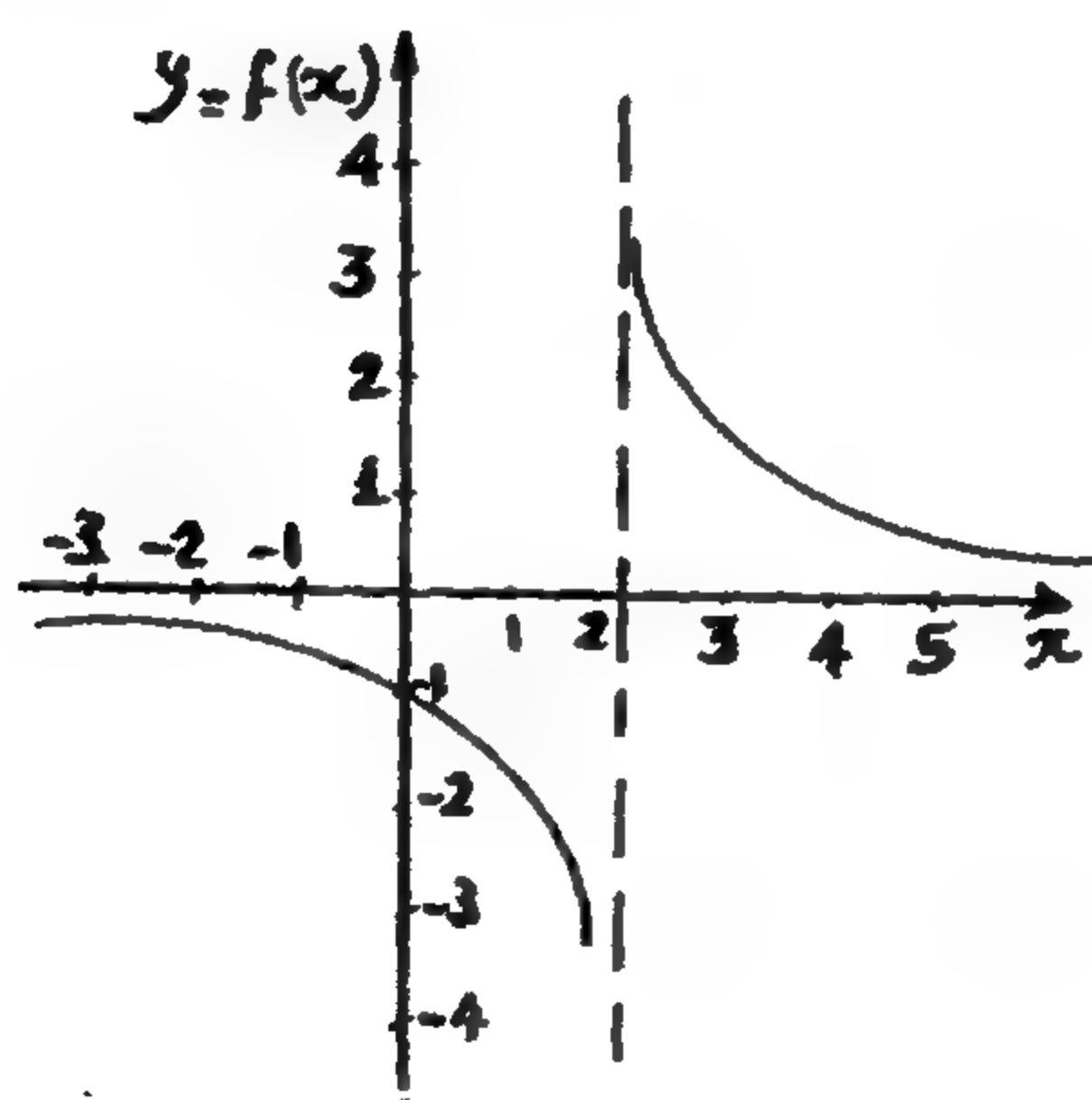
Continuous and Discrete functions

تكون الدالة متصلة إذا كانت المتغيرات المستقلة لهذه الدالة x ، $y = f(x)$ متصلة أو مستمرة . فاستمرار اتصال هذه المتغيرات يؤدي إلى استمرار أو اتصال الدالة وفى الدوال المتقطعة تكون هنالك قيم غير معرفة للمتغير التابع y عند قيم معينة لـ x .

فمثلاً :- الدالة $y = \frac{1}{x-2}$ ، محدودة فى الفترة (3 , 5) .

ولكنها غير محدودة فى الفترة (2 , 5) وذلك لأن المتغير المستقل x بوجوده فى الفترة (2 , 5) يمكن أن يؤول إلى 2 وحينئذ ستكون الدالة متناهية فى الكبر ، انظر الشكل

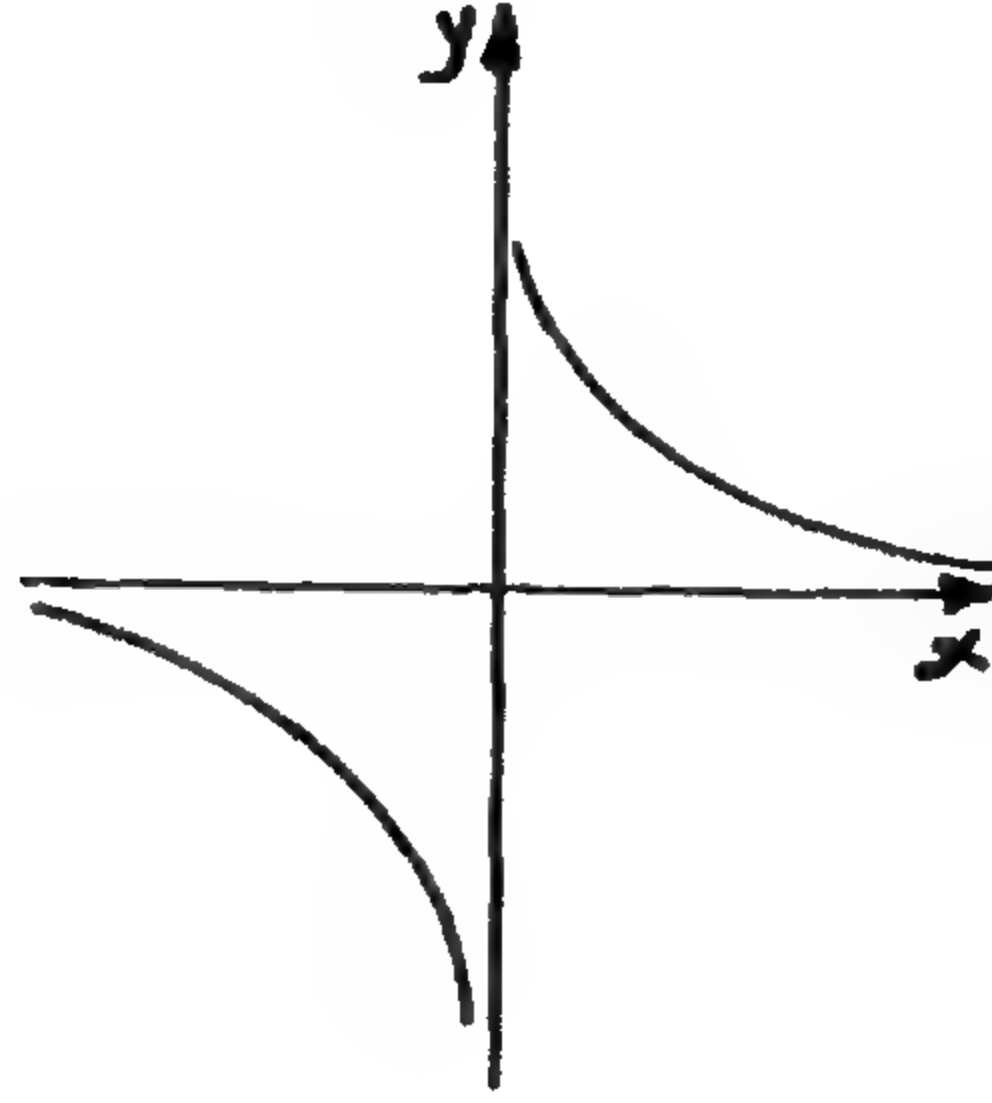
(٢-٣)



شكل (٢-٣)

ويجب ملاحظة أنه عند $x = 2$ فإن : $y = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0}$

وهى كمية غير معينة ومن الرسم يتضح أن الدالة غير متصلة عند $x=2$ وكذلك الدالة $y=\frac{1}{x}$ غير متصلة عند $x=0$ انظر الرسم شكل (٢-٤) .



(٢ - ٤)

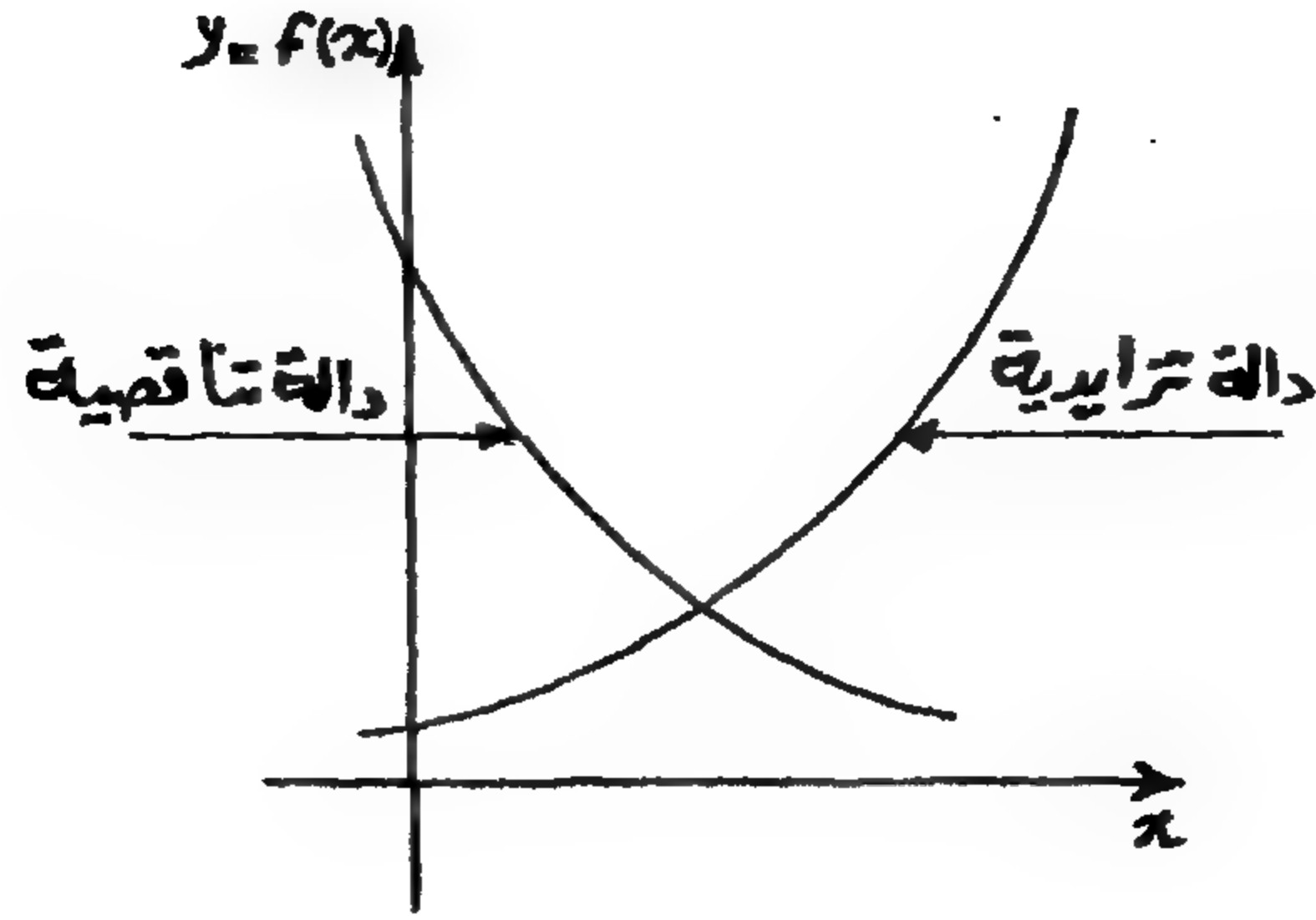
وكذلك الدالة $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

سنجد أنه عند $x=1$ فإن $y = \frac{\text{Zero}}{\text{zero}}$ وهى قيمة غير معينة

لذلك فإن y دالة غير متصلة فى x لأنه عند قيمة معينة لـ x ($x=1$) فإن $y = f(x)$ تكون غير مُعرفة أولها قيمة غير معينة .

(٨) الدوال التزايدية والدوال التناقصية :-

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ مُعرفة فى الفترة المفتوحة (a, b) فإنه يُطلق على الدالة $f(x)$ بأنها تزايدية ؛ إذا كانت قيمة $f(x)$ تزيد بزيادة قيمة المتغير المستقل (x) فى حين يُطلق عليها بأنها تناقصية ، إذا كانت قيمة $y = f(x)$ تنقص كلما ازدادت قيمة x



شكل (٢-٥)

(٩) الدالة الجبرية والدالة غير الجبرية :-

تكون الدالة جبرية إذا كانت العمليات التي نُجريها على المتغير المستقل فيها هي عمليات الجمع والضرب والطرح والقسمة والتربيع وإيجاد الجذور وإيجاد اللوغاريتم أو الرفع للأسس ، وهكذا

أمثلة :- الدوال التالية هي دوال جبرية

$$y = \frac{2x^3 + 2\sqrt[3]{x^2} - 5\log x}{(4+3x)^{\frac{3}{2}} + 7}$$

$$y = \sqrt{\frac{(x+2)^4}{x^2 - 3x}}$$

ويطلق على ما عدا ذلك من الدوال غير الجبرية وهي :-

(١٠) دالة القوى :-

مثل الدالة : $y = x^n$ حيث n عدد حقيقي ثابت

وعندما تكون $n=0$ فإن الدالة y تساوى مقداراً ثابتاً $= 1$

(١١) الدالة الأسية :- Exponential function

مثل الدالة : $y = a^x$ حيث x عدد صحيح غير الواحد والصفر ، $a \neq 0, 1$ ،

الدالة :- $y = e^x$ حيث e عدد حقيقي $\cong 2.71828$

$$a=e \text{ عندما } n \in N, e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

فإذا كانت $a=e=2.71828$ وهى عدد حقيقى فإنه يسمى بالأساس الطبيعى

$$\dots y = f(x) = \log_e x = \ln x \text{ فإن}$$

ويطابق على $\ln x$ باللوغاريتم الطبيعى للمقدار x .

(١٢) الدالة اللوغاريتمية :- **logarithmic function**

وتكون فى الصورة : $y = \log_a x$ حيث a عدد موجب لا يساوى الواحد ولا الصفر

$$a \neq 0, 1 \text{ وكذلك } y = \log_e x$$

(١٣) الدوال المثلثية :- **trigonometric functions**

مثل :-

$$\sin x, \cos x, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

ويعبر عن x عادةً بالزوايا النصف قطرية $(\pi - \text{radians} = 180^\circ)$

بعض خواص الدوال المثلثية :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

(١٤) الدوال المثلثية العكسية (الدوال الدائرية) :

$$y = \arcsin x = \sin^{-1} x \left[-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi/2 \right]$$

$$y = \arccos x = \cos^{-1} x \left[0 \leq y \leq \pi \right]$$

$$y = \arctan x = \tan^{-1} x \left[-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right]$$

$$y = \operatorname{arccot} x = \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \left[0 < y < \pi \right]$$

$$y = \operatorname{arcsec} x = \sec^{-1} x = \cos^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) \left[0 \leq y \leq \pi \right]$$

$$y = \operatorname{arccosec} x = \operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) \left[-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right]$$

(١٥) الدوال الزائدية : - Hyperbolic functions

تُعرف هذه الدوال بدلالة الدوال الأسية e^x , e^{-x} ذات الأساس الطبيعي e .

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

بعض خواص الدوال الزائدية :-

$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{cosech}^2 x$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

(١٦) الدوال الزائدية العكسية :-

إذا كان لدينا $x = \sinh y$ فإن $y = \sinh^{-1} x$ ، هي الجيب الزائدى العكسى للمقدار x .

وفيما يلى قيم الدوال الزائدية العكسية بدلالة اللوغاريتم الطبيعى (ln) ومدى x الذى تكون فيه الدالة حقيقية :-

وذلك لكل قيم x .

$$\sinh^{-1} x = \operatorname{arc} \sinh x = \ln \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right]$$

$$\cosh^{-1} x = \operatorname{arc} \cosh x = \ln \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right], x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \operatorname{arc} \tanh x = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+x}{1-x} \right], |x| < 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \operatorname{arc} \operatorname{csch} x = \ln \left[\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|} \right], x \neq 0$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \operatorname{arc} \operatorname{sech} x = \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right], 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{coth}^{-1} x = \operatorname{arc} \operatorname{coth} x = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x+1}{x-1} \right], |x| > 1$$

(١٧) الدوال المركبة (دالة الدالة) :-

إذا كان لدينا $y = f(z)$ وكانت z فى نفس الوقت دالة فى x فإن هذا يعنى أن y دالة فى x .

$$\text{حيث : } z = \Phi(x) \quad \therefore y = f[\Phi(x)]$$

وهى دالة فى الدالة أو دالة مُركبة .

أمثلة :-

عند نفخ بالون مثلاً فإن نصف قطره يتغير مع الزمن بعلاقة معينة ، ويتغير حجم البالون بالتالى بتغير نصف القطر :

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad v = f(r), \quad r = \Phi(t)$$

$$\therefore v = \Psi(t)$$

وكذلك الدالة $y = \sin x^3$ فإذا ما وضعنا $Z = x^3$:

$$\therefore y = \sin Z$$

وهنا تصبح y دالة فى z ، z أصلاً دالة فى x :

$$\therefore y = \Phi(x)$$

(١٨) الدالة الكسرية :- Fractional function

إذا كانت الدالة يمكن التعبير عنها فى صورة خارج قسمة دالتين كثيرتى الحدود ، البسط كثيرة حدود من درجة n والمقام كثيرة حدود من درجة m مثلاً :

$$\therefore f(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$$

وتُعرف هذه الدالة بأنها دالة كسرية مثل :

$$y = f(x) = \frac{5 + 2x + 7x^2 - 4x^3}{2 - 3x + 8x^2 + 5x^3 - 2x^4}$$

(١٩) الدوال الدورية :-

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ وبحيث أنه يوجد رقم ثابت k ، بحيث إذا أُضيف أو طُرح من المتغير x فإن قيمة الدالة لا تتغير ، فإن الدالة تُعرف بأنها دالة دورية .

$$i.e y = f(x) = f(x+k)$$

وأصغر هذه الأعداد التي يمكن إضافتها أو طرحها بحيث لا تتغير قيمة الدالة يُطلق عليها بموجة الدالة أو دورتها .

فمثلاً :- $y = \sin x$ هي دالة دورية ودورتها $k = 2\pi =$

، $y = \cos x$ هي دالة دورية ودورتها $k = 2\pi =$

، $y = \tan x$ هي دالة دورية ودورتها $k = \pi =$

، $y = \cot x$ هي دالة دورية ودورتها $k = \pi =$

وذلك لأن :-

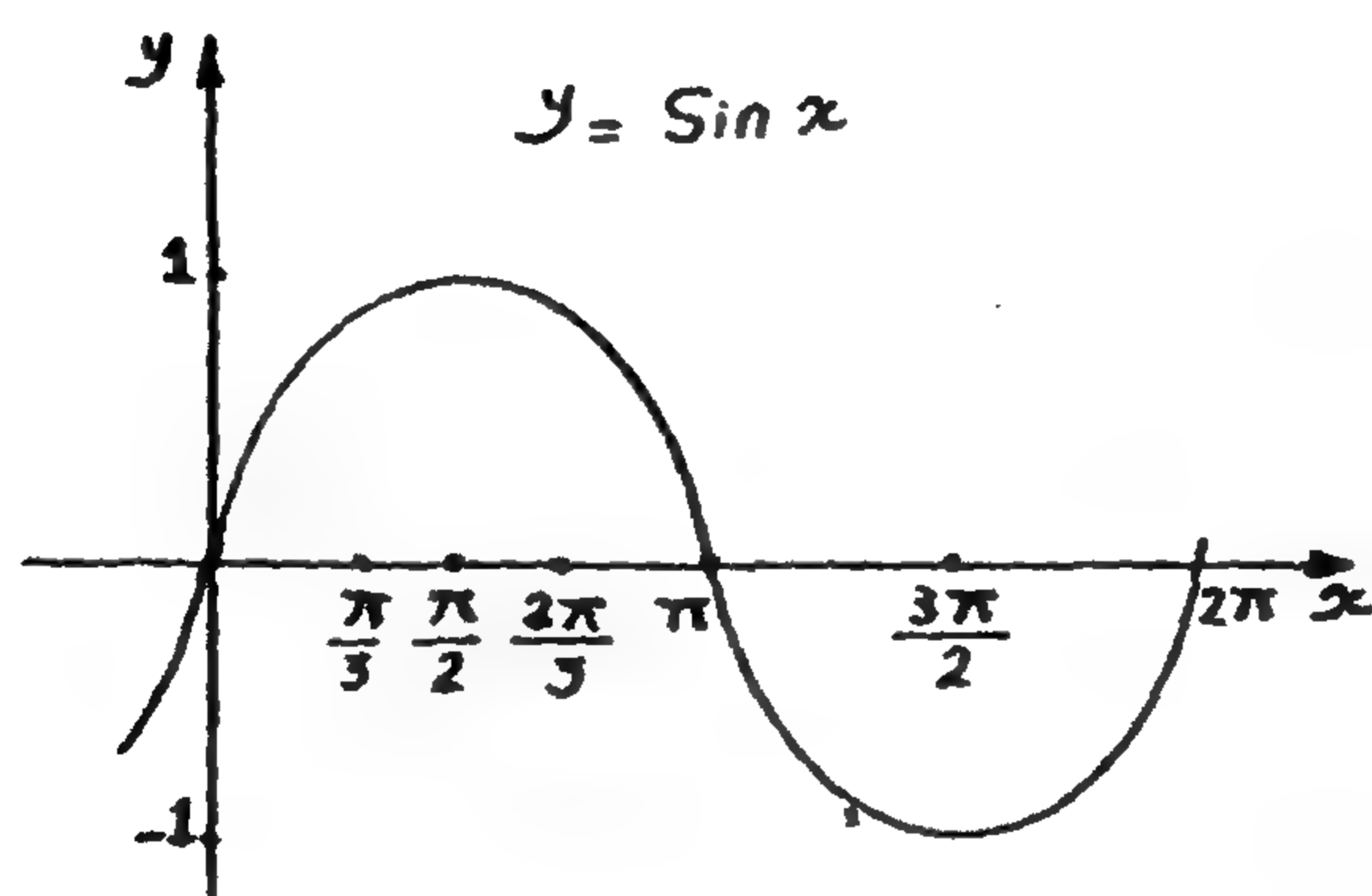
$$y = \sin 30 = \sin(30 + 360) = \frac{1}{2}$$

$$y = \cos 60 = \cos(60 + 360) = \frac{1}{2}$$

$$y = \tan 30 = \tan(30 + 180) = 0.5773502 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y = \cot 30 = \cot(30 + 180) = 1.7320508 = \sqrt{3}$$

انظر الرسم شكل (٦-٢) .



نموذج للدالة الدورية

شكل (٦-٢)

(٢٠) الدالة العكسية: - Inverse functions

إذا كانت $y = x^2$ فإن $x = \sqrt{y}$

ففي الدالة الأولى عبرنا عن y بدلالة x أى أن y دالة في (x) .

وفي الدالة الثانية عبرنا عن x بدلالة y أى أن x دالة في (y) .

ويُطلق على كل من الدالتين $y = x^2$ ، $x = \sqrt{y}$ بالدوال العكسية .

وكذلك إذا كانت $y = a^x$ فإن $x = \log_a y$ ←

، إذا كانت $y = \sin x$ فإن $x = \sin^{-1} y$ ←

الباب الثالث

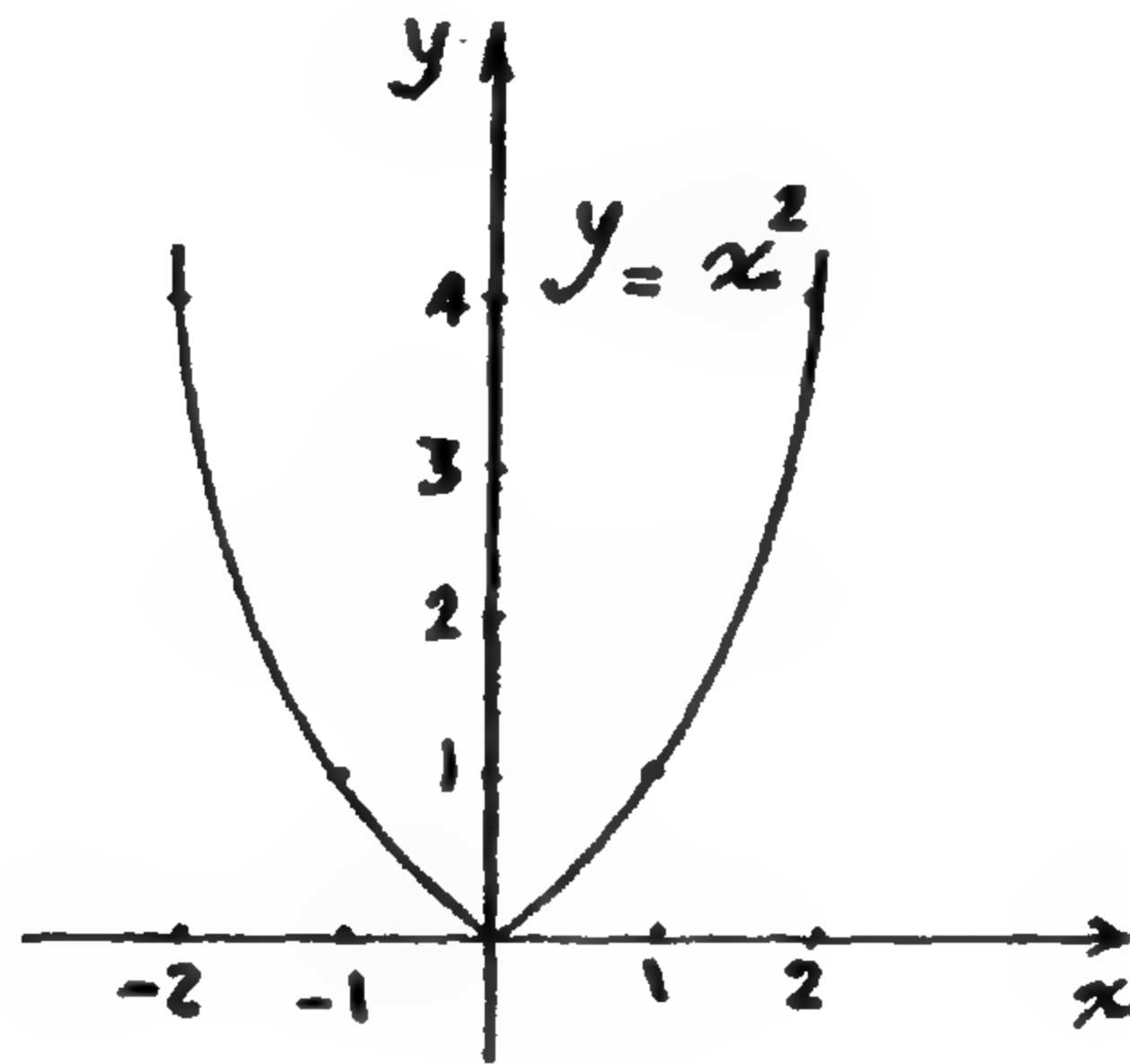
التغير فى الدوال - النهايات

٣-١ :- التغير فى الدوال :-

علمنا من تعريف الدالة أنه عندما تتغير قيمة المتغير المستقل x فإن قيمة الدالة تتغير بالتبعية .

وسوف نتعرض فيما يلى لبعض الأمثلة لإيضاح كيفية تغير الدوال ، وسوف يساعد الرسم البيانى كثيراً فى إيضاح هذه التغيرات .

ولنبداً بالدالة الشهيرة : $y = f(x) = x^2$ ، انظر شكل (٣-١)



شكل (٣-١)

ويتضح من الشكل كيفية تغير الدالة فى الحدود التى يتغيرها المتغير المستقل

$(-3 \leq x \leq 3)$ على المحور XOX وتتغير قيمة الدالة على المحور OY .

وبدراسة المنحنى يتضح الآتى :-

(١) بزيادة قيم X باستمرار من القيم السالبة إلى الصفر ، فإن قيم Y تكون موجبة وتتناقص إلى الصفر عند نقطة الأصل .

(٢) بزيادة قيم X بدءاً من الصفر فى مدى القيم الموجبة فإن Y تزداد كذلك وتكون موجبة .

(٣) عند نقطة الأصل ، تميل Y إلى أن تنعدم ثم تبدأ في الزيادة ويُطلق على هذه النقطة بنقطة تحول Turning point على المنحنى .

(٤) إذا ما فرضنا أن x ازدادت بدون حدود فإن y تزداد كذلك بدون حدود ولقيم x السالبة ، فإنه بنقص قيمة x بدون حدود فإن y تزداد بدون حدود أيضاً .

مثال آخر :- دراسة التغير في الدالة $y = \frac{1}{x}$

(١) عند زيادة قيمة المقام بزيادة قيمة x فإن قيمة الكسر أو قيمة y تقل .

(٢) عند نقص قيمة المقام بنقص قيمة x فإن قيمة الكسر أو قيمة y تزداد . وبذلك فإنه في هذه الدالة :-

أ (إذا كانت x كبيرة جداً ولنقل 10^{10} ، فإن y تُصبح عدداً صغيراً جداً .

ب) إذا كانت $x = (10^{10})^{20}$ مثلاً ، فإن قيمة y تُصبح عدداً متناهي في الصغر . ويُطلق على مثل هذه الأرقام أو الكميات (المتناهية في الصغر والمتناهية في الكبر ، في الرياضيات بأنها أرقام محدودة Finite) .

فإذا ما تخيلنا أن x قد ازدادت وبدرجة تُصبح معها أكبر من أى عدد ممكن التعبير عنه رياضياً فإننا نقول حينئذ أن x قد ازدادت بدون حدود ويقال حينئذ أنها تقترب من اللانهاية والتي نعبر عنها رياضياً بالرمز ∞ .

[ولاتعنى ∞ أنها رقم معين يمكن التعامل معه كالمعتاد ، فقسمة هذا الرقم على أى رقم معين أو ضربه في هذا العدد تبقى على قيمته كما هي أى ∞] .

ويتضح مما سبق أنه عندما تُصبح x ذات قيمة لانهاية في الكبر فإن الدالة $\frac{1}{x}$ يمكن

التعبير عنها في الصورة $y = \frac{1}{\infty}$ وهي مقدار متناهي في الصغر ، ويُطلق على هذا المقدار المتناهي في الصغر بالصفر zero - 0 .

[ومن هنا يجب أن لا نتعامل مع الصفر كرقم ولكن ككمية متناهية في الصغر ، غير محدد مدى صغرها .]

وعملية الضرب في هذه الكمية المتناهية في الصغر تؤدي إلى الناتج صفر أيضاً وقسمة هذه الكمية المتناهية في الصغر على أى عدد محدود لا تعنى غير الصفر كذلك .

$$\text{فإذا ما قسمنا عدد محدد على الصفر ، مثلاً الدالة } y = \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$$

فإن هذا يعنى قسمة الواحد على كمية متناهية في الصغر فتكون الإجابة ، كمية متناهية في الكبر $i.e. = \frac{1}{0} = \infty$.

ويمكن تلخيص ما سبق كالتالى :-

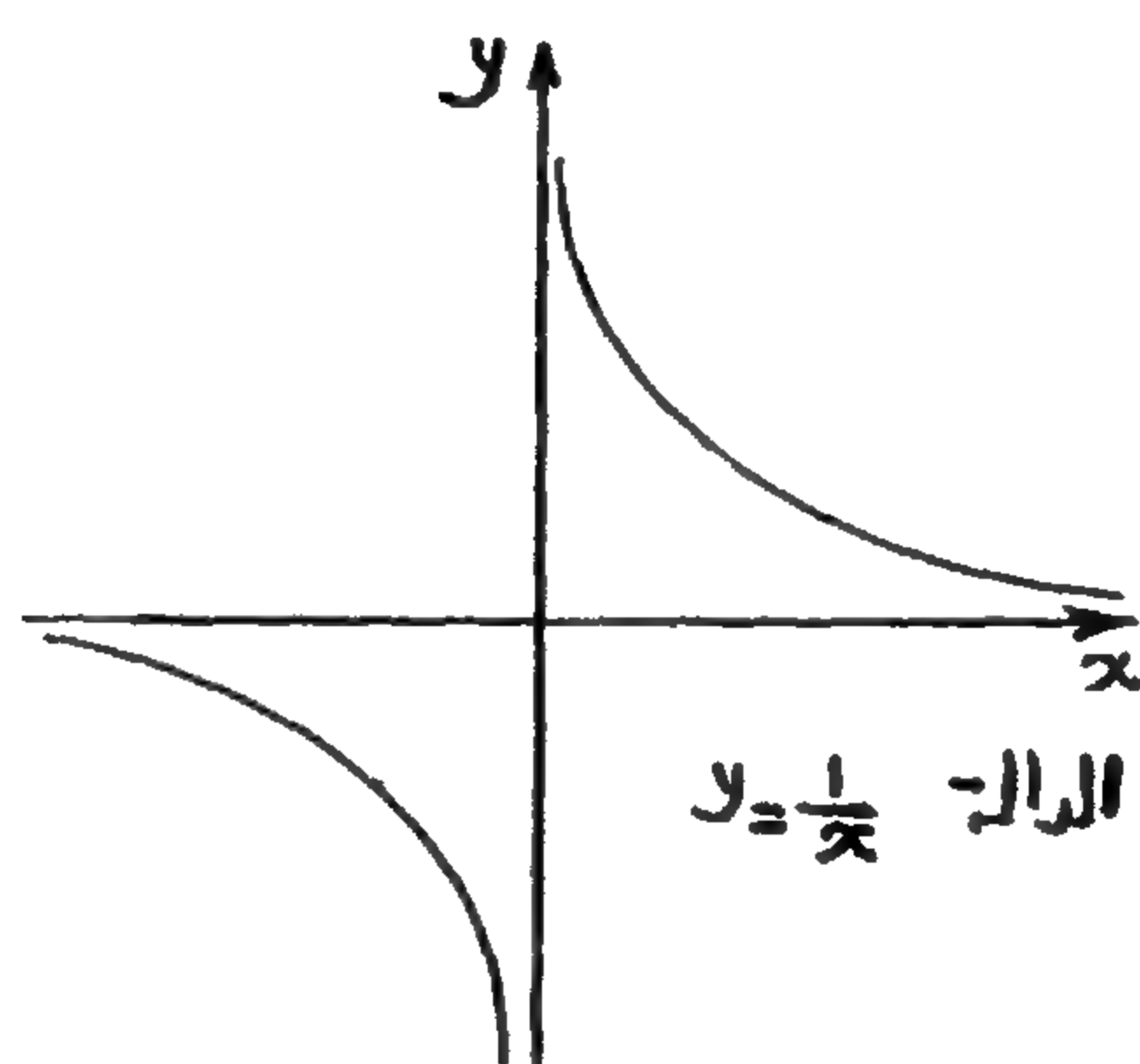
$$\begin{aligned} \text{when } x \rightarrow \infty & \quad \therefore \frac{1}{x} \rightarrow 0 \\ \text{, when } x \rightarrow 0 & \quad \therefore \frac{1}{x} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

ونفس التحليل السابق صحيح إذا كانت قيمة البسط خلاف الواحد كأن تُصبح $a =$ ،

حيث a عدد محدود موجب أو سالب أو كسر $i.e. y = \frac{a}{x}$

ويمكن إيضاح التحليل السابق برسم منحنى الدالة $y = \frac{1}{x}$

أنظر الرسم شكل (٣-٢) .



شكل (٣-٢)

وقد قمنا برسم الدالة كالمعتاد بفرض قيم مناسبة لـ x ثم نحسب القيم المقابلة لها y وتدوينها بجدول فنحصل على المنحنى المبين بالشكل .

ويُعرف هذا المنحنى بمنحنى القطع الزائد hyperbola وهو يتكون من فرعين بنفس الشكل ، مناظرين لقيم x الموجبة والسالبة أى أن أحد الفرعين فى الاتجاه الموجب لمحور السينات والفرع الآخر فى الاتجاه السالب لمحور السينات .

فإذا ما اعتبرنا الفرع الموجب للمنحنى سنجد :-

- (١) بزيادة قيم x تتناقص قيمة y ويقترب المنحنى من محور X وعندما تقترب x من اللانهاية فإن المنحنى يزداد اقتراباً حتى ينطبق مع محور x عند اللانهاية .
وبالتعبير الهندسى فإن محور OX يُعتبر كعماس للمنحنى عند نقطة اللانهاية .
- (٢) عند قيم x فيما بين $0, 1$ فإن المنحنى يقترب من محور Y وب نفس الطريقة فإن المحور OY يُعتبر كعماس للمنحنى عند اللانهاية ويُطلق على الخط المستقيم الذى يلاقى المنحنى عند اللانهاية وبذلك يكون كعماس للمنحنى عند اللانهاية بأنه الخط المُقارب للمنحنى Asymptote .

وبذلك فإن محورى الإحداثيات OX, OY هما خطى تقارب المنحنى $y = \frac{1}{x}$ (الفرع الأيمن) .

ونفس التحليل ينطبق على الفرع السالب للمنحنى ويُصبح محورى الإحداثيات OX, OY هما خطى تقارب الفرع السالب للمنحنى .

وبذلك فإن كلاً من XoX, Yoy هما خطى تقارب المنحنى $Y = \frac{1}{x}$

وبلاحظ التالى على المنحنى :-

لكل قيم X من $-\infty$ إلى $+\infty$ فإن قيمة y تتناقص دائماً ، إلا أن التغير المفاجئ من $-\infty$ إلى $+\infty$ يحدث عند مرور X بنقطة الصفر وهى حالة قيد الاعتبار فيما بعد .

مثال آخر :- $y = \tan x$

٢-٣ :- النهايات Limits

إذا كان لدينا دالة كسرية في x وكان كل من البسط والمقام يحتوى على المتغير المستقل x وبفرض أن كل منهما يقترب من اللانهاية عندما تقترب x من اللانهاية فإن الكسر يأخذ الصورة $\frac{\infty}{\infty}$ فمثلاً إذا كان :-

$$f(x) = \frac{3x}{x+4}$$

فإن كلا من البسط والمقام يُصبح لانهايتي عندما تُصبح x لانهاية .

والسؤال الذى يطرح نفسه الآن ، ماذا يعنى المقدار $\frac{\infty}{\infty}$

فإذا ما قسمنا كل من البسط والمقام على x :

$$\therefore f(x) = \frac{3x}{x+4} = \frac{3}{1+\frac{4}{x}} \quad \text{بعد القسمة على } x ؛$$

فإذا ما اقتربت x من ∞ فإن $\frac{4}{x} \rightarrow 0$

وبذلك فإن الكسر تقترب قيمته من $\frac{3}{1+0}$ أى من 3

وبذلك فإن $\frac{3x}{x+4}$ تقترب من القيمة المحددة 3 عندما تقترب x من ∞

ولذلك فإننا نطلق على 3 بأنها النهاية التى يقترب منها المقدار الكسرى $\frac{3x}{x+4}$

عندما تقترب x من اللانهاية .

وتُعرف بقيمة النهاية Limiting Value أو نهاية الدالة Limit of the function .

وتستخدم الرموز التالية للتعبير عن نهاية الدالة $\frac{3x}{x+4}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x+4} = 3$$

ويرمز للقيمة التي تقترب منها x بالرمز $\infty \rightarrow x$ وتوضع تحت الرمز lt وفكرة النهاية ذات أهمية كبيرة جداً ، ليس فقط في حساب التفاضل ولكن في كل الصيغ الرياضية بالرياضيات العالية .

نهاية الدالة على الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{0}{0}$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{لنعتبر الدالة :-}$$

ويمكننا إيجاد قيمة الدالة لأي قيمة لـ x ولكن إذا اعتبرنا $x = 2$ فإن قيمة كل من البسط والمقام تُصبح صفراً

ويأخذ الكسر الشكل $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ويُطلق على هذا المقدار بأنه كمية غير معينة ويُصبح من

الخطأ اعتبار أن قيمة الكسر ككل = صفر

والصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ في غاية الأهمية وسوف نحلل معناها فيما يلي :-

لنعتبر قيمة x أكبر قليلاً أو أقل قليلاً من المقدار 2 :-

$$(1) \quad \text{لتكن } x = 2.1 \text{ مثلاً}$$

$$\therefore \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{4.41 - 4}{2.1 - 2} = \frac{0.41}{0.1} = 4.1$$

$$(2) \quad \text{نعتبر } x = 2.01$$

$$\therefore \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{4.0401 - 4}{2.01 - 2} = \frac{0.0401}{0.01} = 4.01$$

$$(3) \quad \text{نعتبر } x = 2.001$$

$$\therefore \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{4.004001 - 4}{2.001 - 2} = \frac{0.004001}{0.001} = 4.001$$

ولنأخذ الآن قيمة لـ x أقل من 2 :-

$$(4) \quad \text{نعتبر } x = 1.9$$

$$\therefore \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{3.61 - 4}{1.9 - 2} = \frac{-0.39}{-0.1} = 3.9$$

(٥) نعتبر $x = 1.99$

$$\therefore \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{3.9601 - 4}{1.99 - 1} = \frac{-0.0399}{-0.01} = 3.99$$

وعمقارنة هذه النتائج نصل إلى التالى :-

كلما اقتربت x من 2 فإن قيمة الكسر تقترب من 4 وأنه عندما تختلف قيمة x عن المقدار 2 بفارق ضئيل فإن قيمة الكسر تختلف عن المقدار 4 بفارق ضئيل كذلك . وأنه كلما قل الفارق بين 2 , x كلما قل الفارق بين قيمة الكسر ، 4 وفى النهاية ؛ عندما يصبح الفرق بين x ، 2 متناهياً فى الصغر فإن الفرق بين قيمة الكسر ، 4 يكون متناهياً فى الصغر .

ويمكن التعبير عن هذا كالتالى :-

$$as \ x \rightarrow 2 \quad \therefore \frac{x^2 - 4}{x - 2} \rightarrow 4$$

وقد اتضح لنا الآن أن الدالة $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ لها قيمة محددة عندما تقترب x من 2 أو بالتعبير برموز النهايات فإن :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \rightarrow 4$$

ولندرس الحالة السابقة فى صورة عامة وليكن مثالنا فى هذا :-

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a} \quad \text{الدالة الكسرية :}$$

ونوجد قيمتها عندما $x \rightarrow a$ ؛ ويجب ملاحظة أنه عندما $x = a$ فإن قيمة الكسر تصبح $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

وباتباع نفس الطريقة السابقة فى المثال السابق ولكن بصورة عامة :-

نعتبر $x = a + h$ حيث h تعنى كمية صغيرة متغيرة والتى تختلف قيمة x عن a بمقدارها . وبالتعويض فى قيمة الكسر :

$$\therefore \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(a + h)^2 - a^2}{(a + h) - a} = \frac{2ah + h^2}{h}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على h (والتي ليست بالصفر)

$$\therefore \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a + h$$

وبتناقص قيمة h فإن قيمة x تقترب من a ، أو عندما تقترب x اقتراباً نهائياً من قيمة a فإن h تقترب من الصفر .

$$\therefore 2a + h \text{ تقترب من } 2a$$

$$i.e \ x \rightarrow a \quad \therefore \ h \rightarrow 0$$

$$\therefore \frac{x^2 - a^2}{x - a} \rightarrow 2a.$$

أى أن $2a$ هى قيمة نهاية الدالة .

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$$

ويتضح مما سبق أن التعبير $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ المستخدم فى الأمثلة السابقة يمكن اعتباره بأنه نسبة

بين مقدارين متناهيين فى الصغر وتقترب قيمة هذه النسبة من قيمة محددة ، عندما يقترب كل من البسط والمقام من الصفر .

٣ - ٣ : - طرق حساب النهايات :

لحساب نهاية مقدار ، نقوم أولاً بالتعويض بقيمة x التى يؤول إليها المقدار مباشرة . فإذا كانت هنالك قيمة محددة للمقدار بعد التعويض ، فإنها تعتبر نهاية المقدار المطلوبة ؛

أما إذا كانت قيمة المقدار (أو الدالة) قيمة غير معينة : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ فإنه يلزم اتباع

أيا من الطريقتين التاليتين :

(١) التحليل للمقدار أو للدالة وذلك بتحليل كل من البسط والمقام إلى عوامله الأولية

ثم نختصر العوامل المتشابهة ، ثم نعوض فى الباقي بقيمة x التى تؤول إليها .

(٢) الطريقة العامة وهذه نستخدمها فى حالة عدم تمكننا من تحليل $f(x)$ التى على

الصورة الكسرية .

حيث لا نعوض بقيمة x التي تؤول لها فى الدالة ولتكن (a) ولكن نعوض بقيمة قريبة جداً منها ولتكن $(a+h)$

أو $(a+\varepsilon)$ أو $(a+\Delta)$ ثم نوجد قيمة $f(x)$ عند اقتراب h أو Δ من الصفر أى عند اقتراب x من القيمة (a) فنحصل على النهاية .

وفيما يلى أمثلة لإيضاح ما سبق :-

مثال (١) أوجد قيمة : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{x+3}{x-3}$

الحل :- بالتعويض فى الدالة مباشرة عن $x=3$:-

$$\therefore \frac{3+3}{3-3} = \frac{6}{0} = \infty$$

∞ كمية معينة ومحددة ، وتعتبر نهاية لهذه الدالة عند اقتراب x من 3

مثال (٢) :- أوجد قيمة : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

الحل :- بالتعويض فى الدالة مباشرة عن $x=3$

$$\therefore \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$$

وهى قيمة غير معينة أو محددة وحيث أن $f(x)$ لها قيمة غير معينة وفى الصورة الكسرية ، لذلك فإننا نلجأ للطريقة الأولى كما ذكرنا وهى التحليل :

$$\text{البسط } (x^2-9) = (x-3)(x+3)$$

$$\therefore f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = (x+3)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 3+3 = 6$$

مثال (٣) :- أوجد قيمة :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$$

الحل :- بالتعويض المباشر :-

$$\therefore f(x) = \frac{2^3-8}{2-2} = \frac{\text{zero}}{\text{zero}} \quad \text{at } x=2$$

وهى قيمة غير معينة ، لذلك نقوم بتحليل كل من البسط والمقام إلى عواملهما الأولية :

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)}$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x + 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 4 + 4 + 4 = 12.$$

ويحدث أحياناً أن تكون درجة البسط أعلى من درجة المقام كما فى المثال السابق . ويمكن فى الحالة السابقة إجراء قسمة البسط على المقام فإذا حصلنا على خارج القسمة بدون باقى فإن الناتج يعتبر $f(x)$ بعد حذف المقام أى أن قسمة $(x^3 - 2^3)$ على $(x - 2)$ تعطى $x^2 + 2x + 4$ وبدون باقى .

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x + 2$$

حيث تم حذف المقام $(x - 2)$.

والآن نفترض أننا لم نتمكن من حذف أو تحليل مقدار البسط $(x^3 - 2^3)$ إلى عوامله الأولية : $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ فإنه يمكننا استخدام الطريقة الثانية (الطريقة العامة) ، كالتالى : -

$$f(x) = \frac{x^3 - 2^3}{x - 2}$$

نضع $x = 2 + h$ ، مقدار ضئيل جداً يؤول إلى الصفر عندما تؤول x إلى 2

$$\therefore f(x) = f(2 + h)$$

$$\begin{aligned} f(2 + h) &= \frac{(2 + h)^3 - 2^3}{(2 + h) - 2} \\ &= \frac{(8 + 12h + 6h^2 + h^3) - 8}{h} \\ &= \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} \end{aligned}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على h :

$$\therefore f(2 + h) = 12 + 6h + h^2$$

ولما كانت قيمة h صغيرة جداً فإنه عندما تؤول x إلى 2 فإن h تؤول إلى صفر وبالطبع h^2 تؤول هي الأخرى للصفر

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 2^3}{x - 2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} 12 + 6h + h^2 = 12.$$

وفى الأمثلة السابقة ، كانت قيمة $f(x)$ عند التعويض مباشرة بقيمة x فى الدالة هى $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهى قيمة غير معينة

إلا أنه فى بعض الأحيان تكون قيمة $f(x)$ مساوية لـ $\frac{\infty}{\infty}$ عند التعويض بقيمة x مباشرة فى الدالة .

وهنا يلزم قسمة كل من البسط والمقام فى $f(x)$ على أعلى قوة للمتغير المستقل x كما فى الأمثلة التالية : -

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2} \quad \text{مثال (٤) : - إذا كانت}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{فاوجد :}$$

الحل : - إذا عوضنا بقيمة $x = \infty$ فإن :

$$f(x) = \frac{\infty^2}{\infty + 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

وهى قيمة غير محددة (معينة) ، هنا نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على أعلى قوة لـ x :

$$\therefore f(x) = \frac{\left(\frac{x^2}{x^2} \right)}{\left(\frac{x^2}{x^2} \right) + \left(\frac{2}{x^2} \right)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{1}{1 + 0} = \frac{1}{1} = 1$$

لاحظ أن أى كمية محددة مقسومة على ∞ = صفر $\left(\frac{2}{\infty} = 0 \right)$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 5}{4x^2 - 2x + 3}$$

مثال (٥) : - إذا كانت :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

فأوجد قيمة :

الحل : - بالتعويض بقيمة $x = \infty$ سنجد أن : -

$$f(x) = \frac{\infty}{\infty} \text{ (وهي قيمة غير معينة)}$$

لذلك نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على (x^2) حيث (x^2) هي أكبر قوة للمتغير المستقل x .

$$\therefore f(x) = \frac{3 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}}{4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{3 + \frac{4}{\infty} - \frac{5}{\infty}}{4 - \frac{2}{\infty} + \frac{3}{\infty}} = \frac{3 + 0 - 0}{4 - 0 + 0} = \frac{3}{4}$$

ولاحظ أن أى كمية محددة مقسومة على $\infty = \text{صفر}$.

٣-٤ : نهاية المتتابعات Limit of a series

فى الأمثلة البسيطة السابقة اعتبرنا نهاية الدالة إلا أنه سبق لنا معرفة أن النهاية تستخدم كذلك فى بعض الحالات عند إيجاد مجموع متتابعة

فى المتتابعة الهندسية (المتوالية الهندسية) Geometrical Progression ، إذا كان الأساس عدد كسرى ملائم فإن مجموع حدود المتتابعة يقترب من قيمة محددة عندما يزداد عدد الحدود كثيراً .

وتسمى هذه القيمة ، بنهاية المجموع أو مجموع المتوالية .

ولنعبر المتوالية الهندسية التالية : S_n

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$a =$ الحد الأول

حيث :-

$n =$ عدد الحدود

$r =$ النسبة الثابتة بين الحدود (الأساس)

$S_n =$ مجموع n من الحدود

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \quad \dots\dots\dots (A)$$

فإذا كانت r ، كسراً مناسباً فإن قيمة r^n تتناقص بزيادة n وبذلك فإن $r^n \rightarrow 0$

عندما $n \rightarrow \infty$

أى أن : $ar^n \rightarrow 0$ ، عندئذ .

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{ar^n}{1-r} \right) = 0$$

ويتضح من A أن S_n تقترب من $\frac{a}{1-r}$ كنهاية عندما تزداد n بلا حدود وبذلك فإن

$\frac{a}{1-r}$ تُصبح حد أو نهاية المتتالية عندما تزداد n بلا حدود

وتُعرف بمجموع المتتالية عند اللانهاية .

أما إذا كانت r أكبر من الواحد الصحيح فإن قيمة الحدود تزداد بزيادة n ، وعند

اقترب n من اللانهاية فإن المجموع يقترب كذلك من اللانهاية .

ويجب أن نعلم أن هنالك أنواع متعددة من المتابعات ولذا فإنه من المهم أن نعرف ما

يلى عن مجموع n من الحدود عند زيادة n بلا حدود :-

(١) هل يقترب المجموع من قيمة محددة .

(٢) هل يصبح ذو قيمة غير محددة .

فإذا ما اقترب المجموع من قيمة محددة فإنه يُطلق على المتابعة بأنها تقاربية

Convergent ، أما إذا أصبح المجموع لا نهائياً فإنه يُطلق عليها متباعدة divergent .

ومع بعض الاستثناءات المحدودة ، فإن معظم المتابعات إما أن تكون تقاربية أو تباعدية.

مثال :- لنأخذ المتابعة : $y_1 = 0.3$, $y_2 = 0.33$, $y_3 = 0.333$

، سنجد أن الحد y_n يقترب بلا حدود من $\frac{1}{3}$ بزيادة عدد الحدود وعليه فإن الكسر $\frac{1}{3}$ يُعتبر نهاية المتابعة .

ملاحظة : تعطى الكسور العشرية ، $0.3, 0.33, \dots$ قيماً أكثر دقة للكسر $\frac{1}{3}$ وبذلك فإن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{3}$$

وبلاحظ أن الفرق : $\left(y_n - \frac{1}{3}\right)$ يعطى القيم التالية على التابع :

$$y_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}, \quad y_2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{300}, \quad y_3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3000}$$

$$y_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3 \times 10^n} \quad \text{أى أن :}$$

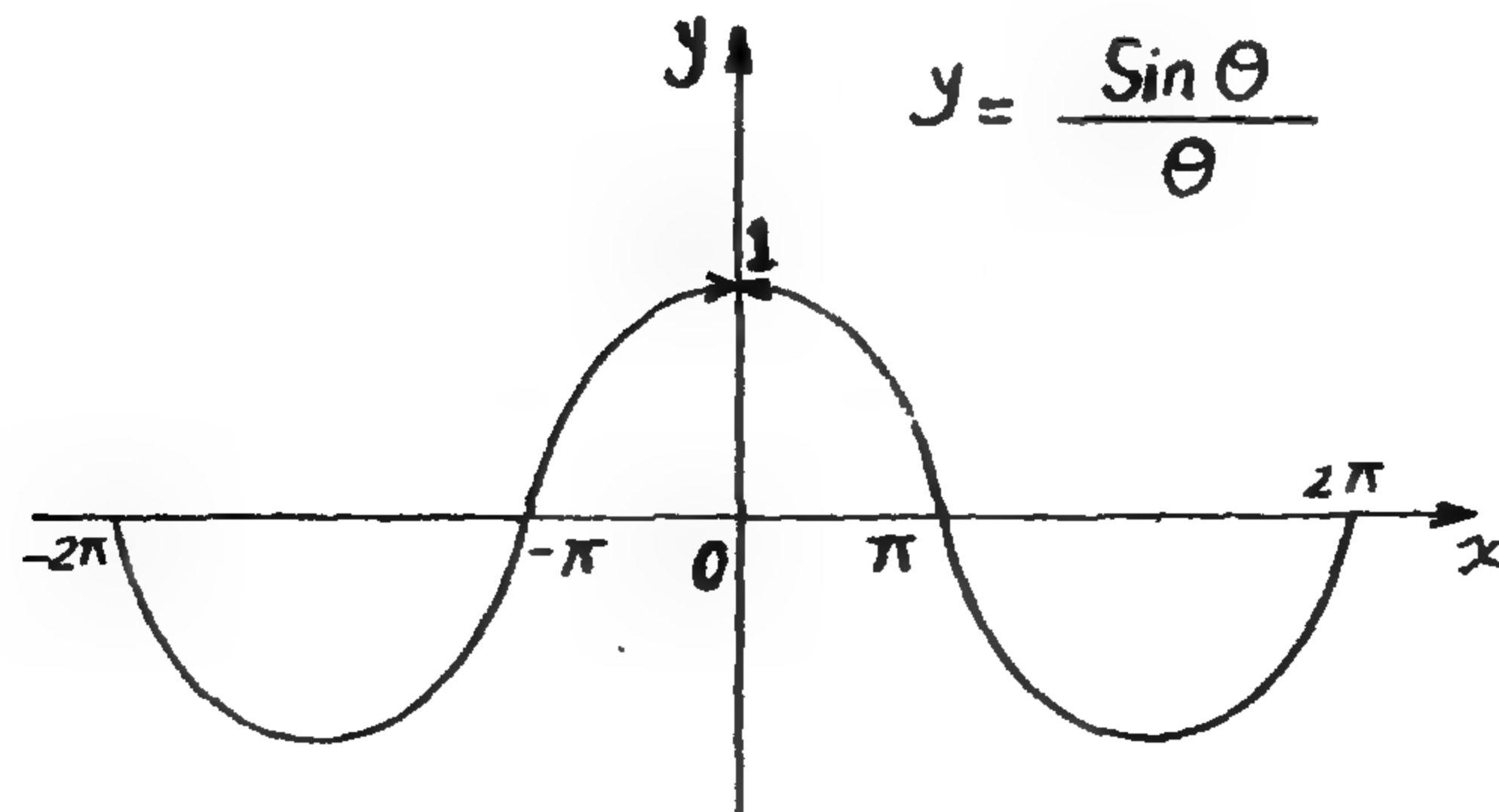
٣-٥ :- نهايات النسب المثلثية Trigonometrical limit

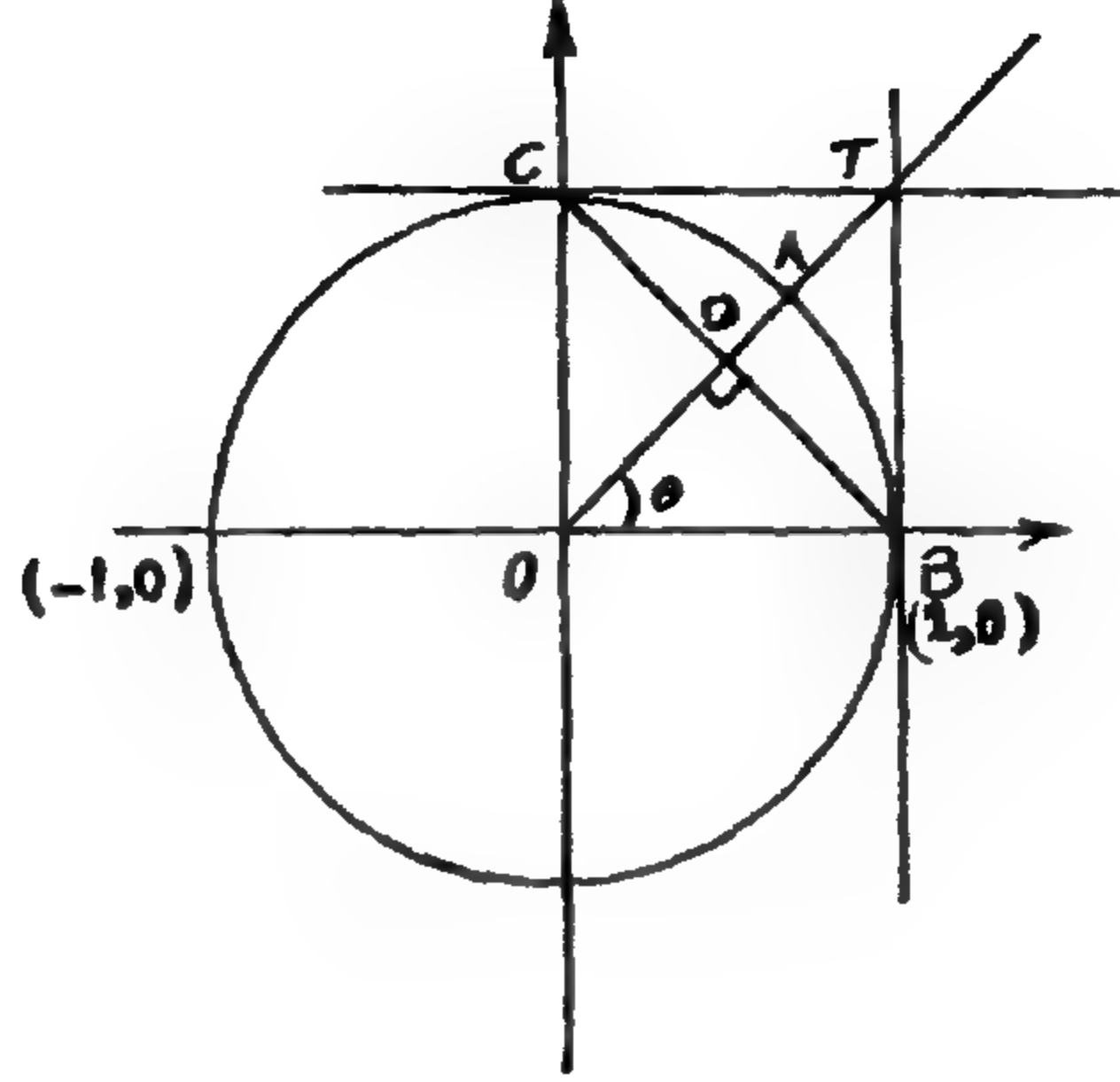
لنعتبر الدالة $\frac{\sin \theta}{\theta}$ ويراد إيجاد النهاية لها عندما $\theta \rightarrow 0$.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

واضح من الشكل (٣-٣) أنه عندما تصغر θ جداً فإن $\sin \theta$ تصغراً جداً كذلك ، وبذلك فإنه عندما تقترب كل من θ ، $\sin \theta$ من الصفر فإن النسبة $\frac{\sin \theta}{\theta}$ تقترب من

النسبة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ونهاية هذه الكمية إيجادها كما يلي :-





شكل (٣-٣)

ومن الشكل نعتبر O هي مركز الدائرة التي طول نصف قطرها مساوياً للوحدة .
ولنعتبر BAC قوس بها ، BC وتر بها ، OA نصف قطر يقطع الوتر وينصفه في D وعمودي عليه وكذلك يقطع القوس BAC وينصفه .
ثم نرسم B, C مماسين للدائرة BT, CT يتقاطعان مع OA أو امتداده في T
ولتكن زاوية $\angle AOB$ هي θ بالتقدير الدائري

$$\therefore TB + TC > \text{القوس } BAC$$

$$\therefore \text{الوتر } BC > \text{القوس } BAC \quad \text{وكذلك :}$$

$$\therefore BT > \text{arc } BA > BD \quad (١) \dots\dots\dots$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{BT}{OB} = BT \quad (\text{الوحدة} = 1 = OB) ,$$

$$\therefore \theta = \frac{\text{arc } BA}{OB} = \text{arc } BA$$

$$\sin \theta = \frac{BD}{OB} = BD$$

∴ من المعادلة (١)

$$\tan \theta > \theta > \sin \theta$$

$$\therefore \frac{\sin \theta}{\cos \theta} > \theta > \sin \theta$$

وبالقسمة على $\sin \theta$:

$$\therefore \frac{1}{\cos \theta} > \frac{\theta}{\sin \theta} > 1$$

$$\text{But when } \theta \rightarrow 0 \therefore \cos \theta \rightarrow 1$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \rightarrow 1 \quad \text{وبالتالى فإن :}$$

$$\text{وحيث أن : } \frac{\theta}{\sin \theta} \text{ تقع دائماً بين } 1, \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\therefore \text{when } \theta \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\cos \theta} \rightarrow 1$$

$$\therefore \frac{\theta}{\sin \theta} \rightarrow 1$$

أى أنه عندما تقترب $\theta \rightarrow 0$ فإن $\left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)$ تقترب من الواحد كنهاية

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1$$

وبالمثل فإن :

ويمكن للقارئ إثبات ذلك كما تقدم .

٣-٦ :- التوضيح الهندسى للنهاية A geometrical illustration of a limit

نفترض أن لدينا الدائرة OAB ، وتر بها يقطعها في O, B .

فإذا افترضنا أن هذا الوتر سيأخذ في الدوران فى اتجاه عقرب الساعة حول O فإن

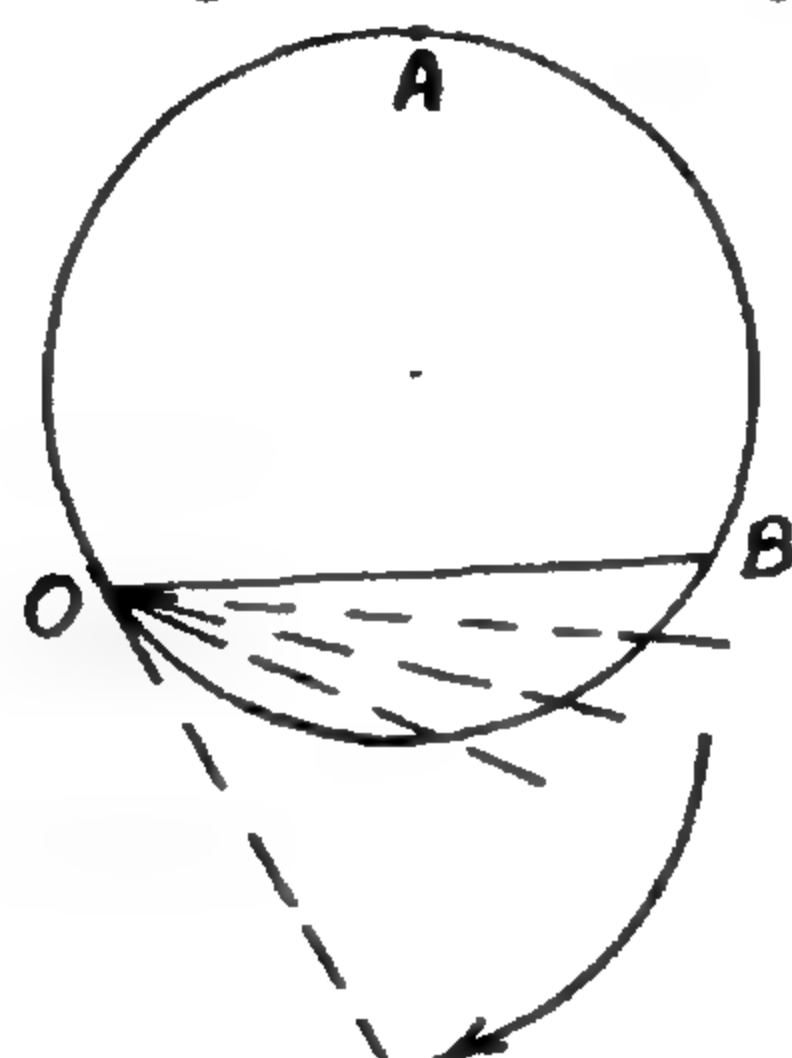
نقطة التقاطع B سوف تتحرك على المحيط (القوس الأصغر BO) من B إلى O

حيث سيتناقص طول كل من القوس BO والوتر BO كذلك :

فإذا ما استمر الدوران حتى يقترب من O فإن كل من القوس والوتر يتناقصان إلى أن يُصبحا صغيران جداً.

ومن هذا فإنه في الوضع المحدد ، عندما تتحرك B للإلتحاق على O فإن الوتر لن يقطع الدائرة في نقطة أخرى خلاف O .

أى أن الوتر يُصبح مماساً للدائرة عند O ، انظر الشكل (٣-٤)



شكل (٣-٤)

٣-٧ :- النظريات الأساسية للنهايات theorems on limits

سنورد فيما يلي القواعد الأساسية للنهايات ، بدون برهان :-

نظرية (١) :- إذا كان هُنالك متغيران متساويان دائماً فإن نهايتهما تكون متساوية .

نظرية (٢) :- نهاية مجموع عدد من الدوال Limit of a sum :-

نهاية حاصل جمع حدين أو ثلاثة أو أى عدد ثابت من الحدود أو الدوال تكون مساوية لمجموع نهايات كل حد من الحدود أو كل دالة من الدوال على حدة .

فإذا ما فرضنا أن كل من U, V دوال في نفس المتغير x

$$\therefore Lt(U + V) = Lt(U) + Lt(V)$$

$$Lim(u_1 + u_2 + \dots + u_k) = Lt(u_1) + Lt(u_2) + \dots + Lt U_k$$

وباختصار فإن نهاية المجموع تساوى مجموع النهايات .

نظرية (٣) :- وهى حالة خاصة من نظرية (٢) :-

نهاية الفرق بين حدين أو دالتين ، تساوى الفرق بين نهايتى الحدين أو الدالتين :

$$Lim(U - V) = Lim(U) - Lim(V)$$

نظرية (٤) : - نهاية المقدار الثابت = المقدار ذاته : $Lt\ k = k$

نظرية (٥) : - نهاية حاصل الضرب Limit of product

نهاية حاصل ضرب حدين أو ثلاثة أو أى عدد ثابت من الحدود تساوى حاصل ضرب نهايات هذه الحدود .

$$Lt(u_1 u_2 \dots u_n) = Lt(u_1) \times Lt(u_2) \times \dots \times Lt(u_n)$$

نظرية (٦) : - وهى حالة خاصة من نظرية (٤) :-

نهاية حاصل ضرب عدد ثابت \times حد (أو دالة) = الثابت مضروباً فى نهاية الحد أو الدالة

$$Lt\ ku = k\ Lt(u)$$

حيث k عدد ثابت ، u الدالة .

نظرية (٧) : - نهاية خارج قسمة حدين أو دالتين Limit of a quotient

نهاية خارج قسمة الحدين أو الدالتين تساوى خارج قسمة نهايات الحدين أو الدالتين على أن لا يكون نهاية المقسوم عليه مساوية للصفر :-

$$Lt\left(\frac{u}{v}\right) = Lt(u) \div Lt(v)$$

unless $Lt(v) = zero$ ما لم تكن

$$Lim\ \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

نظرية (٨) :-

وذلك لجميع قيم n

٨-٣ :- نهايات خاصة :-

إذا كانت الزاوية θ مُقاسة بالتقدير الدائرى (زاوية نصف قطرية)

$$\therefore Lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \quad Lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = zero$$

$$Lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad Lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$$

$$Lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad Lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

٣ - ٩ : - أمثلة محلولة : -

ملاحظة :- من المفيد رسم الدالة حيث أنه يمكن عادة من الرسم استنتاج ما إذا كان للدالة نهاية أم لا .

مثال (١) اوجد نهاية الدالة :

$$f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 6$$

عندما $x = 1$

الحل :-

$$\lim_{x \rightarrow 1} 5x^3 + 4x^2 - 7x + 6$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} 5x^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 7x + \lim_{x \rightarrow 1} 6$$

$$= 5 \times 1^3 + 4 \times 1^2 - 7 \times 1 + 6$$

$$= 5 + 4 - 7 + 6 = 8$$

$$f(x) = \frac{x^2 \sqrt{x-3}}{x+7}$$

مثال (٢) إذا كانت

فاوجد نهاية $f(x)$ عندما $x = 7$

الحل :-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 \sqrt{x-3}}{x+7} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 7} x^2 \times \lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{x-3}}{\lim_{x \rightarrow 7} x + \lim_{x \rightarrow 7} 7} \\ &= \frac{7^2 \times \sqrt{7-3}}{7+7} = \frac{49 \times \sqrt{4}}{14} = \frac{49 \times 2}{14} \\ &= 7 \end{aligned}$$

مثال (٣) إذا كانت $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$ فاوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$.

الحل :-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x+2}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 7} x + 2 \div \lim_{x \rightarrow 7} x - 4 \\ &= 7 + 2 \div 7 - 4 \\ &= 9 \div 3 = 3 \end{aligned}$$

ملاحظة :- إذا كانت نهاية المقسوم عليه تساوى صفر في حين أن نهاية المقسوم غير مساوية للصفر فإن خارج القسمة له نهاية غير محدودة .

مثال (٤) إذا كانت $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$

فأوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

الحل :-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+4) \div \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \\ &= (2+4) \div (2-2) = \frac{6}{0} = \infty \end{aligned}$$

مثال (٥) أوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$

الحل :-

" حل هذا المثال يعتبر برهان للنظرية رقم (٨) من نظريات النهايات "

لنعتبر $x = a + h$ حيث h مقدار صغير جداً

$$\therefore \frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{(a+h)^n - a^n}{(a+h) - a}$$

وبفك المقدار $(a+h)^n$ بنظرية ذات الحدين Binominal theorem

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \frac{\left\{ a^n + na^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}h^2 + \dots \right\} - a^n}{h} \\ &= na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}h + \dots \end{aligned}$$

ولكن حيث أن $x = a + h$ فإنه عندما تقترب x من a فإن h تقترب من الصفر .

i.e at $x \rightarrow a \quad \therefore h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}h^2 + \dots \right\} \\ &= na^{n-1} , [h \rightarrow 0] \end{aligned}$$

∴ النهاية تُصبح

وذلك لأن بقية الحدود تحتوى على المقدار h وبقوى متزايدة وعند اقتراب x من a فإن $h=0$ وباختصار فإنه عندما $x=a$ فإن كل الحدود المحتوية على h تتلاشى .

مثال (٦) أوجد نهاية الدالة :-

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$$

عندما $x=3$

الحل :-

يلاحظ أن كلاً من البسط numerator والمقام denominator يتلاشى عند $x=3$

وبالتالى فإن الدالة تأخذ الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$.

وبحذف الجذور rationalising من المقام :

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x-3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}} &= \frac{(x-3)[\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}]}{(\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x})(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})} \\ &= \frac{(x-3)[\sqrt{(x-2)} + \sqrt{(4-x)}]}{(x-2) - (4-x)} = \frac{(x-3)[\sqrt{(x-2)} + \sqrt{4-x}]}{2(x-3)} \\ &= \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}}{2} \end{aligned}$$

وبذلك فإن النهاية عندما $x=3$ تصبح :

$$\frac{\sqrt{3-2} + \sqrt{4-3}}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

مثال (٧) أوجد قيمة :

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5x + 3$$

الحل :-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5x + 3 &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} (-5x) + \lim_{x \rightarrow 2} 3 \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) + \left(\lim_{x \rightarrow 2} -5 \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) + \left(\lim_{x \rightarrow 2} 3 \right) \\ &= 2 \times 2 + -5 \times 2 + 3 = 4 - 10 + 3 = -3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+5)(3x-2)}{x^2-3x+1}$$

مثال (٨) أوجد قيمة :

الحل :-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x+5) \times \lim_{x \rightarrow -1} (3x-2)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2-3x+1)} \\ &= \frac{(-1+5) \times (3 \times -1 - 2)}{(-1)^2 - 3(-1) + 1} = \frac{4 \times (-5)}{5} = -4 \end{aligned}$$

مثال (٩) أوجد قيمة :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 3}{4x^4 - 2x^3 + 2x}$$

الحل :-

بالتعويض مباشرة بقيمة x نجد أن كلاً من البسط والمقام يعطى الكسر ، $\frac{\infty}{\infty}$

لذلك نقسم على أعلى قوة x^4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{4 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3}}$$

وذلك بالقسمة على x^4

$$\begin{aligned} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 4 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3}} \\ &= \frac{3 + 0 - 0}{4 - 0 + 0} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

مثال (١٠) أوجد قيمة :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+h} - 2}{h}$$

الحل :-

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+h} - 2}{h} \times \frac{\sqrt{9+h} + 2}{\sqrt{9+h} + 2}$$

وذلك بالضرب فى المرافق ؛

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9+h-4}{h(\sqrt{9+h}+2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{9+h}+2} \\ &= \frac{5}{\sqrt{9}+2} = \frac{5}{3+2} = \frac{5}{5} = 1 \end{aligned}$$

مثال (١١) أوجد قيمة

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a}{\sqrt{a}}$$

الحل :-

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a}{\sqrt{a}} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a}{a} \times \lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{a} \\ &= 1 \times \text{Zero} = \text{Zero} \end{aligned}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a}{a} = 1 \quad \text{وقد سبق بيان أن :}$$

مثال (١٢) أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3x - 7$$

الحل :-

بالتعويض فى الدالة $f(x)$ مباشرة بقيمة $x=3$

$$\therefore f(x) = 3 \times 3 - 7 = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 7) = 2$$

مثال (١٣) أوجد قيمة

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 2}$$

الحل :-

بالتعويض المباشر فى الدالة عن قيمة $x=3$ سنجد أن :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 2} = \frac{3^2 - 9}{3 + 2} = \frac{0}{5} = 0$$

وهي النهاية المطلوبة .

مثال (١٤) أوجد قيمة

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{x + 4}$$

الحل :-

بالنسبة للبسط فقط ، سنقوم بحساب النهاية كالتالي :-

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 8) = 2^2 - 8 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 4) = 2 + 4 = 6$$

وبالنسبة للمقام فقط

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{x + 4} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

مثال (١٥) أوجد قيمة

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}, x \neq 3$$

الحل :-

برسم منحنى هذه الدالة حول $x = 3$ ، سنجد أنها تزداد بدون حد عند اقتراب

x من 3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{0} = \infty$$

وبالتعويض المباشر نجد أن :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x}{8 - 2x}$$

مثال (١٦) أوجد قيمة

الحل :-

$$\lim_{x \rightarrow 4} 3x = 3 \times 4 = 12$$

بالنسبة للبسط :-

$$\lim_{x \rightarrow 4} (8 - 2x) = 8 - 2 \times 4 = 8 - 8 = 0$$

، بالنسبة للمقام :-

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x}{8 - 2x} = \frac{12}{0} = \infty$$

وبذلك فإن الدالة ليس لها نهاية عند $x = 4$

مثال (١٧) أوجد

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + x - 6}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + x - 6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + x - 6}$$

الحل :-

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{(x-2)(x+3)}$$

ونهاية البسط يمكن حسابها على انفراد بسهولة وهي تساوى :-

$$2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5 = 8 - 6 + 5 = 7$$

ولإيجاد نهاية المقام :-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)(x+3) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \times \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+3) \\ &= (2-2)(2+3) = 0 \times 5 = 0 \end{aligned}$$

أى أن نهاية المقام = صفر ، وحيث أنه يقترب من الصفر من خلال القيم الموجبة $(x^+ : 2^+)$.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + x - 6} = \frac{7}{0} = +\infty$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{(x-2)(x+3)}$$

وكما سبق فى الجزء الأول (a) فإن نهاية البسط = 7

ولإيجاد نهاية المقام :-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2)(x+3) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) \times \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+3) \\ &= -(2-2)(2+3) = 0 \times 5 = 0 \end{aligned}$$

ويلاحظ أن نهاية المقام تساوى الصفر أيضاً ، ولكن حيث أن المقام يقترب من الصفر من خلال القيم السالبة $(x^- , 2^-)$:

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + x - 6} = (-\infty)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + x - 6} = (|\infty|)$$

مثال (١٨) أوجد قيمة

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x \sqrt{x-5}]$$

الحل :-

إذا إختبرنا قيمة الدالة بالتعويض المباشر عند $x=0$

$$\therefore x \sqrt{x-5} = 0 \quad \text{if } x=0$$

وعلى كل فإن هذه الدالة ليس لها قيم حقيقية لقيم x الأقل من 5 ولهذا وحيث أن x لا تقترب من الصفر فإن $f(x)$ لن تقترب من الصفر كذلك ولا توجد نهاية .

ويوضح هذا المثال أنه لا يمكننا إيجاد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

بإيجاد قيمة $f(a)$ حتى ولو كانوا متساويين في حالات كثيرة ، بل يجب أن نعتبر قيم

لـ x قريبة من (a) ولكنها لا تساوى a

مثال (١٩) أوجد

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan \theta)$$

الحل :-

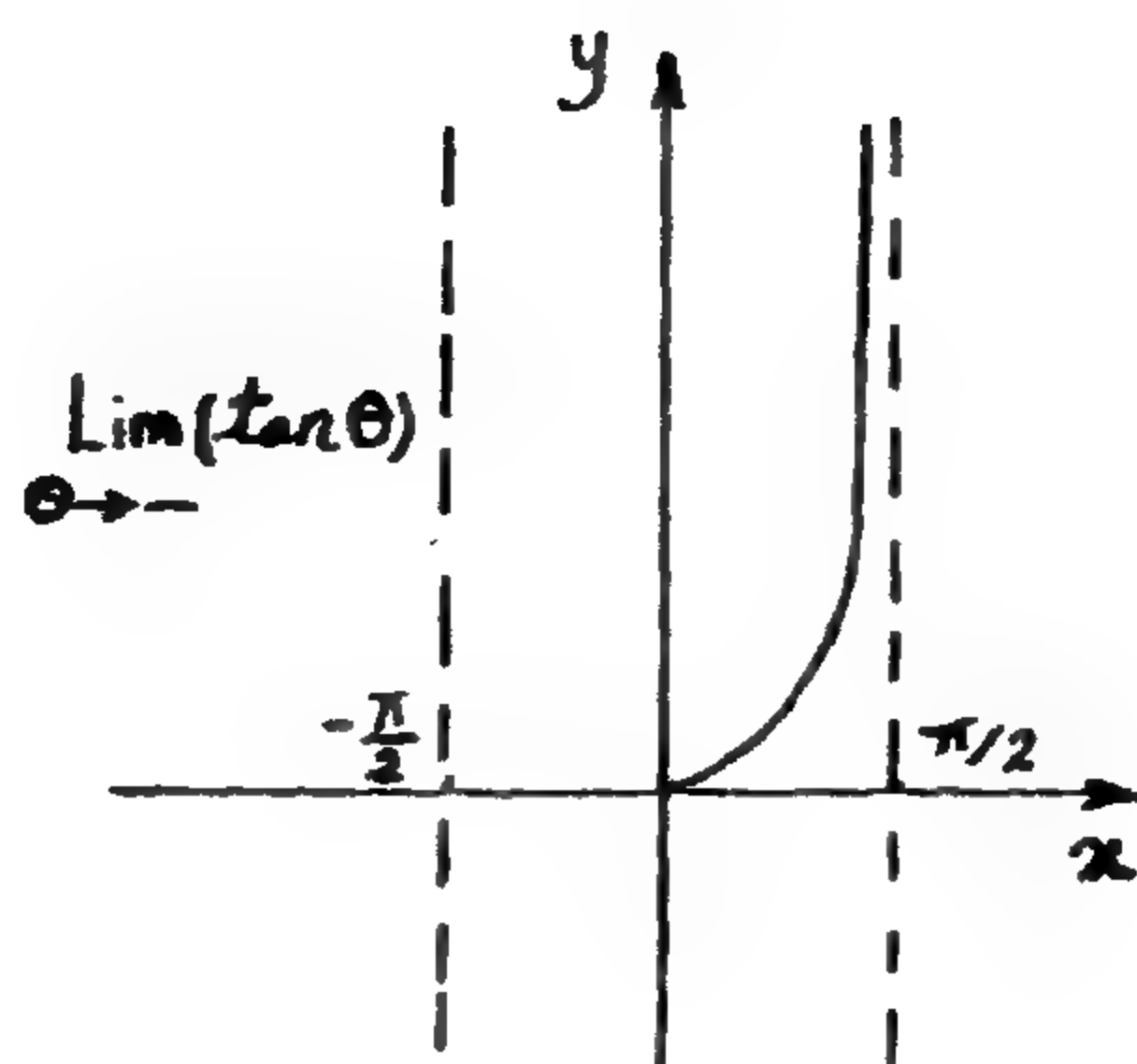
حيث أن θ تقترب من $\frac{\pi}{2}$ من جهة قيم θ الأقل من $\frac{\pi}{2}$ فإن :

$\tan \theta$ تزيد بدون حدود

ولكن عندما تقترب θ من $\frac{\pi}{2}$ من جهة قيم θ الأكبر من $\frac{\pi}{2}$ فإن $\tan \theta$ تتناقص

بدون حدود . ولهذا فإن $\tan \frac{\pi}{2}$ ليس لها نهاية ولا لها قيمة عددية .

أنظر الشكل (٣-٥)



شكل (٣-٥)

مثال (٢٠) أوجد

$$\lim_{x,y \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$$

الحل :-

سوف نتبع الخطوات المستخدمة في متغير واحد وبذلك :-

$$\lim_{y \rightarrow (0)} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{x^3}{x^3}$$

وعند $x \rightarrow 0$ فإن $\frac{x^3}{x^3} \rightarrow 1$ وهذا يوضح بجلاء أن النهاية المطلوبة تقترب من 1

وعلى كل ، لنعتبر الحالة العكسية حيث :-

$$\lim_{y \rightarrow (0)} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{-y^3}{y^3}$$

فعندما $y \rightarrow 0$ فإن $\frac{-y^3}{y^3} \rightarrow -1$

وهي نتيجة مختلفة كلية عن الحالة السابقة وبالتالي فإنه لا توجد نهاية لهذه المسألة .

مثال (٢١) إذا كانت f دالة تعريفها كالتالي :-

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{if } x \neq 4 \\ 5 & \text{if } x = 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

فأوجد

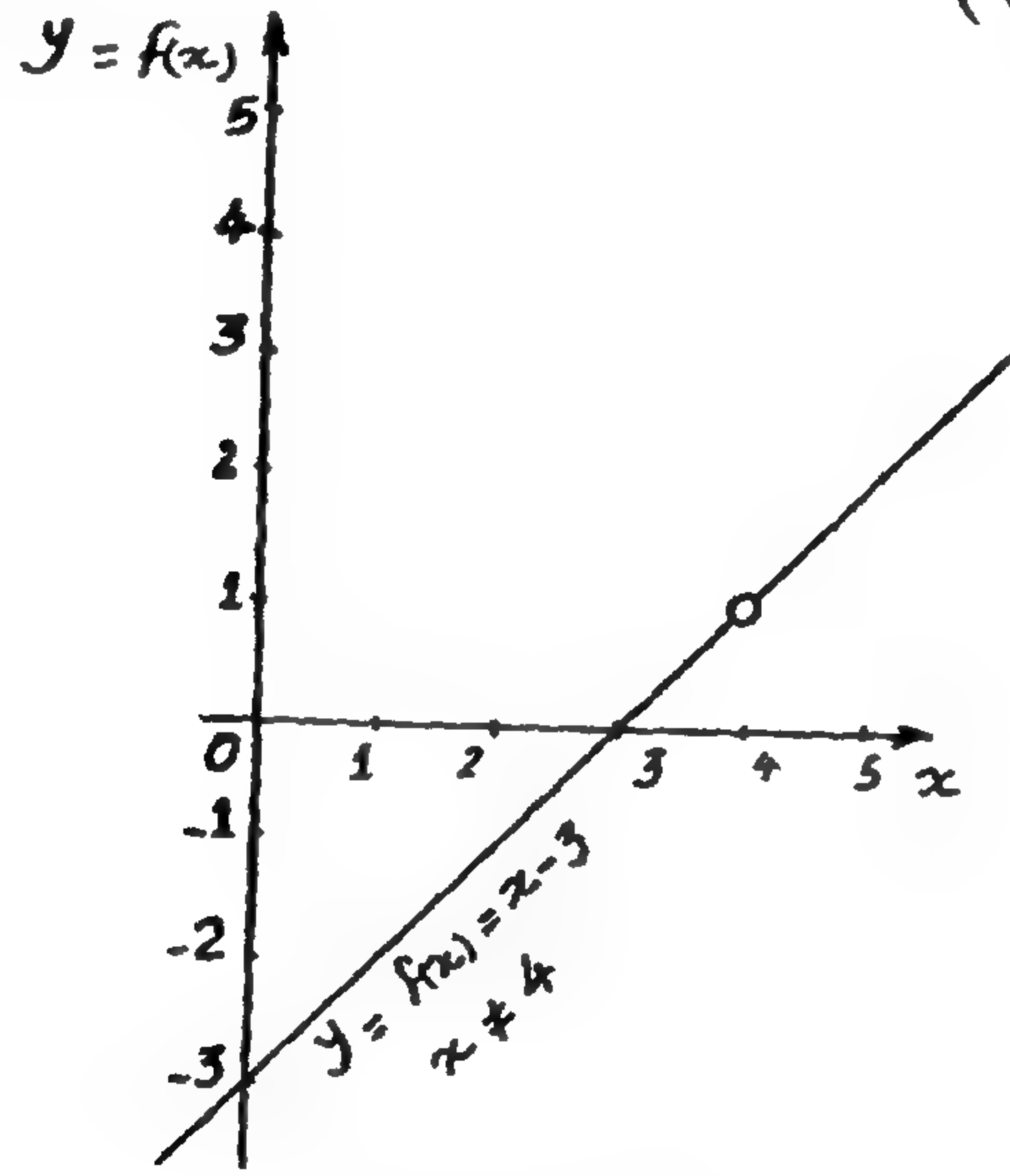
الحل :-

نرسم $f(x)$ لسهولة الإيضاح وسوف نجد أن : $f(x) = x - 3$ عبارة عن خط مستقيم لا يمر بالنقطة $x = 4$ وعند $x = 4$ فإن $f(x) = 5$ ولا تساوى (الواحد) وعلى كل؛ فعند تقدير قيمة $f(x)$ فسوف نعتبر قيم x القريبة من 4 ولكن لا تساوى 4

وبذلك فإن :

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x - 3) = 4 - 3 = 1$$

انظر الرسم شكل (٦-٣)



شكل (٦-٣)

وفى هذا المثال :

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1 \text{ but } f(4) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$$

ولذلك فإن :

مثال (٢٢) أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

والدالة مُعرفة كالتالى :

$$g(x) \begin{cases} |X| & \text{if } X \neq 0 \\ 2 & \text{if } X = 0 \end{cases}$$

الحل :-

يفضل هنا رسم الدالة ويلاحظ من الرسم أن الدالة غير متصلة عند $X = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-X) = 0$$

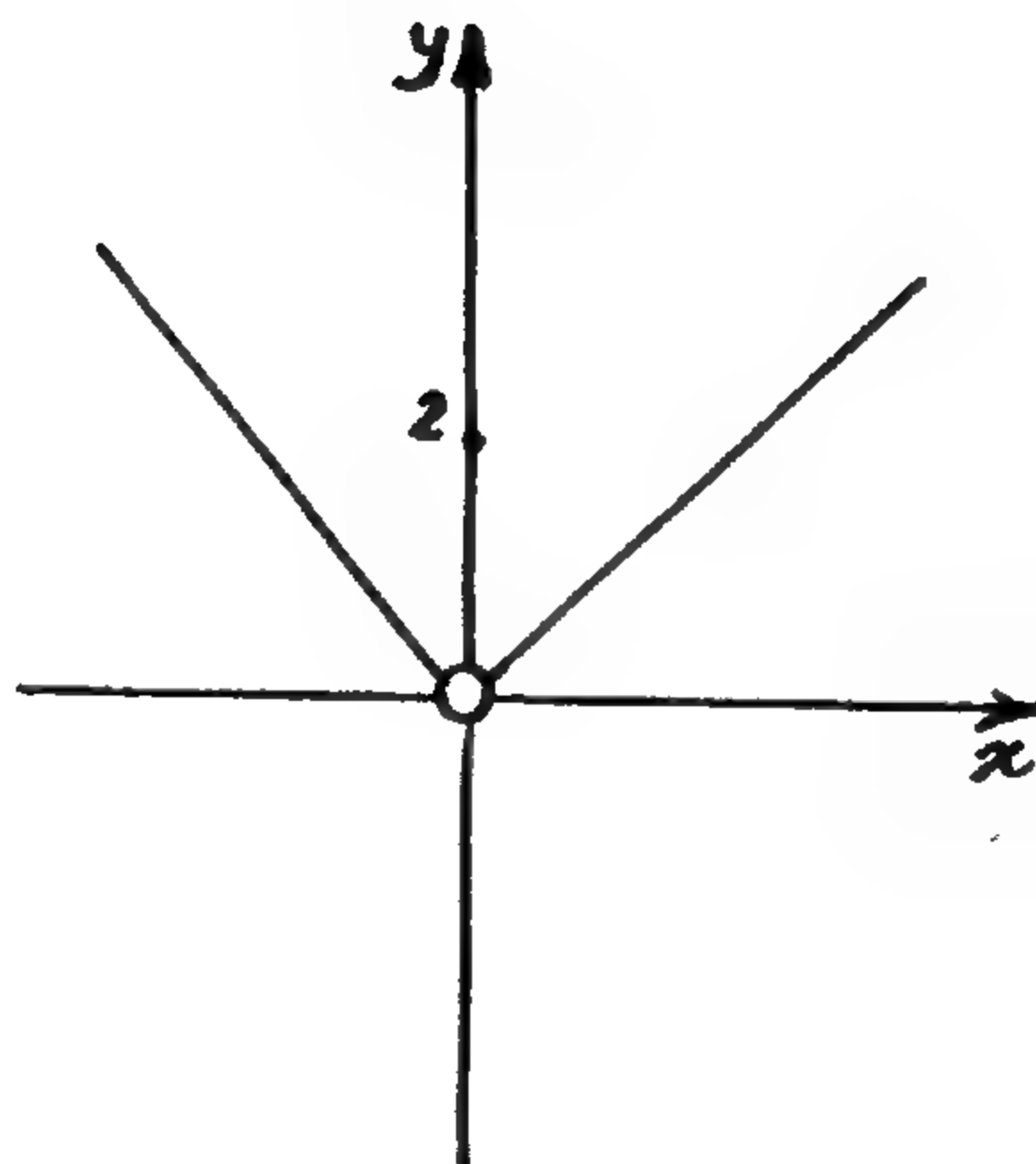
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (X) = 0$$

ولهذا فإن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ، موجودة وتساوى الصفر . كما يلاحظ أن $g(0) = 2$ ، إلا

أن هذا ليس له تأثير على $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

وبذلك فإنه ومن تعريف النهايات فإننا نعتبر قيم X القريبة جداً من الصفر ولكنها لا تساوى الصفر .

انظر الرسم شكل (٧-٣) .



شكل (٧-٣)

مثال (٢٣) أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{dx^2 + exy + fy^2} \right\} - \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{dx^2 + exy + fy^2} \right\}$$

$$, ad \neq 0$$

$$, cf \neq 0$$

الحل :-

يتم حل هذه المسألة على خمسة خطوات أساسية ، حيث يلزم تحديد النهايات بداخل

الأقواس ثم بخارج الأقواس ثم طرح المقدارين

وسوف نبدأ بإيجاد النهاية للمقدار الذى بداخل القوس الأول :-

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{dx^2 + exy + fy^2} \\ = \frac{ax^2 + bx \cdot 0 + c \cdot 0}{dx^2 + ex \cdot 0 + f \cdot 0} = \frac{ax^2}{dx^2} = \frac{a}{d} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{d} \right)$$

ثم نوجد النهاية بخارج القوس :

$$\frac{a}{d} \text{ وهى تساوى بالطبع } \frac{a}{d}$$

ويلاحظ أن المقدار $\frac{a}{d}$ مستقل عن x ، فعند اقتراب x من الصفر فإن قيمته تبقى

$\frac{a}{d}$ ، ويمكن تعريف الكسر $\frac{a}{d}$ ، فقط عندما $d \neq 0$ وحيث أنه من المسألة فإن

$$ad \neq 0 \text{ فإنه لا } a=0 \text{ ولا } d=0 \leftarrow d \neq 0$$

وبالتالى فإن $\frac{a}{d}$ تكون مُعرّفة .

ثم نوجد النهاية لما بداخل القوس الثانى ويتم حسابه بنفس الطريقة كما سبق :-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{dx^2 + exy + fy^2} \right\} \\ = \frac{a \cdot 0 + b \cdot 0 \cdot y + cy^2}{d \cdot 0 + e \cdot 0 \cdot y + fy^2} = \frac{cy^2}{fy^2} = \frac{c}{f} \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{c}{f} \right)$$

والخطوة الرابعة هى إيجاد

وهي تساوى بالطبع $\frac{c}{f}$ ويلاحظ أن $\frac{c}{f}$ مستقلة عن y ولا تعتمد عليها فعند اقتراب

y من الصفر ($y \rightarrow 0$) فإن النهاية تبقى $\frac{c}{f}$ وهي معرفة فقط عندما $f \neq 0$ وحيث أنه

$cf \neq 0$ لذلك فإنه لا $c=0$ ولا $f=0$

وبذلك فإن $f \neq 0$ ، $\frac{c}{f}$ تكون لذلك مُعرفة .

والخطوة الأخيرة هي أن نقوم بطرح النهايتين وتساوى :-

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{f}$$

مثال (٢٤) أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

الحل :-

$$\because 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\therefore \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \times \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{4 \left(\frac{x}{2} \right)^2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)} \right]^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

مثال (٢٥) أوجد

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

الحل :-

$\therefore \text{at } x \rightarrow \infty$

$$y = \frac{1}{x}$$

بوضع

$$y \rightarrow 0$$

فإن :

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

مثال (٢٦) أوجد

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \right)$$

الحل :-

$$\theta - \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

يلاحظ أنه عند

$$\therefore \sin \theta = \cos(90 - \theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\therefore \cos \theta = \sin(90 - \theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$y = \frac{\pi}{2} - \theta$$

لذلك سنعتبر

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \right\} = \lim_{\frac{\pi}{2} - \theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - \cos y}{\sin y} \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - \cos y}{\sin y} \left(\frac{1 + \cos y}{1 + \cos y} \right) \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - \cos^2 y}{\sin y (1 + \cos y)} \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin^2 y}{\sin y (1 + \cos y)} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{1 + \cos y} = \frac{\sin 0}{1 + \cos 0} = \frac{0}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

وهى نهاية هذه الدالة عند $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$

٣-٩ :- الكميات المتناهية فى الصفر ، المتكافئة

يقال لكميتين متناهيتين فى الصفر ، أنهما متكافئتان إذا كانت نهاية النسبة بينهما تساوى (واحد) .

فمثلاً الكميتان $\sin x$, x متناهيتان فى الصفر عندما تؤول x إلى الصفر $x \rightarrow 0$

كما أنهما متكافئتان لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (كما سبق)

وكذلك الكميتان $\sin 2x$, $2x$ متكافئتان ، x^2 ، $\sin^2 x$ متكافئتان كذلك .

مثال :- الكميتان $(a^3 + 2a^4)$, $(a^3 - 3a^4)$ متكافئتان عندما $a \rightarrow 0$

وذلك لأن :- $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^3 + 2a^4}{a^3 - 3a^4} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 + 2a}{1 - 3a} = \frac{1}{1} = 1$

ونرمز لتكافؤ كميتين متناهيتين فى الصفر بالرمز \sim الذى يعنى المساواة التقريبية (يساوى تقريباً) .

فمثلاً $a^3 + 2a^4 \sim a^3 - 3a^4$

$\sin^3 x \sim x^3$

$\sin 3x \sim 3x$

والكميات المتكافئة هى فى واقع الأمر كميات متساوية تقريباً ويكون التساوى أكثر دقة كلما اقتربت الكميات المتكافئة من الصفر .

فمثلاً عندما تكون $(a = 0.01)$ فإن الكمية $(a^3 + 2a^4)$ تساوى (202×10^{-8}) .

فى حين أن الكمية $(a^3 - 3a^4)$ تساوى (197×10^{-8}) والفرق بينهما $= 5 \times 10^{-8}$.

وهو يعادل حوالى 2.5% من إحدى الكميتين المتكافئتين . وكلما اقتربنا من الصفر كلما قلت هذه النسبة المئوية .

مثال (٢٧) أوجد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

الحل :-

نعوض بـ $2x$ بدلاً من $\sin 2x$ ككمية متكافئة عند $x \rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$$

مثال (٢٨) أوجد

الحل :-

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

مثال (٢٩) أوجد

الحل :-

$$\therefore 1 - \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\therefore \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \sim \left(\frac{x}{2} \right)^2$$

(كميات متكافئة)

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{x}{2} \right)^2}{x} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \\ &= \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

مثال (٣٠) أوجد

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (5x + 2)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 5x + 7)$$

الحل :-

حيث أن $5x + 2$ كثيرة حدود في x لذلك نعوض مباشرة عن قيمة $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x + 2 = 5 \times 2 + 2 = 12$$

حيث أن $x^2 - 5x + 7$ دالة كثيرة الحدود في x لذلك نعوض مباشرة عن قيمة $x = -2$

$$: x = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 5x + 7 = (-2)^2 - 5 \times (-2) + 7 = 4 + 10 + 7 = 21$$

مثال (٣١) أوجد

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-5}{x+1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-3x-1}{x^2-1}$$

الحل :-

(a) بالرجوع لنظريات النهايات :-

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-5}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (3x-5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)}$$

ويلاحظ أن كلاً من البسط والمقام دالة كثيرة الحدود

$$\begin{aligned} b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-3x-1}{x^2-1} &= \frac{(-2)^2-3(-2)-1}{(-2)^2-1} \\ &= \frac{4+6-1}{4-1} = \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

ومما سبق يمكننا أن نستنتج النتيجة الهامة التالية :-

إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود :

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [f(x)]^n$$

ويتضح ذلك من المثال التالي :-

مثال (٣٢) اوجد

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x-2)^3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} (x^2-3x-2)^{-3}$$

الحل :-

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x-2)^3 = (3 \times 2 - 2)^3 = 4^3 = 64$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 3x - 2)^{-3} = [(-2)^2 - 3 \times (-2) - 2]^{-3} = \\ = [4 + 6 - 2]^{-3} = 8^{-3} = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}$$

مثال (٣٣) أوجد

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x-2}{3x+4} \right)^3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 3x + 28}{x^4 - 2x^2 + 3} \right)^{\frac{3}{4}}$$

الحل :-

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x-2}{3x+4} \right)^3 = \left(\frac{-2}{4} \right)^3 = \left(\frac{-1}{2} \right)^3 = \frac{-1}{8}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 3x + 28}{x^4 - 2x^2 + 3} \right)^{3/4} = \left(\frac{1 + 3 \times 1 + 28}{1 - 2 \times 1 + 3} \right)^{3/4} = \left(\frac{32}{2} \right)^{3/4} \\ = (16)^{3/4} = (2^4)^{3/4} = 2^3 = 8$$

مثال (٣٤) أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

الحل :-

بالتعويض مباشرة نجد أن لهذه الدالة الكسرية نهاية $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهنا يلزم أن نوجد

معامل مشترك في كل من البسط والمقام ثم نختصره والعامل هنا هو $(x-2)$ ويتبقى لنا

بعد الاختصار دالة أخرى $g(x)$ حيث $g(x) = (x+2)$

$$, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

أما إذا حاولنا إيجاد قيمة $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ ووجدنا أنها تعطى الكمية غير المعينة $\frac{zero}{zero}$ فإنه

يلزم أن نختصر عامل مشترك من كل من البسط والمقام مرة ثانية ، كما يتضح فى المثال (٣٥) غير أن هذه المسألة يمكن حلها باستخدام القاعدة السابق ذكرها :-

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

والمسألة هى :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2}$$

ويمكن وضعها على الصورة :-

$$a = 2, \quad n = 2$$

حيث

$$2 \times 2^{2-1} = n a^{n-1}$$

والجواب هنا مباشرة يكون :

أى يساوى : $2 \times 2 = 4$ كما سبق .

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{x^2 - 4x^2 - 3x + 18}{x^2 - 6x + 9}$$

مثال (٣٥) أوجد

الحل :-

هذه دالة كسرية كثيرة الحدود وبالتعويض مباشرة عن قيمة $x = 3$ نجد أن النهاية تصبح على الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهى كمية غير معينة ولذلك نقوم بالتحليل لكل من البسط والمقام إلى عواملهما الأولية .

$$\therefore f(x) = \frac{(x-3)(x^2 - x - 6)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x^2 - x - 6}{x-3}, x \neq 3$$

والناتج عبارة عن دالة جديدة فى x : $g(x)$

$$g(x) = \frac{3^2 - 3 - 6}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

وقد عوضنا بقيمة $x = 3$ فى $g(x)$ فوجدنا أن النهاية ستكون على الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

لذلك يلزم أن نستخرج عامل مشترك آخر فى كل من البسط والمقام .

ويلاحظ أنه عبارة عن $(x-3)$ كذلك

$$\therefore g(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = x+2, x \neq 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

مثال (٣٦) : -

$$f(x) = 2x^3 - 5x$$

إذا كانت :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

فأوجد :

الحل :-

$$\therefore f(x) = 2x^3 - 5x$$

..... (1)

$$\therefore f(x+h) = 2(x+h)^3 - 5(x+h)$$

$$= 2[x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3] - 5x - 5h$$

..... (2)

وبطرح (2) من (1)

$$\therefore f(x+h) - f(x) = 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 5h$$

$$= h(6x^2 + 6xh + 2h^2 - 5)$$

$$\therefore \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 6x^2 + 6xh + 2h^2 - 5, h \neq 0$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x^2 + 6xh + 2h^2 - 5) =$$

$$= 6x^2 - 5$$

Exercise "1"

على النهايات

(١) (أ) حدد العدد الذى تقترب منه الدالة : $\frac{1}{x-1}$ عندما تزداد x بدون حدود .

(ب) قيم x التى تكون عندها الدالة سالبة .

(ج) حدد قيم الدالة عندما تكون قيم x كالتالى : -

$x: 3, 2.5, 2, 1.75, 1.5, 1.2, 1.1, 0.5, 0, -1, -2$

(د) نهاية الدالة عندما تقترب x من 1 .

(هـ) باستخدام قيم الدالة فى (ج) ، ارسم منحنى الدالة .

(٢) (أ) أوجد قيم الدالة $\frac{4x+1}{x}$ عندما تكون قيم x : -

$x: 10, 100, 1000, 1,000,000$

(ب) النهاية التى تقترب منها الدالة عندما تزيد قيمة x بدرجة كبيرة جداً .

(٣) أوجد قيمة : -

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x-1}$$

(أ) نهاية الدالة : -

(ب) نهاية الدالة عند اقتراب x من 1 + .

(٤) (أ) أوجد قيم الدالة : - $\frac{x^2-1}{x-1}$ عند قيم x التالية : -

$x: 10, 4, 2, 1.5, 1.1, 1.01$

(ب) أوجد نهاية : $\frac{x^2-1}{x-1}$ عند اقتراب x من الواحد .

(٥) أوجد نهاية الدالة $\frac{2x^2+1}{x^2-1}$ عندما تقترب x من اللانهاية .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$$

(٦) أوجد : -

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

(٧) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3x+1}$$

(٨) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x - 1}{10x^2 + 2x + 1} \quad (9) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} \quad (10) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 3}{5x - 3x^2 + 2x^3} \quad (11) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x-h} - \sqrt{x}}{h} \quad (12) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} \quad (13) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{3 \tan x} \quad (14) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \quad (15) \text{ أوجد : -}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1} \quad (16) \text{ أوجد : -}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2} \quad (17) \text{ أوجد : -}$$

إرشاد : - يمكن الحل بوضع $x = 2 + h$ أو بتحليل المقام لعاملاته .

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} \quad (18) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{\sin 2x} \quad (19) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} \quad (20) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad (21) \text{ أوجد : -}$$

إرشاد : افرض $x = n^6$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + mx} - 1}{x} \quad (22) \text{ أوجد : -}$$

إرشاد : إفرض $1+mx=n^3$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax} - x}{x - a} \quad (23) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+3x^{-1}}} \quad (24) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \quad (25) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-\tan x} - \sqrt{1+\tan x}}{\sin 2x} \quad (26) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x} \quad (27) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3} \quad (28) \text{ أوجد : -}$$

يمكن حل المسألة السابقة (27) والمسألة (28) بأي من الطريقتين التاليتين :
أ) القسمة على أكبر قوة لـ x بالمسألة .

ب) بفرض $x = \frac{1}{h}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1} \quad (29) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1} \quad (30) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{2n - 1} \quad (31) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad (32) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{1 - 2n} \quad (33) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{\sqrt{9n^4 + 1}} \quad (34) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 6}{x^3 + 8} \quad (35) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 4x + 1} \quad (36) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{5x^2}{1-x^2} + 2^{1/x} \right] \quad (37) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3} \quad (38) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}} \quad (39) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1} \quad (40) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi+0} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} \quad (41) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n} \quad (42) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} \quad (43) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin x} \quad (44) \text{ أوجد : -}$$

فيما يلي من مسائل تذكر أن :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

في حالة θ بالتقدير الدائري .

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{6x}{x} \quad (45) \text{ أوجد : -}$$

إرشاد : - بضرب البسط والمقام في 6 أو نعتبر $6h = \theta$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{x} \quad (46) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} \quad (47) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \sin x} \quad (48) \text{ أوجد : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

(٤٩) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2}$$

(٥٠) أوجد : -

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h}$$

(٥١) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

(٥٢) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

(٥٣) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$$

(٥٤) أوجد : -

إرشاد : - ضع $\tan^{-1} x = \theta$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin^{-1}(1-2x)}{4x^2 - 1}$$

(٥٥) أوجد : -

إرشاد : - ضع $\sin^{-1}(1-2x) = \theta$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$$

(٥٦) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2}$$

(٥٧) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \tan^2 x}{x \sin x}$$

(٥٨) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$$

(٥٩) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

(٦٠) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{\sec(x) - 1}$$

(٦١) أوجد : -

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{h}$$

(٦٢) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}$$

(٦٣) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 5x}$$

(٦٤) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[4]{1+2x} - 1}$$

(٦٥) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x} - 1}$$

(٦٦) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x - \pi}$$

(٦٧) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x}$$

(٦٨) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}$$

(٦٩) أوجد : -

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{1 - 5x}$$

(٧٠) أوجد : -

الباب الرابع

التغير ومعدل تغير الدالة ، والميل

change , rate of change of a function and gradients

رأينا فيما سبق أن الدالة تتغير قيمتها عندما يتغير المتغير الذى تعتمد عليه والسؤال المهم الآن هو كيفية حساب معدل التغير .

وما يهمنا هنا هو معدل التغير فى الدالة بالنسبة للتغير الحادث فى المتغير الذى تعتمد عليه .

وسوف نوضح هذا فيما يلى بمجموعة من الأمثلة مع مزيد من الإيضاح برسم الدوال المعنية .

٤ - ١ : - الحركة المنتظمة uniform motion

عندما يتحرك جسم بحيث يقطع مسافات متساوية فى فترات زمنية متساوية فإنه يقال أن الجسم يتحرك بانتظام .

فالمسافة دالة فى الزمن ومن التعريف الذى سبق لمعدل تغير الدالة فإن معدل التغير فى حالة الحركة المنتظمة يكون ثابتاً .

ولإيضاح ذلك نعتبر : -

S = المسافة التى يتحركها الجسم .

t = الزمن المستغرق لقطع هذه المسافة .

ومعروف من قوانين الحركة أن : -

$$S = Vt$$

حيث V = السرعة وهى ثابتة وهى المسافة المقطوعة فى كل ثانية .

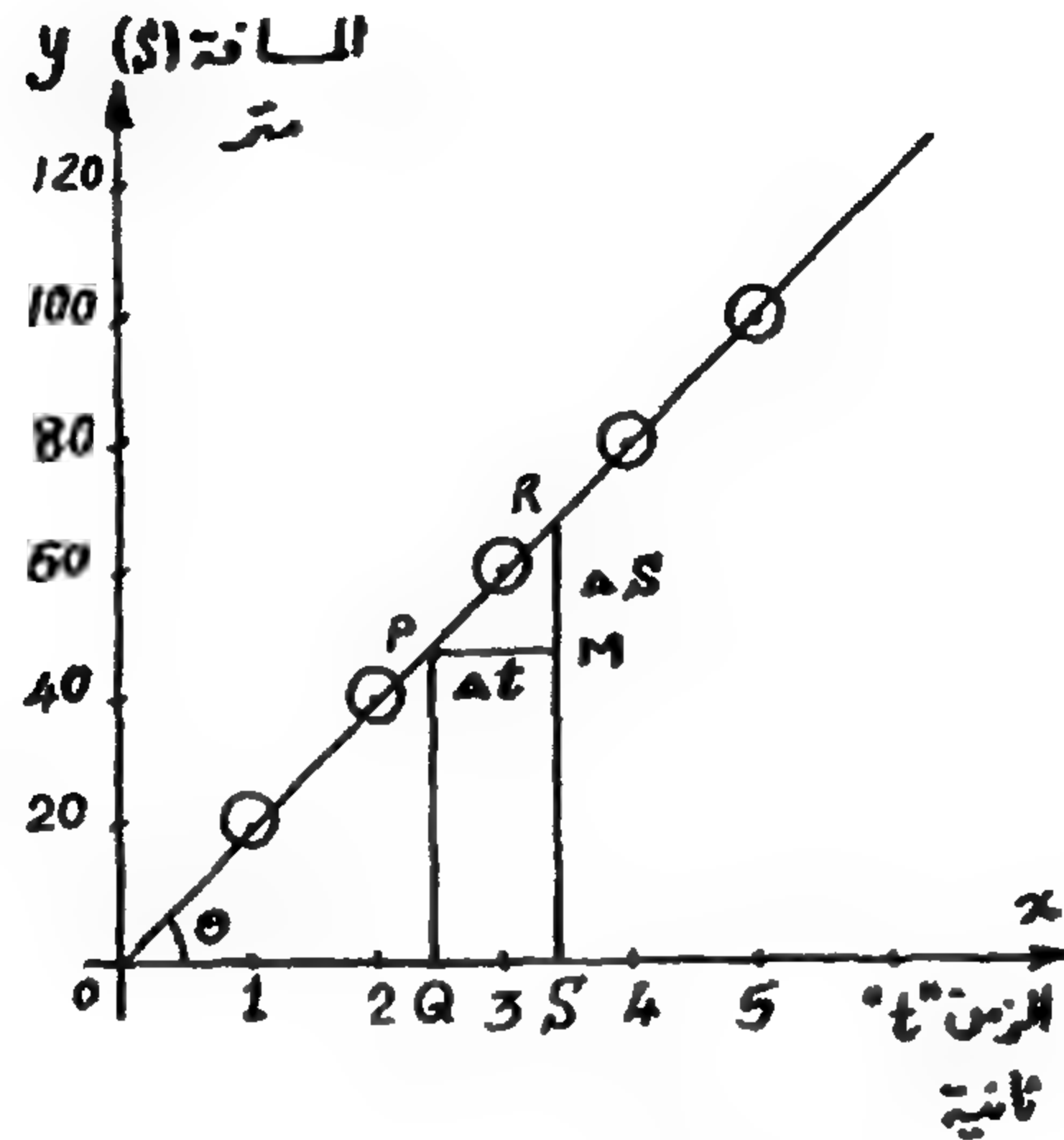
والنسبة بين المتغيرين S, t أى $\frac{S}{t}$ تكون ثابتة .

ولنعتبر المثال التالى الموضح بيانياً : -

سيارة تتحرك بحيث تقطع المسافات الموضحة بالجدول فى الأزمنة المقابلة قرين كل منها.

الزمن بالثانية t	1	2	3	4	5
المسافة بالمتر S	20	40	60	80	100

وقد حسبت هذه القراءات بدءاً من نقطة ثابتة على خط تحرك السيارة . وبتوقع هذه النقط بيانياً والتوصيل بينها نجد أنها تقع على خط مستقيم يمثل هذه العلاقة ، انظر شكل (٤-١) .



شكل (٤ - ١)

ولنعتبر كل من OQ , OS ، يمثلان فترتين زمنيتين (t) وينظر كل منهما المسافة PQ , RS .

$$\therefore \frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{OS}$$

وهي تعادل ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الأفقى .

وهذا صحيح بالنسبة لجميع أوضاع P, R ولذلك فإن الرسم عبارة عن خط مستقيم .

ولتكن θ هي الزاوية التي يصنعها هذا الخط مع OX

i.e $\angle POQ$

$$\therefore \frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{OS} = \tan \theta$$

$$\therefore \frac{PQ}{OQ}$$

يُمثل ميل الخط المستقيم

ولنعتبر PM مستقيم يوازي OX وهو يمثل الزيادة في الزمن ولتكن Δt

، RM يُمثل الزيادة في المسافة ولتكن ΔS

$$\therefore \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\text{المسافة في الزيادة في الزمن}}{\text{الزيادة في الزمن}}$$

$$\tan \theta = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \text{ميل الخط المستقيم}$$

وعلى ذلك فإنه لأي قيم مُناظرة لـ S أو t فإنه نسبة الزيادة في المسافة بالنسبة

للزيادة في الزمن تكون ثابتة وتساوى ميل الخط المستقيم

وفي مثالنا السابق للحركة المنتظمة فإن الميل يساوى :-

$$20 \text{ mS}^{-1} = \frac{20 \text{ m}}{1 \text{ S}}, \text{ وهي تعادل سرعة السيارة .}$$

٢-٤ :- ميل الدالة الخطية Gradient of a linear function

يمكننا تعميم ما سبق كالتالى :-

لتكن y دالة في (x) أى : $y = f(x)$

والخط المستقيم الذى يمثل الدالة قد يكون فى إحدى الصورتين التاليتين :-

$$(١) \dots\dots\dots y = mx$$

وهى تُمثل خط مستقيم يمر بنقطة الأصل فإذا كانت Δy تُمثل الزيادة في y ، Δx تمثل الزيادة في x

فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تكون ثابتة . وتمثل ميل الخط المستقيم وهذا الميل يُمثل بـ " m "

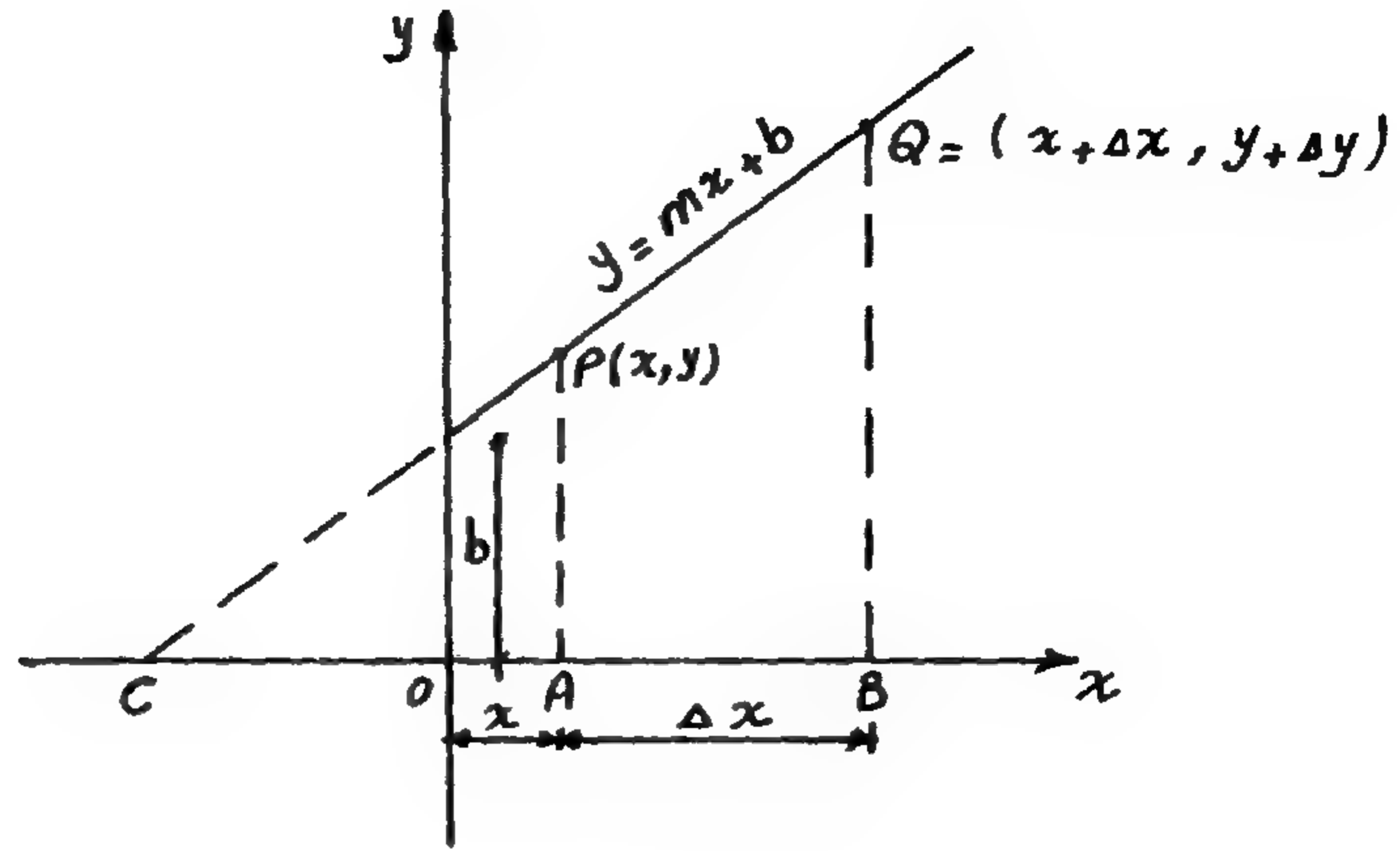
$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

وتمثل m مُعدل الزيادة في y بالنسبة إلى x

$$(٢) \dots\dots\dots y = mx + b$$

وهى تُمثل خط مستقيم لا يمر بنقطة الأصل ولكنه يقطع مسافة b من محور y .

أنظر شكل (٢-٤)



شكل (٤-٢)

وفي الشكل ، ليكن CPQ خط مستقيم معادلته $y = mx + b$

ولتكن θ هي الزاوية التي يصنعها المستقيم مع OX

ولتكن P نقطة على هذا الخط وإحداثياتها (x, y)

i.e $OA = x$, $PA = y$

فإذا ما ازدادت x بمقدار Δx من OA إلى OB ، وازدادت y بمقدار Δy من AP

إلى BQ

وبرسم PR موازياً للمحور OX

∴ تكون إحداثيات Q $(x + \Delta x, y + \Delta y)$

i.e $OB = x + \Delta x$, $QB = y + \Delta y$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة :

$$y = mx + b \quad \dots\dots (1)$$

$$\therefore y + \Delta y = m(x + \Delta x) + b \quad \dots\dots (2)$$

وبطرح (1) من (2)

$$\therefore \Delta y = m(\Delta x)$$

$$\therefore m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan QCB = \tan PCA = \tan \theta$$

Gradient of the line : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ أى أن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تمثل ميل المستقيم :

ومن الواضح أن إضافة الثابت b للطرف الأيمن فى المعادلة لن يؤثر فى الميل ، ففى كل

$$y = mx + b \quad , \quad y = mx$$

فإن الميل ثابت ويساوى m ويتوازى المستقيمان عند أى قيم تأخذها m

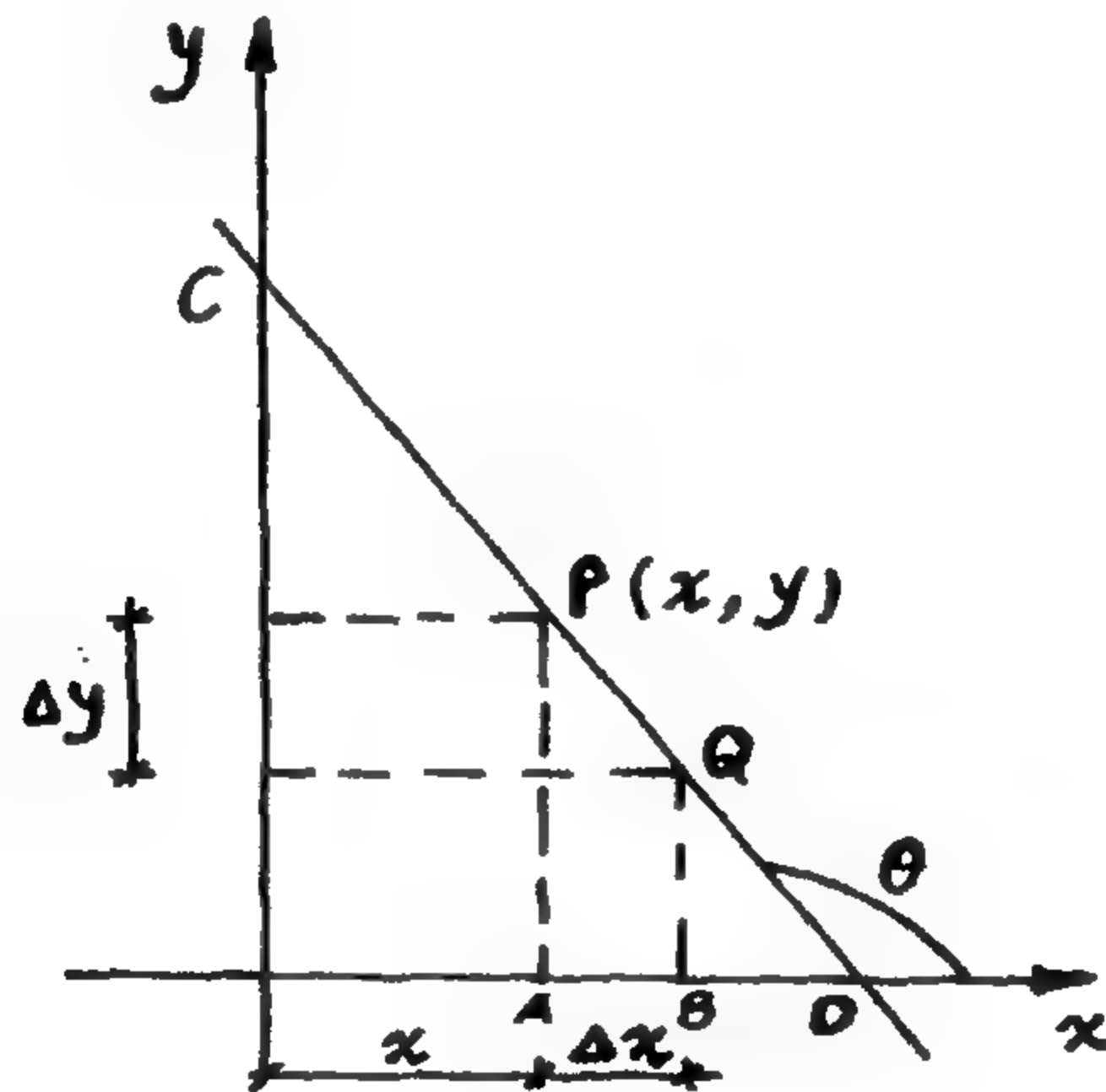
٣-٤ : - الميل السالب Negative gradient

تُقاس الزاوية التى يصنعها الخط المستقيم مع محور OX ، دائماً فى الإتجاه العكسى

لإتجاه دوران عقارب الساعة anti-clockwise

فعندما تكون هذه الزاوية أكبر من 90° ، أى من الزاوية القائمة كما فى حالة زاوية θ

التي يصنعها المستقيم CD بالشكل (٣-٤) ، فإن الميل يكون سالباً .



شكل (٣-٤)

فإذا كانت P هى النقطة التى إحداثياتها (x, y)

$$\therefore OA = X \quad , \quad AP = Y$$

فإذا ما ازدادت X بمقدار Δx فى إتجاه OB ، فإن الإحداثى الرأسى للنقطة Q

هو QB

وبرسم المستقيم RQ موازياً OX ، سنجد أنه عند حركة النقطة من A إلى B فإن

الإحداثى الأفقى (السينى) سيزداد بمقدار Δx بينما يتناقص الإحداثى الرأسى (الصادى)

بمقدار ΔY (من PA إلى QB)

ويعبر عن هذا بأنها زيادة سالبة (أو نقص)

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{negative} (-ve)$$

$$\therefore \tan \theta = (-ve) , \quad \text{كذلك}$$

وبذلك فإن معدل زيادة y بالنسبة إلى x ، يكون سالباً ويمكن تلخيص ما سبق ، كما يلي :-

(١) إذا ازدادت y نتيجة لزيادة x فإن الميل يكون موجباً

(٢) إذا نقصت y نتيجة لزيادة x فإن الميل يكون سالباً .

٤-٤ :- ميل المنحنى Gradient of a curve

نعلم أن الخط المستقيم ، هو الرسم البياني المعبر عن أى دالة من الدرجة الأولى ويكون ميله ثابتاً عند كل نقط المستقيم

أما إذا كان الرسم البياني عبارة عن منحنى فإن الميل يكون مختلفاً عند كل نقطة من نقط المنحنى ولذلك فإنه لا يلاحظ معنى الميل على المنحنى حيث أنه يتغير باستمرار ، وسوف نقوم بإيضاح ذلك فيما يلي بشئ من التفصيل :-

المنحنى البياني لحركة جسم بسرعة متزايدة بانتظام :-

Body moving with uniformly increasing velocity

سبق أن بينا أن الرسم البياني الذي يصل بين المسافات والأزمنة المناظرة لجسم يتحرك بسرعة ثابتة عبارة عن خط مستقيم

وسوف نعتبر هنا أن الجسم يتحرك بسرعة تزايدية منتظمة أى أنه فى الأزمنة المتساوية فإن سرعته تزداد بنفس المقدار

وهذا يعنى أنه فى الأزمنة المتساوية فإن المسافات المناظرة المقطوعة تكون غير متساوية . وذلك لأنه كلما زادت السرعة فإن المسافة المقطوعة كذلك تزداد

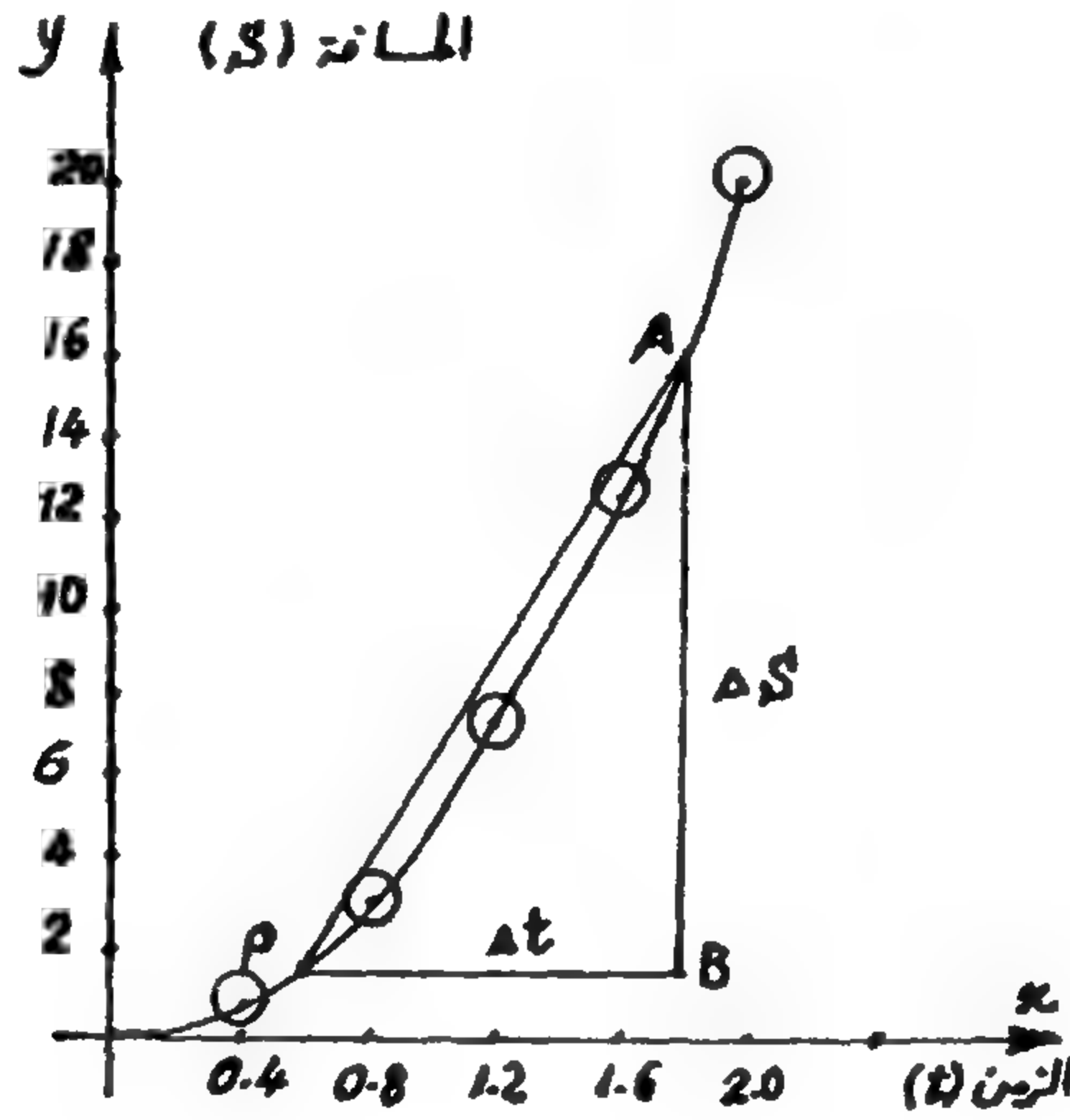
وكلما زادت السرعة ، زادت المسافة المقطوعة.

والمثال البسيط لإيضاح ذلك ، هو الجسم الساقط فسرعته تزداد بمرور الزمن

والجدول التالى يبين المسافات المقطوعة فى الفترات الزمنية المبينة لجسم يسقط سقوطاً حراً من وضع السكون

الزمن t بالثانية	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
المسافة S بالمتر	0	0.8	3.2	7.2	12.8	20.0

وبرسم هذه البيانات ، بيانياً ينتج لنا منحنى كما هو مبين بالشكل (٤-٤)



شكل (٤-٤)

وواضح أن المنحنى يميل أكثر فأكثر بانتظام مع زيادة الوقت ، أى أن نسبة المسافة للزمن تزداد أو أن السرعة تزداد .

ويعنى الشكل الإنسيابى للمنحنى أن ازدياد السرعة ثابت ولنعتبر نسبة الزيادة فيما بين المسافة والزمن فى خمسة فترات زمنية كما هو موضح بالجدول التالى :

الفترة الزمنية بالثانية	0 to 0.4	0.4 to 0.8	0.8 to 1.2	1.2 to 1.6	1.6 to 2.0
المسافة بالمتر	0.8	2.4	4.0	5.6	7.2
المسافة ÷ الزمن	2	6	10	14	18

وتبين هذه النسب مُعدل السرعات للفترات المناظرة ويجب ملاحظة أن ميل الأوتار التي تصل بين النقط المتتالية على المنحنى يكون مساوياً لمعدلات السرعات .
 فإذا ما أخذنا نقطة P على المنحنى ورسمنا منها وترًا يقطع المنحنى عند نقطة A .
 ثم نرسم الإحداثي AB الذي يلاقى المستقيم PB المرسوم موازياً لمحور الإحداثيات السيني OX عند B

ولنفترض زيادة في الزمن قدرها Δt فيما بين نقطتين P, B أي أن $PB = \Delta t$

ومن الرسم فإن التغير في المسافة بين النقطتين ، يقابل المسافة $AB = \Delta S$

∴ معدل السرعة خلال هذه المرحلة = $\frac{\Delta S}{\Delta t}$. وهو يعادل ميل الوتر PA .

فإذا ما تناقصت الفترة الزمنية Δt فإن المسافة المناظرة لها ΔS تتناقص كذلك ، إلا أن النسبة بينهما لا تزال تعنى معدل السرعة خلال الفترة الزمنية . وتعنى كذلك ميل الوتر

PA والذي يتناقص طوله ويتلاشى تدريجياً بتناقص كل من $\Delta S, \Delta t$

فإذا ما تخيلنا أن الفترة الزمنية قد تناقصت بلا حدود إلى حد متناهى في الصغر فإن ΔS تتناقص كذلك لقيمة متناهية في الصغر.

وعندما تصبح A قريبة جداً من P أي منطبقة عليها فإن النسبة $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ تصبح قريبة جداً

من قيمة محددة ويصبح الوتر PA مماساً للمنحنى عند P ، والنهائية التي تصل إليها

النسبة $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ تكون عبارة عن ميل هذا المماس .

وهي تعنى كذلك ، السرعة عند P

وبذلك فإن السرعة عند نقطة ما هي نهاية النسبة $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ، عندما يُصبح كل من حدى النسبة صغيراً صغراً متناهياً . وهي أيضاً ؛ أى السرعة تعنى فى ذات الوقت ميل المماس للمنحنى عند نقطة P . وبذلك فإن ميل المنحنى عند أى نقطة على المنحنى يكون مساوياً لميل المماس للمنحنى والمرسوم عند هذه النقطة .

وفى الشكل السابق ، نرسم PQ مماساً للمنحنى عند نقطة P ، PR بطول يعادل الوحدة موازياً للمحور OX ومن R نرسم RS عمودياً على PR ويلقى PQ فى S والزاوية التى يصنعها PQ مع OX $\theta = \angle QPR$.

$$\text{وميل } PQ :- \frac{SR}{RP} = \frac{10}{1} = 10$$

∴ السرعة عند نقطة P = ميل المماس عند P وتساوى $10 \text{ m/s} = 10 \text{ ms}^{-1}$.

أى أن السرعة عند نهاية ثانية واحدة = 10 m/s .

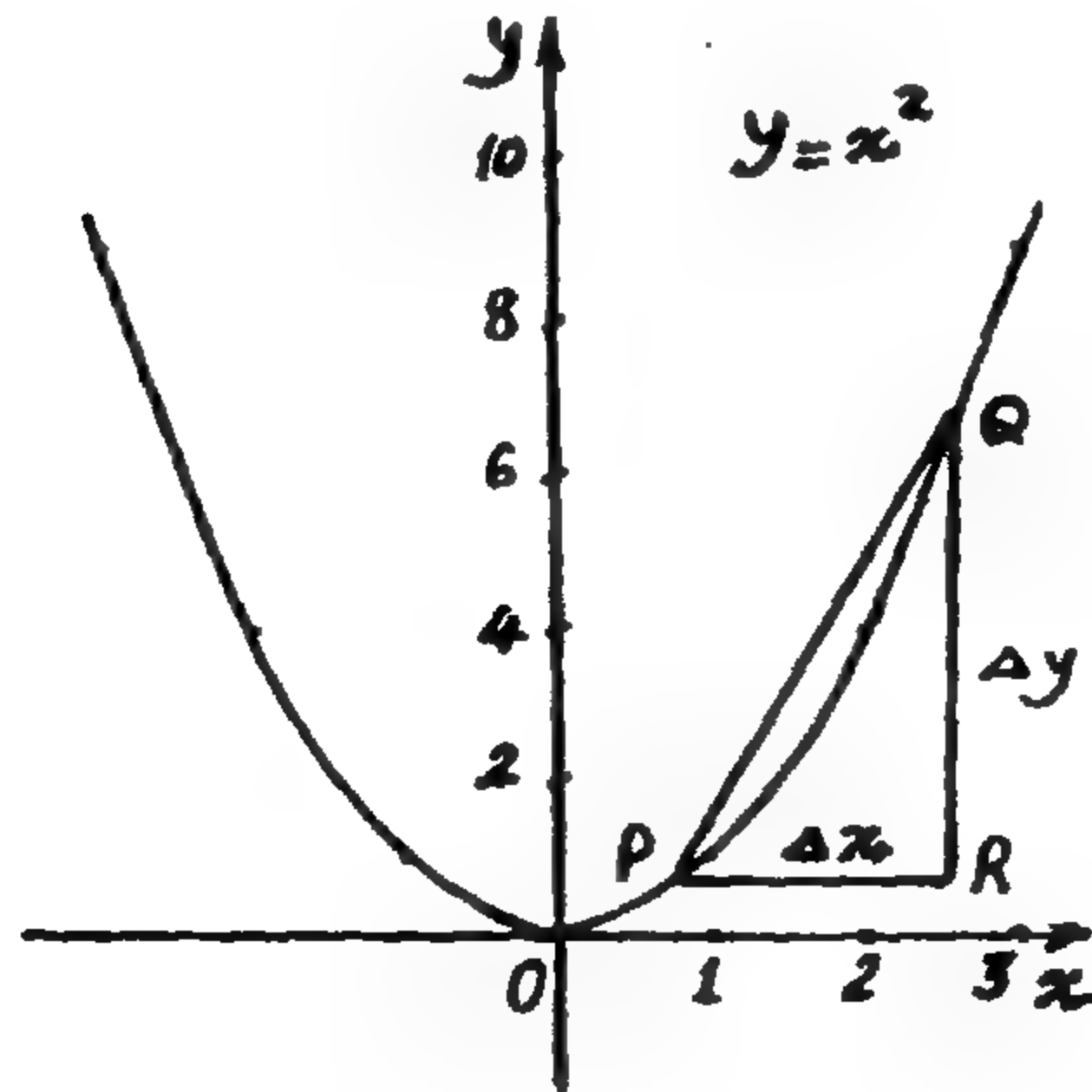
ويمكن للطالب الماهر إثبات أن الإجابة حوالى (9.8 m/s) .

ميل المنحنى $y = x^2$:-

يعتبر المنحنى $y = x^2$ من الأمثلة الشائعة والبسيطة للدوال الجبرية وهو من سلسلة المنحنيات $y = ax^2$ وللتبسيط سنعتبر $a = 1$ والطرق المتبعة هنا فى مثالنا $y = x^2$ يمكن

تطبيقها لأى منحنى حيث $a \neq 1$ [أى لأى قيمة لـ a]

والشكل التالى يوضح هذا المنحنى $y = x^2$ ، شكل (٥-٤)



شكل (٥-٤)

، لتكن P هي النقطة $(1, 1)$ ثم نرسم الوتر PQ الذى يقطع المنحنى Q
 ثم نرسم PR موازياً للمحور OX ليلاقى الرأسى من Q فى R ولتكن PR ، تمثل
 الزيادة فى X فيما بين P, Q أى $\Delta x =$

ولتكن QR ، تمثل الزيادة فى Y فيما بين P, Q أى $\Delta y =$

$$\therefore \text{ميل الوتر } PQ = \text{ظل الزاوية } QPR = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

وكذلك فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تساوى معدل الزيادة فى y لكل زيادة بمقدار الوحدة فى x فيما

بين P, Q ، والآن :-

$$\text{الدالة : } y = x^2 \quad (1) \dots\dots\dots$$

وعندما تزداد x بمقدار Δx ، تزداد y بمقدار Δy كزيادة مناظرة :-

$$\therefore y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \quad (2) \dots\dots\dots$$

بطرح (1) من (2) :

$$\therefore \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

$$\therefore \Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

وبالقسمة على Δx :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

ومن ذلك فإن قيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يمكن حسابها لأى قيمة Δx عند أى نقطة على المنحنى حيث

تكون قيمة X معروفة .

وبذلك فإنه عندما $x=1$ كما هو الحال فى النقطة P على المنحنى السابق فإن :-

$$\text{if } \Delta x = 0.3 , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \times 1 + 0.3 = 2.3$$

$$\text{if } \Delta x = 0.2 , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.2 = 2.2$$

$$\text{if } \Delta x = 0.1 , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.1 = 2.1$$

$$\text{if } \Delta x = 0.01 , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.01 = 2.01$$

$$\text{if } \Delta x = 0.001, \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.001 = 2.001$$

$$\text{if } \Delta x = 0.0001, \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.0001 = 2.0001$$

وهذه القيم توضح ميل الوتر PQ عندما تتلاشى Δx وتحرك Q قريباً من P ومن الواضح أن ميل الوتر يقترب من 2 ويمكننا أن نستنتج أنه عندما تتحرك Q للإنطباق على P ويصبح الوتر مماساً للمنحنى عند P ، فإن ميل المماس $= 2$.

أى أن معدل الزيادة فى y بالنسبة لوحدة الزيادة فى x عند النقطة $P = 2$. ويمكن الوصول إلى نفس النتائج لأى نقطة على المنحنى، إلا أن ميل كل مماس يعتمد على قيمة x عند النقطة المقام منها المماس.

وبذلك سنجد أن الميل عبارة عن دالة فى x .

فمثلاً عند نقطة على المنحنى، إحداثيتها السينية $x = 3$ ، نجد أن ميل المماس سيكون مساوياً لـ 6: $[2x = 2 \times 3 = 6]$

[وبذلك فإن الميل عند أى نقطة على منحنى، يمثل دالة ويكون مساوياً لميل المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقطة]

وهو أيضاً عبارة عن معدل زيادة الدالة لقيمة x عند هذه النقطة.

الميل السالب :- Negative gradient

فى الشكل السابق (٤-٥)، نعتبر النقطة S على المنحنى ولها إحداثى سيني سالب، نرسم مماس للمنحنى ونمده حتى يلاقى المحور XO ، سنجد أن الزاوية التى يصنعها هذا المماس أكبر من 90° وبالتالى فإن الميل سالب (كما سبق ذكر الميل السالب للخط المستقيم). وهذا يعنى أن معدل الزيادة فى الدالة سالب أى أن الدالة تتناقص وبدراسة المنحنى، نجد أنه بزيادة x خلال القيم السالبة لها من $(-\infty \leftarrow 0)$ فإن الدالة الممثلة بالمنحنى، تتناقص من $(+\infty \leftarrow 0)$ عند نقطة الأصل.

وعند هذه النقطة، وهى نقطة الأصل، يكون OX مماساً للمنحنى وميل المنحنى يصبح مساوياً لميل محور السينات وهو يساوى الصفر.

Exercise 2

- (١) ارسم الخط المستقيم : $3x - 2y = 6$ ثم أوجد ميله وإذا كانت P, Q نقطتان على هذا المستقيم بحيث أن قيمة x عند Q أكبر من قيمة x عند P بمقدار 0.8 ، فبكم تزيد قيمة y عند Q عن قيمتها عند P
- (٢) أوجد ميل المستقيمات التالية :-

a) $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 2$

b) $3x + 4y = 12$

c) $\frac{x}{a} + \frac{2y}{b} = 3$

d) $2x - 3y = 0$

- (٣) إذا كان ميل أحد المستقيمات هو 1.5 وكان يمر بالنقطة (2 , 4) فأوجد معادلته .
- (٤) إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم يسقط سقوطاً حراً من وضع السكون تكون طبقاً للعلاقة التالية ، التقريبية :-

$$S = 4.9t^2$$

وباعتبار الزيادة في الزمن Δt والزيادة المناظرة في المسافة ΔS ، فأوجد بالطرق السابق دراستها في هذا الموضوع ، صيغة رياضية لـ ΔS بدلالة Δt لأي قيمة لـ t .

ومن ثم أوجد $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ومنها إحسب معدل السرعة للفترات الزمنية التالية :-

(1) $2S$ to $2.2S$

(2) $2S$ to $2.1S$

(3) $2S$ to $2.01S$

(4) $2S$ to $2.001S$

ومن هذه النتائج استنتج السرعة عند نهاية ثانيتين .

- (٥) في المنحنى الذى معادلته $y = x^2$ وباستخدام نفس الرموز المتقدمه فى الشرح لهذا الموضوع ، أوجد قيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما تزيد قيمة x من 3 إلى :-

3.0001 , 3.001 , 3.01 , 3.1 على الترتيب

ثم استنتج ميل المماس للمنحنى عند النقطة التى إحداثيها السينى $3 =$

(٦) ارسم المنحنى الذى معادلته $y = x^3$ لقيم x فيما بين $-2, 0$

ثم أوجد صيغة لـ Δy بدلالة Δx , x ثم أوجد صيغة لـ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

ثم أوجد ميل المماس للمنحنى عند النقطة التى فيها $x = 2$ ، أكد صحة الإجابة برسم المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٧) الدالة : $y = \frac{1}{x}$ تمثل قطع زائد ، أوجد صيغة لـ Δy بدلالة Δx , x ثم أوجد

صيغة لـ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وباعتبار قيم x :- $1.1, 1.01, 1.001, 1.0001$

فأوجد النهاية التى تقترب منها $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عند اقتراب x من الواحد الصحيح

ثم أوجد الميل وزاوية ميل المنحنى عند نقطة $x = 1$ ، وأكد صحة الإجابة برسم المنحنى والمماس له عند هذه النقطة

(٨) أوجد ميل المماس للمنحنيات التالية ، عند $x = 1$:-

a) $y = 3x^2 - 2$

b) $y = 2x^2 + 5$

c) $y = x^3 + 3$

(٩) أوجد ميل المماس للمنحنيات التالية عند $x = 3$:-

a) $y = 2x^2 - 11$

b) $y = 3x^2 + 2$

c) $y = 5x^2 - 7$

الباب الخامس

المعامل التفاضلى ، والتفاضل

Differential Coefficient , Differential

٥ - ١ : تقديم

علمنا مما سبق أن التغير Δx فى المتغير المستقل x يناظره تغير Δy فى المتغير التابع y .

$$\text{وأن معدل التغير} = \frac{\text{قيمة التغير فى } y}{\text{قيمة التغير فى } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وأن قيمة الدالة تتغير بتغير المتغير المستقل بها .

ومعدل التغير له أهمية تطبيقية كبيرة ولذلك يجب الإلمام بطرق حسابه .

كما وأن معدل التغير سواء كان بالزيادة أو النقصان ، يمكن حسابه هندسياً كما يلى :-
(أ) عندما تكون الدالة من الدرجة الأولى ، فإن مثل هذه الدوال يكون تمثيلها بيانياً بخط مستقيم ويكون ميل هذا الخط مساوياً لمعدل تغير الدالة .

فإذا كانت y دالة فى x ، Δx ، Δy هو مقدار التغير فى x ، y فإن الميل يكون مساوياً لـ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ويكون ثابتاً على طول الخط المستقيم ويكون معدل التغير منتظماً .

(ب) إذا لم تكن الدالة من الدرجة الأولى فإن رسمها البيانى يكون على شكل منحنى ويكون معدل تغير الدالة مختلفاً على طول المنحنى وتكون قيمته عند أى نقطة مساوية لميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة .

وبالرغم من أن الرسم يساعد كثيراً فى إيضاح الموضوع ، إلا أنه من الناحية العملية ، يصعب إيجاد الميل بهذه الطريقة لعدم توفر الدقة التامة .

ولذلك كان لزاماً من استنباط طريقة جبرية لهذه الحالة .

ولنأخذ مثالنا السابق : (1)

$$y = x^2$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \quad (2) \dots\dots\dots$$

وبطرح (1) من (2)

$$\begin{aligned}\therefore \Delta y &= (x + \Delta x)^2 - x^2 \\ &= 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x \quad \dots\dots\dots (3)$$

وقد رأينا من رسم الدالة ، أنه عندما تقترب Δx من الصفر فإن ميل الوتر والذي يُمثل معدل الزيادة في الدالة خلال الفترة Δx ، يقترب تدريجياً من ميل المماس عند النقطة المعنية .

وبذلك فإن ميل المماس والذي يمكن تمثيله بـ : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، يكون مساوياً لمعدل زيادة الدالة عند النقطة x المعنية ، ومن الدالة (3) : -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x \quad \dots\dots\dots (3)$$

وعندما $\Delta x \rightarrow 0$ فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تقترب من $2x$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \quad \dots\dots\dots (4)$$

أى أنه عندما $\Delta x \rightarrow 0$ فإن نهاية $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، تُمثل معدل الزيادة في y بالنسبة لـ x لـ أى قيمة لـ x

فمثلاً عندما $x=1$ فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ وهذا يعنى أن معدل الزيادة في y أو في x^2 بالنسبة إلى $x=2$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4 \quad \text{وعند } x=2 \text{ فإن : -}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6 \quad \text{وعند } x=3 \text{ فإن : -}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \quad \text{وبذلك فإنه يمكن كتابة المعادلة } B \text{ كالتالى : -}$$

ويُستغنى عن هذا التعبير رياضياً بكتابته $\frac{dy}{dx}$.

أى أن الاصطلاح $\frac{dy}{dx}$ بدلاً من كتابة $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ حيث يتم استخدام الحرف الأبجدي

الإنجليزي d بدلاً من الحرف الأبجدي اليوناني δ [دلتا δ Greek]

وبذلك فإن المعادلة (4) تُصبح : $\frac{dy}{dx} = 2x$

ويُطلق على هذه النهاية أو على $\frac{dy}{dx}$ بالمعامل التفاضلي differential Coefficient

للدالة بالنسبة إلى المتغير المستقل x

وبنفس الطريقة يمكن حساب المعامل التفاضلي لأي دالة أخرى ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلي : -

(١) إذا كانت y دالة متصلة في x وكانت Δx تعادل مقدار التغير في قيمة x فإنه يكون هنالك تغير مناظر زيادة أو نقصان في قيمة الدالة y ويُعادل Δy .

(٢) تمثل النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ معدل التغير في y بالنسبة إلى x عندما تزيد x إلى $x + \Delta x$.

(٣) حيث أن y دالة متصلة في x فإنه عندما تصغر Δx بدون حد ، فإن Δy تصغر كذلك بدون حد .

(٤) عندما $\Delta x \rightarrow 0$ فإن النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تقترب من نهاية محددة .

ويُطلق على هذه النهاية المحددة بالمعامل التفاضلي لـ y بالنسبة إلى x ويرمز له بالرمز

$$\frac{dy}{dx} \text{ أى : } - \quad i.e. \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

ويهتم حساب التفاضل أساساً بالتغيرات في الدوال ويمكننا اعتبار المعامل التفاضلي كمقياس لمعدل هذه التغيرات .

فهو يقيس المعدل الذى تتغير به قيمة الدالة مقارنة بالمتغير المستقل بالدالة .

فالدالة $y = x^2$ يكون المعامل التفاضلي لها : $\frac{dy}{dx} = 2x$

فعند $x = 4$ فإن y أو x^2 تتغير قيمتها بمقدار ثمانية أضعاف معدل التغير في x

$$[2x = 2 \times 4 = 8]$$

والعامل التفاضلى $\frac{dy}{dx}$ يُطلق عليه أيضاً بمشتقة y (derivative of y) بالنسبة إلى x

أو بالدالة المشتقة (derived function) .

ويستخدم أحيانا الرمز y' بدلاً من $\frac{dy}{dx}$

وبذلك فإنه إذا كانت $y = x^2$ فإن $y' = 2x$

وإذا كانت الدالة $y = f(x)$ فإن معاملها التفاضلى يرمز له بالرمز y' أو $f'(x)$.

وإذا كانت u دالة فى V أى $u = f(V)$ فإن المعامل التفاضلى لـ u بالنسبة إلى V

يكتب u' أو $f'(v)$ أو $\frac{du}{dv}$ والتفاضل ، هو عملية إيجاد المعامل التفاضلى أو مشتقة

الدالة .

ويمكن استخدام الرمز $\frac{d}{dx}$ بمعنى الرغبة فى إجراء أو إيجاد عملية التفاضل فى الدالة

بالنسبة إلى x .

وبذلك فإن تفاضل x^2 بالنسبة إلى x يمكن التعبير عنه بالرموز التالية : -

$$\frac{d(x^2)}{dx} \text{ or } \frac{d}{dx}(x^2)$$

وعموماً فإن تفاضل $f(x)$ بالنسبة إلى (x) يمكن التعبير عنه بالرموز : -

$$\frac{d f(x)}{dx} \text{ or } \frac{d}{dx}[f(x)]$$

ويمكن التعبير عنها كذلك بالرموز : D_y أو $D_x y$

ويستخدم الرمز Dy عندما يكون معروفاً أن x هو المتغير المستقل وعندما نقول أن :

$$\frac{dy}{dx} = 2x \text{ للدالة : } y = x^2$$

فإن هذا يعنى أن نسبة تفاضل y إلى تفاضل x يساوى $2x$ أو أن تفاضل y يساوى

($2x$ مرة) تفاضل x

ويمكن التعبير عن هذا بالمعادلة : -

$$dy = 2x \cdot dx$$

وفي الصورة الأخيرة تظهر $2x$ كمعامل لتفاضل x ومن هنا ظهر التعبير (المعامل التفاضلي) .

ولا يجب أن نتعامل مع $\frac{dy}{dx}$ كما لو كان كسراً ، بسطه dy ومقامه dx أى أن المشتقة ليست نسبة وإن كانت على شكل كسر وإنما هي رمز واحد لا يتجزأ أو بمعنى نهاية نسبة .

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

٥ - ٢ المعامل التفاضلي للمقدار الثابت

حيث أن المعامل التفاضلي ، يقيس معدل التغير للمتغير في الدالة ، وحيث أن المقدار الثابت ليس به تغير .

فإن المعامل التفاضلي للمقدار الثابت = صفر

$$\therefore \frac{dy}{dx}(C) = 0 \quad , \quad C = \text{Constant}$$

٥ - ٣ : تفاضل الدالة $y = mx + b$:

هذه الدالة هي الصورة العامة للدالة من الدرجة الأولى ورسمها يكون على شكل خط مستقيم وبذلك فإن الميل يكون ثابتاً ، ويمكن إيضاح ذلك جبرياً من المبادئ الأولية كما يلي :

لنفرض أن الزيادة في x = Δx

وأن الزيادة المناظرة في y = Δy

وبالتعويض في المعادلة : $y = mx + b$

(1)

(2)

$$\therefore y + \Delta y = m(x + \Delta x) + b$$

وبطرح (1) من (2)

$$\therefore \Delta y = m(\Delta x)$$

وبالقسمة على Δx :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

وهذا صحيح لكل قيم Δx
وحيث أن m مقدار ثابت

$$\therefore \frac{dy}{dx} = m$$

ويجب ملاحظة أن $\frac{dy}{dx}$ لا تعتمد على b

وعند اختلاف قيم b فإن المعادلة تبقى خط مستقيم أو مجموعة خطوط مستقيمة متوازية ولها نفس الميل m

٥ - ٤ : - تفاضل الدالة $y = x^3$ -

وسوف نقوم بإيجاد المعامل التفاضلي الأول لهذه الدالة من المبادئ الأولية (طريقة Δ):

فإذا فرضنا أن التغير في x $\Delta x =$

، فإذا افترضنا أن المناظر في y $\Delta y =$

وبالتعويض في المعادلة $y = x^3$

$$\begin{aligned} \therefore y + \Delta y &= (x + \Delta x)^3 \\ &= x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \end{aligned}$$

وبالطرح : -

$$\therefore \Delta y = 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2, \quad \Delta x \neq 0$$

وعندما تقترب Δx من الصفر ، يقترب كل من : -

$3x \cdot (\Delta x)$ ، $(\Delta x)^2$ من الصفر

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$$

$$i.e \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

٥ - ٥ : - تفاضل الدالة $y = x^4$:-

بنفس الطريقة السابقة فإننا نصل إلى أن : -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x^3 + 6x^2 \cdot (\Delta x) + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x^3$$

ويلاحظ مما سبق أن أى دالة فى الصورة : $y = x^n$

يمكن التعامل معها بنفس الطريقة السابقة أى من المبادئ الأولية (طريقة Δ) .

وواضح من مفكوك $(x + \Delta x)^n$ أن المعامل التفاضلى هو الحد الثانى فى المفكوك .

$$\text{فمثلاً : - إذا كانت } y = x^5 \text{ فإن } \frac{dy}{dx} = 5x^4$$

$$\text{وإذا كانت } y = x^6 \text{ فإن : } \frac{dy}{dx} = 6x^5$$

وعلى العموم ، إذا كانت x عدد صحيح موجب ، $y = x^n$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

وسنثبت هذا فيما يلى : -

نفترض أن : $y = x^n$

، Δx = التغير فى x

، Δy = التغير المناظر فى y

وبالتعويض :

$$\therefore y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

وبفك الطرف الأيمن بنظرية ذات الحدين :

$$\therefore y + \Delta y = x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \cdot x^{n-3} \cdot (\Delta x)^3 + \dots$$

وبالطرح :

$$\therefore \Delta y = nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} x^{n-3} \cdot (\Delta x)^3 + \dots$$

وبالقسمة على Δx :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} x^{n-3} (\Delta x)^2$$

فعند اقتراب Δx من الصفر فإن كل الحدود بالطرف الأيمن ابتداء من الحد الثاني (بعد الحد الأول) تقترب من الصفر .

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

$$i.e \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

وهذا صحيح لجميع قيم n السالبة والموجبة والكسرية ويمكن التأكد من ذلك بإيجاد المعامل التفاضلي للدالة $y = x^n$ بعدة طرق أخرى بخلاف الطريقة المتضمنة مفكوك ذات الحدين .

وعليه فإنه لجميع قيم n :

$$\therefore \frac{dy}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

٥-٦ تفاضل الدالة $y = ax^n$

حيث a مقدار ثابت

$$\because y = ax^n$$

$$\therefore y + \Delta y = a(x + \Delta x)^n$$

$$= a \left\{ x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots \right\}$$

وبالطرح :-

$$\therefore \Delta y = a \left\{ n \cdot x^{n-1} \cdot (\Delta x) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots \right\}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \left\{ n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x) + \dots \right\}$$

وعندما تقترب Δx من الصفر

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

ومن هذا نجد أن الثابت a فى الدالة الأصلية يبقى كما هو ولكن مضروباً فى العامل التفاضلى لـ x^n أى $a \times n x^{n-1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = n \cdot a \cdot x^{n-1}$$

أمثلة محلولة

(١) أوجد مشتقة (العامل التفاضلى) الدالة :

$$y = 3x + 2$$

باستخدام المبادئ الأولية .

الحل : -

$$\therefore y = 3x + 2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore y + \Delta y = 3(x + \Delta x) + 2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

بطرح (1) من (2) : -

$$\therefore \Delta y = 3 \cdot \Delta x$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$$

(٢) أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{1}{x}$ أو $y = x^{-1}$ من المبادئ الأولية .

الحل : -

$$\because y = \frac{1}{x} \quad \therefore y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$$

وبالطرح :

$$\begin{aligned} \therefore \Delta y &= \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} \\ &= \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} \end{aligned}$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x^2 + x(\Delta x)}$$

,when $x \rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x^2}, [x \cdot \Delta x = 0]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}$$

(٣) اوجد معدل التغير اللحظي للدالة : $y = x^2 + 4x - 6$ من المبادئ الأولية .

الحل : -

المقصود بمعدل التغير اللحظي هو المشتقة أو العامل التفاضلي

$$\because y = x^2 + 4x - 6$$

$$\begin{aligned} \therefore y + \Delta y &= (x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) - 6 \\ &= x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 4x + 4(\Delta x) - 6 \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta y = 2x(\Delta x) + 4(\Delta x) + (\Delta x)^2$$

وبالطرح :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{ومعدل التغير}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 4 + \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

= ومعدل التغير اللحظي (المشتقة)

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + 4 + \Delta x = 2x + 4$$

(٤) اكتب العامل التفاضلي للدوال التالية :-

$$\begin{array}{lll} 1) y = x^7 & 2) y = x^{\frac{1}{3}} & 3) y = x^{-4} \\ 4) y = x^{0.6} & 5) y = x^{-0.5} & 6) y = x \end{array}$$

الحل :-

$$1) \frac{dy}{dx} = 7x^{7-1} = 7x^6$$

$$2) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$3) \frac{dy}{dx} = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$$

$$4) \frac{dy}{dx} = 0.6x^{0.6-1} = 0.6x^{-0.4} = 0.6 \frac{1}{x^{0.4}} = \frac{0.6}{\sqrt[10]{x^4}}$$

$$5) \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2} x^{-0.5-1} = \frac{-1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2x^{3/2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$6) \frac{dy}{dx} = 1 \times x^{1-1} = 1 \times x^0 = 1 \times 1 = 1.$$

(٥) اوجد تفاضل الدوال التالية :-

$$\begin{array}{ll} 1) y = 8x^5 & 2) y = 4\sqrt[3]{x} \\ 3) y = ax^{2b} & 4) S = 16t^2 \end{array}$$

الحل :-

$$1) \frac{dy}{dx} = 8 \times 5 \times x^4 = 40x^4$$

$$2) \frac{dy}{dx} 4\sqrt[3]{x} = \frac{dy}{dx} 4x^{\frac{1}{3}} = 4 \times \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3x^{2/3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$3) \frac{dy}{dx} = a \cdot 2b \cdot x^{2b-1} = 2ab x^{2b-1}$$

$$4) \frac{ds}{dt} = 16 \times 2t^{2-1} = 32t$$

(٦) أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = \frac{2x+1}{x-1}$$

الحل :-

$$\therefore y = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\therefore y + \Delta y = \frac{2(x + \Delta x) + 1}{(x + \Delta x) - 1}$$

$$\therefore \Delta y = \frac{2x + 2(\Delta x) + 1}{(x - 1 + \Delta x)} - \frac{2x + 1}{x - 1}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x - 1)(2x + 2\Delta x + 1) - (x - 1 + \Delta x)(2x + 1)}{\Delta x(x - 1 + \Delta x)(x - 1)}$$

$$= \frac{-3\Delta x}{\Delta x(x - 1 + \Delta x)(x - 1)} = \frac{-3}{(x - 1)(x - 1 + \Delta x)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3}{(x - 1)(x - 1 + \Delta x)} = \frac{-3}{(x - 1)(x - 1)} = \frac{-3}{(x - 1)^2}$$

(٧) أوجد ميل المماس للمنحنى $y = \frac{1}{x}$ عند النقطة التي إحداثيها السيني = 1

الحل :-

يمكن حساب الميل بإيجاد قيمة العامل التفاضلي عند النقطة المعنية .

$$\therefore \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{-1}{x^2}$$

, at $x = 1$

(مثال ٢)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -1 = \tan 135^\circ$$

وهذا يعنى أن ظل الزاوية التي يصنعها المماس عند النقطة $x = 1$ ، سالب لأن الزاوية

التي ظلها (-1) هي 135°

(٨) أوجد ميل المنحنى الآتى باستخدام طريقة Δ - method " أى من المبادئ الأولية :-

$$y = 3x^2 - 2x + 4 \quad \text{at} \left(\frac{1}{2}, 3 \right)$$

الحل :-

لإيجاد ميل المنحنى عند نقطة معينة نوجد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، ومن طريقة Δ ؛ نعلم أن :-

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 4 - (3x^2 - 2x + 4)}{\Delta x} \\ &= \frac{3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x + 4 - 3x^2 + 2x - 4}{\Delta x} \\ &= \frac{6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= 6x + 3 \cdot \Delta x - 2 \end{aligned}$$

$$, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 6x + 3 \cdot \Delta x - 2 = 6x - 2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 \quad \text{وعند النقطة} \left(\frac{1}{2}, 3 \right) \quad \therefore$$

وهو الميل المطلوب

وزاوية ميل المماس :

$$= \tan^{-1} 3 \cong 71.6^\circ$$

(٩) أوجد ميل المنحنى الآتى باستخدام طريقة Δ :

$$y = x^3 - 3x + 5 \quad \text{at} (-2, 2)$$

الحل :-

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^3 - (3x + \Delta x) + 5 - (x^3 - 3x + 5)}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 5 - x^3 + 3x - 5 - 3x - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3 \cdot \Delta x}{\Delta x}$$

$$= 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 3$$

$$, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 3 = 3x^2 - 3$$

وعند النقطة $(-2, 2)$:-

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 \times (-2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9$$

وهو الميل المطلوب

= وزاوية ميل المماس

$$\tan^{-1} 9 \cong 83.6^\circ$$

$$f(x) = (2x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

(١٠) أوجد مشتقة الدالة :

وذلك باستخدام طريقة Δ

الحل :-

من التعريفات السابقة :-

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$, \because f(x) = (2x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\therefore f(x+\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1}}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1}} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \right) / \Delta x \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1}} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{2(x+\Delta x)-1}}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1} \cdot \sqrt{2x-1}}$$

وبالضرب في المرافق وهو : $\frac{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2(x+\Delta x)-1}}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2(x+\Delta x)-1}}$ وهو يساوى الواحد :-

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{[\sqrt{2x-1} - \sqrt{2(x+\Delta x)-1}][\sqrt{2x-1} + \sqrt{2(x+\Delta x)-1}]}{[\sqrt{(2x-1)} \cdot \sqrt{2x+2\Delta x-1}][\sqrt{2x-1} + \sqrt{2(x+\Delta x)-1}]} = \\ & = \frac{[(2x-1) - (2x+2\Delta x-1)]}{[(2x-1)\sqrt{2x+2\Delta x-1} + (2x+2\Delta x-1)\sqrt{2x-1}]} \\ & = \frac{-2\Delta x}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(2x-1)\sqrt{2x+2\Delta x-1} + (2x+2\Delta x-1)\sqrt{2x-1}]} \end{aligned}$$

ولا ننسى أن المقدار أصلاً مقسوم على Δx كما في (1)

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2}{[(2x-1)\sqrt{2x+2\Delta x-1}] + [(2x+2\Delta x-1)\sqrt{2x-1}]}$$

وبالتعويض عن $\Delta x = 0$ في المقدار السابق

$$\therefore f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)\sqrt{2x-1} + (2x-1)\sqrt{2x-1}}$$

$$= \frac{-2}{(2x-1)^{3/2} + (2x-1)^{3/2}}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{-2}{2(2x-1)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$$

$$y = f(x) = x^2 - 2$$

(١١) أوجد معدل تغير الدالة :-

بين $x = 3$, $x = 4$

الحل :-

معدل التغير هو $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\therefore x = 3 \quad \therefore \Delta x = 4 - 3 = 1$$

$$y = f(x) = f(3) = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

$$\text{For } x = 4$$

$$\therefore y + \Delta y = f(x + \Delta x) = 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$

$$\therefore \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(4) - f(3) = 14 - 7 = 7$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7}{1} = 7$$

وهو معدل التغير المطلوب :

(١٢) أوجد معدل تغير y بالنسبة إلى x عند النقطة التي إحداثيها السيني ؛

$$2y = x^2 + 3x - 5 \quad \text{وذلك للدالة :-}$$

الحل :-

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{معدل التغير}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore 2\Delta y &= (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 5 - (x^2 + 3x - 5) \\ &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3 \cdot \Delta x - 5 - x^2 - 3x + 5 \\ &= 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 3 \cdot \Delta x \end{aligned}$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore 2 \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 3$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = x + \frac{\Delta x}{2} + 1.5$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x + \frac{\Delta x}{2} + 1.5 = x + 1.5$$

$$\text{, For } x = 3.5$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.5 + 1.5 = 5$$

وهذا يعنى أن معدل التغير اللحظى للدالة المذكورة عند النقطة $x = 3.5$ هو 5 أى أن

الدالة تتغير بسرعة تعادل خمسة أضعاف تغير المتغير المستقل x عندما $x = 3.5$

وميل المماس للمنحنى عند $x = 3.5$ هو 5

$$\theta = \tan^{-1} 5 \cong 78.7^\circ$$

(١٣) أوجد مشتقة الدالة : $y = 2x^2 + 5x$ بطريقة Δ

الحل :-

من التعريف :-

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\because y = f(x) = 2x^2 + 5x$$

$$\therefore f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x)$$

$$, y'(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) - 2x^2 - 5x}{\Delta x}$$

وبالاختصار :-

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4x + 2\Delta x + 5 \end{aligned}$$

وعندما $\Delta x \rightarrow 0$ فإن الحد $2\Delta x$ ينعدم وتُصبح

$$f'(x) = 4x + 5$$

(١٤) أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \sqrt{x}$ بطريقة Δ

الحل :-

$$y = f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x + \Delta x}}{\Delta x}$$

وبالضرب في المرافق :-

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

وعندما $\Delta x \rightarrow 0$ فإن :-

$$\frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(١٥) أوجد مشتقة الدالة :

$$y = f(x) = \sqrt{2x-3}$$

باستخدام طريقة Δ

الحل :-

$$\therefore y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\because y = f(x) = \sqrt{2x-3}$$

$$\therefore y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \sqrt{2(x + \Delta x) - 3}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(x + \Delta x) - 3} - \sqrt{2x - 3}}{\Delta x}$$

فإذا ما عوضنا عن $\Delta x = 0$ فإن المقام يؤول للصفر ولهذا فإننا سنقوم بالضرب في المرافق أى بالضرب في كسر قيمته الكلية تساوى الواحد الصحيح وهذا لن يغير من المسألة .

أى إننا سنضرب المقدار السابق في (1) والواحد هنا سيكون على شكل الكسر التالى :

$$\frac{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}$$

وبذلك فإن النهاية المطلوبة ، هى للمقدار :-

$$\frac{\sqrt{2x+2\Delta x-3} - \sqrt{2x-3}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}$$

$$= \frac{(2x+2\Delta x-3) - (2x-3)}{\Delta x [\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}]}$$

$$= \frac{2\Delta x}{\Delta x [\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}]}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}$$

والآن يمكننا أن نعوض عن Δx بالصفر

$$\therefore f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

ومن هذا نصل إلى نتيجة هامة وهى أن أى مقدار كسرى ، بسطه الواحد الصحيح ،

ومقامه جذر من الدرجة الأولى فى x فإن تفاضله $\frac{1}{\text{ضعف الجذر}}$

فمثلاً تفاضل $\frac{1}{\sqrt{7x+6}}$ هو :-

، وتفاضل $\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2}-1}}$ هو :-

وهكذا ؛

(١٦) إذا كانت $y = f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ فأوجد $f'(x)$ بطريقة Δ

الحل :-

$$\because f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}$$

فإذا ما عوضنا عن $\Delta x = 0$ فإن المقام يُصبح مساوياً للصفر وحيث أن الضرب فى

المقدار (1) لا يغير من المقدار ، لذلك فإننا نلجأ إلى الضرب فى مقدارى كسرى

يساوى الواحد وهو :-

$$\frac{(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3} \cdot x^{2/3} + x^{4/3}}{(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3} \cdot x^{2/3} + x^{4/3}}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} :$$

$$\frac{[(x + \Delta x)^{2/3} - x^{2/3}][(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3} \cdot x^{2/3} + x^{4/3}]}{\Delta x [(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3} \cdot x^{2/3} + x^{4/3}]}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x [(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3} \cdot x^{2/3} + x^{4/3}]}$$

بفك البسط والقسمة على Δx :

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + \Delta x}{(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3} \cdot x^{2/3} + x^{4/3}}$$

والآن بالتعويض عن $\Delta x = 0$ نحصل على :-

$$\frac{2x}{x^{4/3} + x^{2/3} \cdot x^{2/3} + x^{4/3}} = \frac{2x}{3x^{4/3}} = \frac{2x^{3/3}}{3x^{3/3} \cdot x^{1/3}} = \frac{2}{3x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

(١٧) أوجد مشتقة الدالة $y = \sin x$ باستخدام المبادئ الأولية . " بطريقة Δ "

الحل :-

$$\because y = \sin x$$

$$\therefore y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

ومن قواعد حساب المثلثات نجد أن قيمة Δy :-

$$= 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\cos x + \frac{\Delta x}{2}\right) \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \cos x \times 1 = \cos x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x$$

(١٨) أوجد مشتقة الدالة :- $y = \cos x$ باستخدام طريقة Δ

الحل :-

$$\because y = \cos x$$

$$\therefore y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

وعندما نؤول Δx إلى الصفر فإن المقدار يساوي :-

$$= -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

$$\therefore y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

Exercise "3"

(١) أوجد المعامل التفاضلي للدوال الآتية بالنسبة إلى x :

$$x^8, 7x, \frac{x}{5}, 0.007x, \frac{1}{3}x^5, 12x^4, \frac{6}{7}x^{14}, (5x)^3, 3a x^3$$

(٢) فاضل ما يأتي بالنسبة إلى x :- $cx^5, \frac{ab}{c}x^7, x^{3b}, 2x^{4a+1}, 3\pi x^2$

(٣) فاضل ما يأتي بالنسبة إلى x :- $5x+2, \frac{2}{3}x-7, -5x+b, ax+bc$

(٤) اكتب الدوال التي تفاضلها ما يلي :-

$$x, 2x, x^2, \frac{x^2}{4}, x^7, x^{4a}, x^n, \frac{3x^4}{4}, 3b x^2$$

(٥) إذا كانت $U = V + at^2$ فأوجد قيمة $\frac{du}{dt}$ باعتبار أن u, a ثوابت

(٦) إذا كانت $S = \frac{1}{2}at^2$ ، a ثابت فأوجد $\frac{ds}{dt}$ عندما $a=30$

(٧) إذا كانت مساحة الدائرة تُعطى بالعلاقة $A = \pi r^2$ حيث $r =$ نصف القطر ،

$$A = \text{مساحة الدائرة فأوجد } \frac{dA}{dr}$$

(٨) إذا كان حجم الكرة يُعطى بالعلاقة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ، حيث V الحجم ، $r =$ نصف

القطر فأوجد $\frac{dV}{dr}$ عندما تكون r مساوية : 6 cm .

(٩) فاضل بالنسبة إلى x ، كل من الدوال التالية :-

$$3\sqrt{x}, \frac{2}{x}, \frac{3}{\sqrt{x}}, \sqrt[3]{x^2}, \sqrt[4]{3x^3}$$

(١٠) فاضل بالنسبة إلى x :- $x^{0.6}, 7x^{0.15}, \frac{8}{x^{0.4}}, 3x^{-3}, x^{-n}$

(١١) فاضل بالنسبة إلى x :- $3x^{2.5}, 4x^{-1.3}, 8x^{0.7}, \frac{5}{\sqrt[6]{x^3}}$

(١٢) إذا كانت $U = \frac{30}{V^2}$ فأوجد قيمة $\frac{dU}{dV}$.

(١٣) أوجد ميل المنحنى $y = 3x^3$ عند النقطة التي إحداثيها السيني $= 1.5$.

(١٤) أوجد ميل المنحنى $y = \frac{x^2}{3}$ عند النقطة التى إحداثيها السينى : $x = 2$ وما هى قيمة x التى تجعل هذا الميل مساوياً للصفر .

(١٥) أوجد ميل المنحنى $y = \frac{2}{x}$ عند النقط التى فيها x : $10, 2, 1, \frac{1}{2}$.

(١٦) أوجد من المبادئ الأولية " باستخدام طريقة Δ " ، المعامل التفاضلى للدالة : $y = \frac{1}{x^2}$.

(١٧) عند أى نقطة على المنحنى $y = x^2$ يكون ميل المنحنى مساوياً 2 .

(١٨) عند أى نقطة على المنحنى $y = x^3$ يكون مماس المنحنى صانعاً زاوية قدرها 45° مع محور السينات .

(١٩) عند أى نقطة على المنحنى $y = \sqrt{x}$ يكون الميل مساوياً 2 .

(٢٠) مطلوب رسم مماس للمنحنى $y = 0.5 x^2$ وبحيث يكون موازياً للمستقيم $2x - 4y = 3$ ، فعند أى نقطة على المنحنى يجب رسمه .

الباب السادس

قواعد التفاضل

٦-١: تفاضل المجموع Differentiation of a sum

درسنا فى الأبواب السابقة تفاضل لدوال من حد واحد فيما عدا الدالة :-
 $y = mx + b$ وقد علمنا كيفية إيجادها من المبادئ الأولية " طريقة Δ " ، فى هذا الباب سندرس تفاضل دوال عبارة عن مجموع لبضعة دوال " اثنين أو أكثر " فى نفس المتغير x ، مثلاً

$$y = 3x^3 + 2x^2 - 5x \quad \text{وذلك مثل الدالة :-}$$

وفى ما يلى طريقة إيجاد تفاضل مثل هذه الدوال .

لنعتبر كل من U, V دالة فى x ولتكن y تمثل مجموع الدالتين :-

$$Y = U + V$$

وبذلك فإن كل من y, v, u تعتبر دوال فى x ولنفترض أن هنالك تغير فى المتغير المستقل x مقداره Δx ، وينتج عن هذا التغير ، تغير مناظر فى كل من y, u, v وليكن $\Delta y, \Delta u, \Delta v$ على الترتيب

وبذلك تصبح y عبارة عن $y + \Delta y$

، تصبح u عبارة عن $u + \Delta u$

، تصبح v عبارة عن $v + \Delta v$

$$y = u + v$$

$$\therefore y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$$

وبالطرح :-

$$\therefore \Delta y = \Delta u + \Delta v$$

وبالقسمة على Δx :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

وهذا صحيح لجميع قيم Δx ولجميع الزيادات المناظرة $\Delta y, \Delta u, \Delta v$

كما وأن نهايتهم متساوية . وعندما $\Delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

وواضح أن نفس التحليل السابق ينطبق على مجموع أى عدد من الدوال وبذلك فإن قاعدة تفاضل الدوال المجموعة فى نفس المتغير تكون كالتالى : -
[[المعامل التفاضلى لمجموع عدد من الدوال يساوى مجموع المعامل التفاضلى لهذه الدوال]].

أمثلة محلولة

مثال (١) : - أوجد التفاضل بالنسبة إلى x للدالة :

$$y = 5x^3 + 4x^2 - 8x + 11$$

الحل : -

طبقاً لقاعدة تفاضل المجموع السابقة ،

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= 5 \times 3x^2 + 4 \times 2x - 8 \\ &= 15x^2 + 8x - 8\end{aligned}$$

مثال (٢) : - أوجد ميل المماس للمنحنى $y = x^2 - 4x + 15$

عند $x = 3$

وما هو الإحداثى السينى للنقطة التى يكون ميل المماس عندها مساوياً للصفر

الحل : -

$$\therefore y = x^2 - 4x + 15$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times 3 - 4 = 2$$

وعندما $x = 3$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ أى } \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore 2x - 4 = 0 \quad \therefore 2x = 4, \quad x = 2$$

أى أن المماس يكون مساوياً للصفر أى موازياً لمحور السينات عندما $x = 2$

مثال (٣) إذا كانت العلاقة بين المسافة S والزمن t لجسم متحرك ، كالتالى : -

$$S = 40t - 8t^2$$

$$\text{فاوجد } \frac{ds}{dt} \text{ ، ثم أوجد قيمة } t \text{ عندما } \frac{ds}{dt} = 8$$

الحل : -

$$\therefore S = 40t - 8t^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 40 - 16t$$

$$\frac{ds}{dt} = 8 \quad \text{وعندما}$$

$$\therefore 8 = 40 - 16t$$

$$\therefore 16t = 40 - 8 = 32$$

$$\therefore t = 2$$

مثال (٤) أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية : -

$$a) y = 2x^3 - 5x^2 + 6x$$

$$b) y = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 7$$

$$c) y = 3x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 2$$

$$d) y = x^{\frac{4}{5}} - 3x^{\frac{-3}{4}} + \frac{2}{x} + 2x$$

$$e) y = x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$$

$$f) y = \left(x^{\frac{1}{3}} - 3 \right) \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} \right)$$

الحل : -

$$a) \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 10x + 6$$

$$b) \frac{dy}{dx} = 12x^3 + 6x^2 - 10x$$

$$c) \frac{dy}{dx} = 3 \times \frac{3}{2} \sqrt{x} = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{9\sqrt{x}}{2} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

$$d) \frac{dy}{dx} = \frac{4}{5} x^{\frac{-1}{5}} + \frac{9}{4} x^{\frac{-7}{4}} - \frac{2}{x^2} + 2$$

$$e) \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}$$

f) يتم أولاً فك القوسين ويُصبح المقدار كالتالي :

$$y = 2x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{-1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-1} - 6x^{\frac{-1}{2}} - 9x^{-1}$$

$$= 2x^{\frac{-1}{6}} + 3x^{\frac{-4}{6}} - 6x^{\frac{-3}{6}} - 9x^{-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{-1}{6} x^{\frac{-7}{6}} + 3 \times \frac{-4}{6} x^{\frac{-10}{6}} - 6 \times \frac{-3}{6} x^{\frac{-9}{6}} - 9 \times -1 x^{-2}$$

$$= \frac{-1}{3x^{\frac{7}{6}}} - \frac{2}{x^{\frac{10}{6}}} + \frac{3}{x^{\frac{9}{6}}} + \frac{9}{x^2}$$

مثال (٥) : -

$$y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$$

إذا كانت

$$f'(1), f'(0) \times f'(-1) \quad : \text{ (أ) فاوجد :}$$

$$\text{ (ب) : قيم } x \text{ التي تجعل } f'(x) = \text{ صفر}$$

الحل : -

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x - 9$$

$$, f'(1) = 3(1)^2 + 6(1) - 9 = 0$$

$$, f'(0) = 3(0)^2 + 6(0) - 9 = -9$$

$$, f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) - 9 = -12$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\therefore (x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1, x = -3$$

هي قيم x التي تجعل $f(x) = \text{صفر}$

مثال (٦) إذا كانت : $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

حيث a, b, c ثوابت

وكانت $f'(-1) = 1, f'(2) = 2, f(1) = 3$

فأوجد قيم a, b, c

الحل : -

$$\therefore y = ax^2 + bx + c$$

$$\therefore y' = 2ax + b$$

$$f(1) = 3 = a(1)^2 + b(1) + c$$

$$\therefore a + b + c = 3$$

..... A

$$f'(2) = 2 = 2a(2) + b$$

$$\therefore 4a + b = 2$$

..... B

$$f'(-1) = 2a(-1) + b = 1$$

$$\therefore -2a + b = 1$$

..... C

ب طرح (c) من (b)

$$\therefore 6a = 1, a = \frac{1}{6}$$

بالتعويض في (c)

$$\therefore -2 \times \frac{1}{6} + b = 1$$

$$\therefore b = \frac{4}{3}$$

بالتعويض عن قيم c, b في A

$$\therefore \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + c = 3$$

$$\therefore c = 1.5$$

مثال (٧) : أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية : -

$$a) y = 5 , \quad b) y = -3x , \quad c) y = x^5 , \quad d) y = \frac{3}{x}$$

الحل : -

$$a) \because y = 5 \therefore \frac{dy}{dx} = \text{Zero}$$

$$b) \because y = -3x \therefore \frac{dy}{dx} = -3$$

$$c) \because y = x^5 \therefore \frac{dy}{dx} = 5x^4$$

$$d) \because y = \frac{3}{x} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{x^2}$$

مثال (٨) : أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية : -

$$a) y = \frac{-7}{x^2} , \quad b) y = \frac{8}{x^3} , \quad c) y = a\sqrt{x} , \quad d) y = a\sqrt[3]{x}$$

الحل : -

$$a) \because y = \frac{-7}{x^2} = -7x^{-2} \therefore \frac{dy}{dx} = -7 \times -2x^{-3} = \frac{14}{x^3}$$

$$b) \because y = \frac{8}{x^3} = 8x^{-3} \therefore \frac{dy}{dx} = 8 \times -3x^{-4} = \frac{-24}{x^4}$$

$$c) \because y = a\sqrt{x} = a \cdot x^{\frac{1}{2}} \therefore \frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

$$d) \because y = a\sqrt[3]{x} \therefore y = ax^{\frac{1}{3}} \\ \therefore \frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{a}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{a}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

مثال (٩) : أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية : -

$$a) y = \frac{-a}{b} \sqrt[5]{x^2} , \quad b) y = 2x^{-3/4}$$

الحل :-

$$\begin{aligned} a) \quad \because y &= \frac{-a}{b} \sqrt[5]{x^2} = \frac{-a}{b} x^{\frac{2}{5}} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{-a}{b} \times \frac{2}{5} x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{-2a}{5b} x^{\frac{-3}{5}} \\ &= \frac{-2a}{5b} \times \frac{1}{x^{3/5}} = \frac{-2a}{5b} \times \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \end{aligned}$$

$$b) \quad \because y = 2x^{\frac{-3}{4}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{-3}{4} \times x^{\frac{-3}{4}-1} = \frac{-3}{2} x^{\frac{-7}{4}} = \frac{-3}{2} \times \frac{1}{x^{7/4}} = \frac{-3}{2} \times \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$$

مثال (١٠) أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :-

$$a) \quad y = ax^{\frac{1}{5}}, \quad b) \quad y = \frac{a}{\sqrt{x}}$$

الحل :-

$$\begin{aligned} a) \quad \because y &= ax^{\frac{1}{5}} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = a \times \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{a}{5} x^{\frac{-4}{5}} = \frac{a}{5} \times \frac{1}{x^{4/5}} = \frac{a}{5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} \end{aligned}$$

$$b) \quad \because y = \frac{a}{\sqrt{x}} = \frac{a}{x^{\frac{1}{2}}} = a \cdot x^{\frac{-1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a \times \frac{-1}{2} x^{\frac{-1}{2}-1} = \frac{-a}{2} x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-a}{2} \times \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{-a}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

مثال (١١) أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية :-

$$a) \quad y = 9x^{\frac{4}{3}}, \quad b) \quad y = \frac{-5}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$c) \quad y = \frac{10}{\sqrt[5]{x^3}}, \quad d) \quad y = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$$

الحل :-

$$a) \because y = 9x^{\frac{4}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 9 \times \frac{4}{3} \times x^{\frac{4}{3}-1} = 12x^{\frac{1}{3}} = 12\sqrt[3]{x}$$

$$b) \because y = \frac{-5}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5}{x^{2/3}} = -5 \times x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -5 \times \frac{-2}{3} x^{-\frac{2}{3}-1} = \frac{10}{3} x^{-\frac{5}{3}} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{x^{5/3}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

مثال (١٢) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = (x-3)(2x+1)$$

الحل : -

نقوم بفك الأقواس فنحصل على حدود مجموعة جبرياً

$$\therefore y = 2x^2 - 5x - 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x - 5$$

مثال (١٣) أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4$$

الحل : -

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 3$$

مثال (١٤) أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = x + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

الحل : -

$$y = x + 3x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 + 3 \times \frac{-1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{-3}{2} \times \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$$

مثال (١٥) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = 3x^2 - \frac{3}{x^2} + 1$$

الحل : -

$$y = 3x^2 - 3x^{-2} + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x + 6x^{-3} = 6x + \frac{6}{x^3} = 6\left(x + \frac{1}{x^3}\right)$$

مثال (١٦) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = x\left(x^2 - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5}\right)$$

الحل : -

$$y = x^3 - 3x^{-2} + 4x^{-3} + 5x^{-4}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x^{-3} - 12x^{-4} - 20x^{-5}$$

$$= 3x^2 + \frac{6}{x^3} - \frac{12}{x^4} - \frac{20}{x^5}$$

مثال (١٧) أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = \sqrt[4]{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[6]{x^5}$$

الحل : -

$$y = x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{5}{6}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[6]{x}}$$

مثال (١٨) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = (2x^2 + 3x - 1)\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}\right)$$

الحل : -

نفك الأقواس بحيث تصبح الدالة عبارة عن حدود مجموعة جبرياً

$$\therefore y = 2x + 3\frac{-1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$= 2x + 3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{3}{x^4}$$

مثال (١٩) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = \frac{7}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{x^3}}$$

الحل : -

$$y = 7x^{\frac{-1}{2}} - 5x^{\frac{-3}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -7x^{\frac{-3}{2}} + \frac{15}{2}x^{\frac{-5}{2}}$$

$$= \frac{-7}{x^{3/2}} + \frac{15}{2x^{5/2}} = \frac{-7}{\sqrt{x^3}} + \frac{7.5}{\sqrt{x^5}}$$

مثال (٢٠) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = ax^2 + \frac{b}{x} - c$$

الحل : -

$$\frac{dy}{dx} = 2ax - \frac{b}{x^2}$$

Exercise 4

فاضل الدوال التالية في (x) :

$$y = 6x^3 + 5x^2 \quad (١)$$

$$y = \frac{3}{x} + 2x \quad (٢)$$

$$y = 3x^3 + x - 2 \quad (٣)$$

$$y = 8 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} \quad (٤)$$

$$y = 4x^4 + 3x^2 - 2x \quad (٥)$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{3}{5} \quad (٦)$$

$$y = x(3 - 2x + 2x^2) \quad (٧)$$

$$y = 6\sqrt{x} + \sqrt{10} \quad (٨)$$

$$y = 5x^2 + \frac{2}{3\sqrt{x}} + 3 \quad (٩)$$

$$y = (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x^3}) \quad (١٠)$$

$$y = x^4 + x^3 + x^2 + x \quad (١١)$$

$$y = \frac{2x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 - 5\sqrt[3]{x^2} \quad (١٢)$$

$$y = \frac{7}{x^3} - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{2} \quad (١٣)$$

$$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \quad (١٤)$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} + 2x \quad (١٥)$$

أوجد قيمة $\frac{ds}{dt}$ عندما :

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad (١٦)$$

$$S = 5t + 8t^2 \quad (١٧)$$

$$S = 2t^2 - 3t + 8 \quad (١٨)$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$(١٩) \quad \text{أوجد } \frac{dy}{dx} \text{ للدالة : -}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$(٢٠) \quad \text{فاضل بالنسبة إلى } x : -$$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$(٢١) \quad \text{فاضل بالنسبة إلى } x : -$$

$$(1+x)^3$$

$$(٢٢) \quad \text{فاضل بالنسبة إلى } x : -$$

$$(٢٣) \quad \text{إذا كانت : -}$$

$$y = x^{3n} - nx^3 + 7n$$

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{فأوجد قيمة}$$

$$(٢٤) \quad \text{أوجد قيمة } \frac{dy}{dx} \text{ عندما :}$$

$$y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{5}{x}$$

$$y = 2x^2 - 3x + 1$$

$$(٢٥) \quad \text{أوجد ميل المماس للمنحنى :}$$

عندما $x = 1.5$ ، وعند أى قيمة لـ x يكون الميل مساوياً للصفر

$$(٢٦) \quad \text{أوجد قيمة } x \text{ التى يكون ميل المماس للمنحنى : } y = 3(x^2 - 6) ،$$

مساوياً للصفر

$$(٢٧) \quad \text{أوجد ميل المماس للمنحنى : } y = x^3 - 4x^2 - 5x + 6 \text{ عند النقط } x = 1, 2, 3$$

$$(٢٨) \quad \text{أوجد النقط التى عندها يكون ميل المماس مساوياً للصفر للمنحنى : -}$$

$$y = x + \frac{1}{x}$$

٦ - ٢ تفاضل حاصل الضرب Differentiation of Product

قد يكون من السهل أحياناً إيجاد المعامل التفاضلي لحاصل ضرب بعض الكميات مثل :
 $(x+2)^2$ أو $2x(5x-3)$. وذلك بأن تفك حاصل الضرب ويصبح فى صورة مجموع جبرى ، ثم تفاضل كما سبق وأن علمنا .
 فمثلاً : $(x+2)^2$ تُصبح : $x^2 + 4x + 4$. وهى فى صورة مجموع وكذلك $2x(5x-3)$ تُصبح : $10x^2 - 6x$. وهى فى صورة مجموع أيضاً .
 إلا أنه يصعب أحياناً تحويل الكميات المضروبة إلى مجموعة من الحدود مجموعة جبرياً .
 وذلك مثل المقادير التالية : -

$$x^2 \times \sqrt{1-3x} , \quad x \sin x , \quad \frac{x^3}{2} \times \tan x$$

والمعامل التفاضلي فى مثل هذه الحالات لا يكون مساوياً لحاصل ضرب المعامل التفاضلي لكل حد على حدة .

ولإيجاد قاعدة عامة لجميع حالات الضرب نستعرض معاً ما يلى : -

لنعتبر U, V دوال فى x ، y دالة فى U, V

أى أن $Y = U \times V$ وبذلك فإن y تعتبر كدالة فى x

$$\therefore y = uv$$

$$\therefore y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore y + \Delta y = uv + u.(\Delta v) + v.(\Delta u) + (\Delta u).(\Delta v) \quad \dots\dots\dots (2)$$

وبطرح (1) من (2)

$$\therefore \Delta y = u.(\Delta v) + v.(\Delta u) + (\Delta u).(\Delta v)$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = u. \frac{\Delta v}{\Delta x} + v. \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u. \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

وعندما $\Delta x \rightarrow 0$ ، فإن كلاً من $\Delta u, \Delta v, \Delta y$ تقترب كذلك من الصفر

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u. \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(v. \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\Delta u. \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

وفى النهايات ، فإنه عندما تقترب Δu من الصفر فإن الحد الأخير : $\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$ يقترب أيضاً من الصفر .

وباستخدام رموز التفاضل :

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

أى أن : -

(تفاضل مقدارين مضروبين فى بعضهما ، يساوى المقدار الأول مضروباً فى تفاضل المقدار الثانى + المقدار الثانى مضروباً فى تفاضل المقدار الأول)
وهذه القاعدة تصلح لأكثر من دالتين " مقدارين " فمثلاً إذا كانت : -

$$Y = U \cdot V \cdot W$$

وكانت كل من U, V, W وبالتبعية Y دوال فى x فإن : -

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{du}{dx} \times VW \right) + \left(\frac{dv}{dx} \times UW \right) + \left(\frac{dw}{dx} \times UV \right)$$

أمثلة محلولة

مثال (١) :-

$$y = (3x^2 + 1)(5x + 7)$$

أوجد مشتقة الدالة

الحل :-

بتطبيق القاعدة :-

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= (3x^2 + 1) \cdot (5) + (5x + 7) \cdot (6x) \\ &= 15x^2 + 5 + 30x^2 + 42x \\ &= 45x^2 + 42x + 5 \end{aligned}$$

مثال (٢) :-

$$y = (5x^3 + 2x - 1)(3x^2 - 4)$$

أوجد مشتقة الدالة :-

الحل :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (5x^3 + 2x - 1) \cdot (6x) + (3x^2 - 4) \cdot (15x^2 + 2) \\ &= 30x^4 + 12x^2 - 6x + 45x^4 + 6x^2 - 60x^2 - 8 \\ &= 75x^4 - 42x^2 - 6x - 8\end{aligned}$$

مثال (٣) :-

$$(x^2 - 3x + 3)(2x^2 + 5)$$

فاضل بالنسبة إلى x :

الحل :- لتكن

$$y = (x^2 - 3x + 3)(2x^2 + 5)$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= \left[\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 3) \times (2x^2 + 5) \right] + \left[\frac{d}{dx}(2x^2 + 5) \times (x^2 - 3x + 3) \right] \\ &= [(2x - 3)(2x^2 + 5)] + [(4x)(2x - 3)]\end{aligned}$$

ويمكن اختصار الناتج إذا رغبتنا في ذلك .

مثال (٤) :-

$$y = (x^2 - 2)(3x - 1)(x^3 + 2x^2 + 1)$$

فاضل بالنسبة إلى x :

الحل :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left[\frac{d}{dx}(x^2 - 2) \cdot (3x - 1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 1) \right] \\ &+ \left[\frac{d}{dx}(3x - 1) \cdot (x^2 - 2) \cdot (x^3 + 2x^2 + 1) \right] \\ &+ \left[\frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 + 1) \cdot (x^2 - 2) \cdot (3x - 1) \right] \\ &= 2x(3x - 1)(x^3 + 2x^2 + 1) + 3(x^2 - 2)(x^3 + 2x^2 + 1) + \\ &+ (3x^2 + 4x)(2x)(3)\end{aligned}$$

ويمكن اختصار النتيجة إذا رغبتنا في ذلك .

مثال (٥) :-

$$y = (x^2 + 2)^3 (x^3 - 4)^2$$

أوجد مشتقة الدالة :

الحل :-

يمكن بالطبع حل هذه المسألة بفك الأقواس بحيث تصبح y دالة كثيرة الحدود في x إلا أن هذه عملية طويلة .

وأفضل طريقة لحل هذه المسألة هو مراعاة أنها عبارة عن حاصل ضرب قوسين وبالتالي يمكن حلها باستخدام النظرية :-

$$\frac{d}{dx} uv = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

واختصاراً تكتب كالتالي :-

$$d u v = u d v + v d u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 2)^3 \cdot \frac{d}{dx} (x^3 - 4)^2 + (x^3 - 4)^2 \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 2)^3$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^3 - 4)^2 &= 2(x^3 - 4) \times \frac{d}{dx} (x^3 - 4) \\ &= 2(x^3 - 4) \times (3x^2) = 6x^2 (x^3 - 4) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^2 + 2)^3 &= 3(x^2 + 2)^2 \times \frac{d}{dx} (x^2 + 2) \\ &= 3(x^2 + 2)^2 \times 2x = 6x (x^2 + 2)^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

وبالتعويض بـ (1) ، (2) في المعادلة $\frac{dy}{dx}$:-

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= (x^2 + 2)^3 \cdot (6x^2) \cdot (x^3 - 4) + (x^3 - 4)^2 \cdot (6x) \cdot (x^2 + 2)^2 \\ &= 6x (x^2 + 2)^2 (x^3 - 4) [x(x^2 + 2) + (x^3 - 4)] \\ &= 6x (x^2 + 2)^2 (x^3 - 4) (2x^3 + 2x - 4) \end{aligned}$$

مثال (٦) :-

$$y = (x^3 - 5) \cdot \sqrt{2x^2 + 3}$$

إذا كانت

فاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x^3 - 5) \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{2x^2 + 3} + \sqrt{2x^2 + 3} \cdot \frac{d}{dx} (x^3 - 5) \\ \frac{d}{dx} \sqrt{2x^2 + 3} &= \frac{d}{dx} (2x^2 + 3)^{1/2} = \frac{1}{2} (2x^2 + 3)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx} (2x^2 + 3) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 3}} \times 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 3}} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= (x^3 - 5) \cdot \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 3}} + \sqrt{2x^2 + 3} \cdot 3x^2 \\ &= \sqrt{2x^2 + 3} \cdot \frac{8x^4 + 9x^2 - 10x}{2x^2 + 3}\end{aligned}$$

مثال (٧) :-

$$f(x) = (x+2)^3 (3x-1)^{\frac{5}{3}}$$

إذا كانت :

فأوجد $f'(x)$

الحل :-

نستخدم قاعدة حاصل الضرب وذلك بوضع :

$$u = (x+2)^3, \quad v = (3x-1)^{\frac{5}{3}}$$

$$\therefore y = u \cdot v$$

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 3(x+2)^2 \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{5}{3} (3x-1)^{\frac{2}{3}} \quad (3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x+2)^3 \times 5\sqrt[3]{(3x-1)^2} + \sqrt[3]{(3x-1)^5} \cdot 3(x+2)^2$$

$$= (x+2)^2 (3x-1)^{\frac{2}{3}} \cdot 5[(x+2) + 3(3x-1)]$$

$$= (x+2)^2 \cdot (3x-1)^{\frac{2}{3}} \cdot (14x+7)$$

مثال (٨) :-

$$y = (x+2)(x^2+1)(x-7)$$

أوجد المشتقة الأولى للدالة :-

الحل :-

$$\because y = u \cdot v \cdot w$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v \cdot w + \frac{dv}{dx} \cdot u \cdot w + \frac{dw}{dx} \cdot u \cdot v$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (1)(x^2+1)(x-7) + (2x)(x+2)(x-7) + (1)(x+2)(x^2+1)$$

$$= x^3 - 7x^2 + x - 7 + 2x^3 - 14x^2 + 4x^2 - 28x + x^3 + x + 2x^2 + 2$$

$$= 4x^3 - 15x^2 - 26x - 5$$

مثال (٩) :-

$$x = \frac{y}{a} \cdot \sqrt{3by - y^2}$$

أوجد مشتقة الدالة :-

الحل :-

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a} \cdot \frac{d}{dy} (3by - y^2)^{\frac{1}{2}} + (3by - y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dy} \cdot \frac{y}{a}$$

$$= \frac{y}{a} \cdot \frac{d}{dy} (3by - y^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(3by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$$

$$V = (3by - y^2)$$

ثم نضع :

$$\therefore \frac{dv}{dy} = (3b - 2y)$$

$$U = (3by - y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ ومنها}$$

ثم نضع :

$$\therefore U = V^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{2\sqrt{3by - y^2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{y}{a} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{u}{a}$$

$$\therefore \frac{du}{dy} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{3by-y^2}} \cdot (3b-2y)$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{y}{a} \cdot \frac{(3b-2y)}{2\sqrt{3by-y^2}} + \frac{\sqrt{3by-y^2}}{a}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{3by-2y^2+3by-y^2}{a(3by-y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6by-3y^2}{a\sqrt{3by-y^2}}$$

وهذه الطريقة طويلة ومعقدة ومن الأفضل وضعها في الصورة :-

$$x = \frac{y}{a} (3by-y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$U = \frac{y}{a} , \quad V = (3by-y^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ونعتبر :}$$

$$X = U \times V$$

ثم نستخدم قاعدة حاصل الضرب :

$$\therefore \frac{dX}{dY} = U \cdot \frac{dV}{dY} + V \cdot \frac{dU}{dY}$$

وسنصل لنفس الجواب .

Exercise "5"

فاضل الدوال التالية بقانون حاصل ضرب الدوال " وليس المجموع " .

- | | |
|---|------------|
| $(2x+1)(5x+2)$ | (١) |
| $(x^2+2)\left(\frac{x}{2}+1\right)$ | (٢) |
| $(2x-3)(x^2+3x)$ | (٣) |
| $(x^2+2)(3x^2-1)$ | (٤) |
| $(x^2-2x)(3x^2-x)$ | (٥) |
| $(x^2+x-1)(x+1)$ | (٦) |
| $(x^2-x+1)(x-1)$ | (٧) |
| $(x^2+3x-2)(x^2-3)$ | (٨) |
| $(x^2-2)(x^2+2)$ | (٩) |
| $(x^2-x+1)(x^2+x-1)$ | (١٠) |
| $(x-5)(x^2+5x+4)$ | (١١) |
| $(2x^2-3)(3x^2+2x-1)$ | (١٢) |
| $(x+1)(x-1)(x^2-1)$ | (١٣) |
| $(x+1)(2x+1)(3x+3)$ | (١٤) |
| $(ax^2+bx+c)(ux+5v)$ | (١٥) |
| $\sqrt{x} (2x+1)(x^2-2x+3)$ | (١٦) |
| $2\sqrt[3]{x^2} (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)$ | (١٧) |
| $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^2}$ | (١٨) |
| $ab x^2 \times c\sqrt{x^3}$ | (١٩) |

٦-٣ :- تفاضل القسمة Differentiation of a quotient

علمنا فيما سبق كيفية إيجاد المعامل التفاضلي للقسمة البسيطة مثل تفاضل $\frac{1}{x}$ وذلك من

المبادئ الأولية ، أى بطريقة Δ

إلا أن هذه الطريقة لا تفيد في الحالات الأصعب والمعقدة عن هذا المثال البسيط $\left(\frac{1}{x}\right)$

وسنقوم باستنباط قاعدة عامة لتفاضل قسمة دالتين كما يلي :-

نعتبر : $y = u \div v$

$$\therefore y + \Delta y = (u + \Delta u) \div (v + \Delta v)$$

$$\therefore \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} \quad \text{وبالطرح :-}$$

$$= \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

فإذا ما آلت Δx إلى الصفر ($\Delta x \rightarrow 0$) فإنه وبالتبعية ، تؤول كل من Δu , Δv , Δy للصفر كذلك .

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(v + \Delta v)}$$

وذلك من قواعد النهايات

وبذلك تؤول نهايات البسط إلى :-

$$v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}$$

وتكون نهاية المقام v^2 حيث أن : $\Delta v \rightarrow 0$ أيضاً .

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

أى أن تفاضل قسمة دالتين :-

$$\left[\frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{\text{مربع المقام}} \right]$$

أمثلة محلولة :-

مثال (١) :-

$$\left(\frac{2x}{2x-1} \right)$$

فاضل بالنسبة إلى x :

وذلك باستخدام قاعدة تفاضل قسمة دالتين السابقة :-

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

حيث $v = (2x-1)$, $u = 2x$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{[(2x-1) \cdot (2) - (2x) \cdot (2)]}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{4x-2-4x}{(2x-1)^2} = \frac{-2}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

مثال (٢) :-

$$y = \frac{(x^3+1)}{(x^3-1)}$$

فاضل بالنسبة إلى x :

باستخدام القاعدة السابقة

الحل :-

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^3-1) \times (3x^2) - (x^3+1) \times (3x^2)}{(x^3-1)^2} \\ &= \frac{3x^5-3x^2-3x^5+3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{-6x^5}{(x^3-1)^2} \end{aligned}$$

مثال (٣) :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة : $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}$, $x^2 \neq 2$

الحل :-

$$\begin{aligned} \because y &= \frac{u}{v} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2 - 2)(2x) - (x^2 + 2)(2x)}{(x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 4x - 2x^3 - 4x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 2)^2} \end{aligned}$$

مثال (٤) :-

أوجد المعامل التفاضلي الأول بالنسبة إلى x للدالة : $y = \frac{x}{x+1}$

الحل :-

$$\begin{aligned} \because y &= \frac{x}{x+1} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{[(1+x) \times 1] - [(x) \times 1]}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

مثال (٥) :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة : $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$

الحل :-

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{[\sqrt{x} \cdot (2x)] - \left[(x^2) \cdot \left(\frac{-1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) \right]}{x} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = 2.5\sqrt{x} \end{aligned}$$

مثال (٦) :-

$$y = \frac{4x^3 - 7x^2 - 2}{3x + 5}$$

أوجد المشتقة الأولى للدالة :

الحل :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{[(3x+5)(12x^2-14x)] - [(4x^3-7x^2-2)(3)]}{(3x+5)^2} \\ &= \frac{36x^3 - 42x^2 + 60x^2 - 70x - 12x^3 + 21x^2 + 6}{(3x+5)^2} \\ &= \frac{24x^3 + 39x^2 - 70x + 6}{(3x+5)^2}\end{aligned}$$

مثال (٧) :-

$$y = \frac{1}{x^5}$$

أوجد المشتقة الأولى للدالة :

الحل :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x^5 \times 0) - (1) \times (5x^4)}{(x^5)^2} \\ &= \frac{0 - 5x^4}{x^{10}} = \frac{-5}{x^6}\end{aligned}$$

مثال (٨) :-

$$f(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

أوجد تفاضل الدالة :

الحل :-

$$f(t) = \frac{t}{(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

وباستخدام قاعدة القسمة :-

$$\therefore f'(t) = \frac{(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot (1) - (t) \times \left[\frac{1}{2} (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2t \right]}{(t^2 - 1)}$$

ويمكن اختصار هذا الكسر بعدة طرق إلا أن أسهل طريقة هي بضرب كل من البسط

والمقام في $(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore f'(t) = \frac{(t^2 - 1) - t^2 (t^2 - 1)^0}{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

حيث : $(t^2 - 1)^0 = 1$

مثال (٩) :-

$$y = \frac{x(x-1)}{x^2 + 3x - 2}$$

أوجد مشتقة الدالة :

الحل :-

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2 + 3x - 2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 3x - 2)(2x - 1) - (x^2 - x)(2x + 3)}{(x^2 + 3x - 2)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 6x^2 - 4x - x^2 - 3x + 2 - 2x^3 - 3x^2 + 2x^2 + 3x}{(x^2 + 3x - 2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x + 2}{(x^2 + 3x - 2)^2}$$

مثال (١٠) :- أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = \frac{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 - 2}}{2x + 3}$$

الحل :- باستخدام قاعدة القسمة :-

$$y' = \frac{(2x + 3) \left[(x^2 + 2) \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 2}} \right) + (\sqrt{x^2 - 2})(2x) \right] - (x^2 + 2)(\sqrt{x^2 - 2})(2)}{(2x + 3)^2} =$$

$$= \frac{(2x + 3)[x^3 + 2x + 2x^3 - 4x]}{(2x + 3)^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2}} - \frac{(x^2 + 2)(x^2 - 2)}{(2x + 3)^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2x+3)(3x^3-2x)}{(2x+3)^2 \sqrt{x^2-2}} - \frac{(x^2+2)(x^2-2)}{(2x+3)^2 \sqrt{x^2-2}} = \\
&= \frac{6x^4 - 4x^2 + 9x^3 - 6x - x^4 + 2x^2 - 2x^2 + 4}{(2x+3)^2 \sqrt{x^2-2}} = \\
&= \frac{5x^4 + 9x^3 - 4x^2 - 6x + 4}{(2x+3)^2 \sqrt{x^2-2}}
\end{aligned}$$

$$y = \left(\frac{3x+2}{2x-1} \right)^4$$

مثال (١١) أوجد تفاضل الدالة :-

الحل :-

$$\begin{aligned}
y' &= 4 \left(\frac{3x+2}{2x-1} \right)^3 \left[\frac{(2x-1) \cdot (3) - (3x+2)(2)}{(2x-1)^2} \right] \\
&= 4 \left(\frac{3x+2}{2x-1} \right)^2 \frac{6x-3-6x-4}{(2x-1)^3} \\
&= \frac{4(3x+2)^3}{(2x-1)^5} \times (-7) = \frac{-28(3x+2)^3}{(2x-1)^5}
\end{aligned}$$

مثال (١٢) :- أوجد تفاضل الدالة :-

$$y = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

الحل :-

نضع الدالة في أبسط صورة لها بالضرب في المرافق :-

$$\begin{aligned}
\therefore y &= \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}} = \frac{(x+2) - 2\sqrt{x}\sqrt{x+2} + x}{(x+2) - x} \\
&= \frac{2x+2 - 2\sqrt{x^2+2x}}{2} = x+1 - \sqrt{x^2+2x}
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 + 0 - \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}} \times (2x+2) = 1 - \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$$

مثال (١٣) :- أوجد تفاضل الدالة :-

الحل :-

$$y = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right) &= \frac{(x^2 - 1)(2x) - (x^2 + 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \times (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال : - (١٤) : - أوجد تفاضل الدالة : -

$$y = \sqrt{2 - \frac{2}{x^2 + 2}}$$

الحل :-

$$V = x^2 + 2 \quad \text{نضع}$$

$$U = 2 - \frac{2}{x^2 + 2} \quad \text{نضع ،}$$

$$\therefore V = x^2 + 2$$

$$, U = 2 - \frac{2}{V}$$

$$\therefore Y = \sqrt{u}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} \times \frac{+2}{v^2} \times 2x$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2 - \frac{2}{x^2 + 2}}} \times \frac{2}{(x^2 + 2)^2} \times 2x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2x^2 + 4 - 2}{x^2 + 2}}} \times \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{2x^2 + 2}} \times \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{2x}{(2x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} (x^2 + 2)^{3/2}}$$

Exercise "6"

فاضل الدوال التالية في x :

$\frac{1}{(1-2x^2)} \quad (٢)$	$\frac{2}{(3x-1)} \quad (١)$
$\frac{(x-1)}{(x+2)} \quad (٤)$	$\frac{x}{(x-4)} \quad (٣)$
$\frac{(x+b)}{(x-b)} \quad (٦)$	$\frac{(3x-1)}{(2x+3)} \quad (٥)$
$\frac{x^2}{(x-3)} \quad (٨)$	$\frac{(x-b)}{(x+b)} \quad (٧)$
$\frac{\sqrt{x}}{(x-1)} \quad (١٠)$	$\frac{x^2}{(x^2-3)} \quad (٩)$
$\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} \quad (١٢)$	$\frac{(x-1)}{\sqrt{x}} \quad (١١)$
$\frac{(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)} \quad (١٤)$	$\frac{\left(\frac{3}{x}-1\right)}{\left(\frac{3}{x}+1\right)} \quad (١٣)$
$\frac{(1+x+x^2)}{x} \quad (١٦)$	$\frac{(2x^2-x+1)}{(3x^2+x-1)} \quad (١٥)$
$\frac{(3x-2)}{(2-3x)} \quad (١٨)$	$\frac{3x^2}{(b^2-x^2)} \quad (١٧)$
$\frac{\frac{1}{x^2}+2}{x^{3/2}} \quad (٢٠)$	$\frac{x(x-1)}{(x+2)} \quad (١٩)$

٦ - ٤ : - تفاضل دالة الدالة : Function of a Function

لكي نتفهم معنى دالة الدالة ، سنعتبر الدالة المثلثية $\sin^2 x$ أى $(\sin x)^2$ وهذه الدالة وهى مربع الدالة $\sin x$ أى دالة فى $\sin x$ بالضبط تماماً مثل x^2 دالة فى x ، الدالة v^2 دالة فى v إلا أن $\sin x$ هى نفسها دالة فى x .
وبذلك فإن $\sin^2 x$ دالة فى $\sin x$ ، $\sin x$ نفسها دالة فى x ومنها $\sin^2 x$ دالة فى دالة x .

وبالمثل فإن $\sqrt{x^2+3x}$ دالة فى x مثلما \sqrt{x} دالة فى x كما وأن x^2+3x هى نفسها دالة فى x .

وقد رأينا أن $\sin^2 x$ دالة فى دالة x إلا أن الأمر يختلف فى حالة $\sin^2 \sqrt{x}$.
حيث أن $\sin^2 \sqrt{x}$ دالة فى $\sin \sqrt{x}$ وهى بدورها دالة فى \sqrt{x} ، \sqrt{x} دالة فى x .
أى أن $\sin^2 \sqrt{x}$: (دالة فى دالة دالة x) .
كما وأن $\sin^2 \sqrt{3x}$ دالة فى $\sin \sqrt{3x}$ وهى دالة فى $\sqrt{3x}$ ، $\sqrt{3x}$ دالة فى $3x$ ،
 $3x$ دالة فى x .

أى أن $\sin^2 \sqrt{3x}$ (دالة فى دالة دالة دالة x) .
وسوف نكتفى بضرب هذه الأمثلة عن الدوال المثلثية حيث سنوردها فيما يلى من مواضع .

إلا أنه للوصول إلى قاعدة عامة لتفاضل دالة الدالة ، فسوف نعتبر الدالة $(x^2-3)^5$

$$u = (x^2 - 3) \quad \text{ولنعتبر}$$

$$\therefore y = u^5$$

$$\frac{dy}{du} = 5u^4$$

إلا أن المطلوب هو $\frac{dy}{dx}$ ولذلك فإننا نلجأ للطريقة التالية : -

سنعتبر أن x تزداد بمقدار ضئيل للغاية ويساوى Δx

، سنعتبر أن u تزداد بمقدار مناظر ضئيل للغاية ويساوى Δu

، سنعتبر أن y تزداد بمقدار مناظر ضئيل للغاية ويساوي Δy
وبذلك فإن : -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

فإذا أصبحت $\Delta x \rightarrow 0$ فإن كلاً من Δy ، Δu ستؤول للصفر كذلك
وبذلك فإن كل من المقادير التالية ستقترب من نهاية محددة وهي : -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta y}{\Delta u}, \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

وفي مثالنا السابق $y = u^5$

$$\therefore \frac{dy}{du} = 5u^4, \quad \because u = (x^2 - 3) \quad \therefore \frac{du}{dx} = 2x$$

وحيث أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5u^4 \times 2x = 10x(x^2 - 3)^4$$

أمثلة محلولة : -

$$y = \sqrt{2 - x^2}$$

مثال (١) : - فاضل المقدار :

الحل :-

$$y = (2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$u = (2 - x^2) \quad \text{ونعتبر}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = -2x$$

وحيث أن $u = (2 - x^2)$:

$$\therefore y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2-x^2}} \times -2x = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$$

مثال (٢) : - أوجد مشتقة الدالة :

$$y = (2x^3 - 3x^2 + 1)^6$$

الحل :-

$$u = (2x^3 - 3x^2 + 1) \quad \text{نضع}$$

$$\therefore y = u^6, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore u = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x^2 - 6x$$

$$\therefore y = u^5 \quad \therefore \frac{dy}{du} = 5u^4 = 5(2x^3 - 3x^2 + 1)^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5(2x^3 - 3x^2 + 1)^4 (6x^2 - 6x)$$

$$= 30x(2x^3 - 3x^2 + 1)^4 (x - 1)$$

$$y = (x^2 + 2)^3$$

مثال (٣) أوجد مشتقة الدالة : -

الحل :-

يمكن حل المسألة بطريقتين ، الطريقة الأولى بفك القوس ذو القوة 3

$$\therefore y = x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x^5 + 24x^3 + 24x$$

والطريقة الثانية هي طريقة دالة الدالة :

نضع $u = (x^2 + 2)$.

$$\therefore y = u^3, \quad \therefore \frac{dy}{du} = 3u^2$$

$$\therefore u = (x^2 + 2) \therefore \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (3u^2) \times (2x) = 6x(u^2) = 6x(x^2 + 2)^2 = 6x(x^4 + 4x^2 + 4) \\ = 6x^5 + 24x^3 + 24x$$

وهي بالطبع نفس الإجابة السابق الحصول عليها بالطريقة الأولى

مثال (٤) : - أوجد $\frac{dx}{dy}$ للدالة : -

$$y = \sqrt{\left(\frac{3}{x} - 2\right)}$$

الحل :-

نضع $u = \frac{3}{x} - 2$ ومنها :

$$\frac{du}{dx} = \frac{-3}{x^2}$$

$$\therefore y = u^{\frac{1}{2}} \therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3-2x}{x}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{3-2x}{x}}} \times \frac{-3}{x^2} = \frac{-3}{2x^2} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3-2x}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{-2x^2 \sqrt{3-2x}}{3\sqrt{x}}$$

وهي عبارة عن مقلوب $\frac{dy}{dx}$.

ويمكن الحل بالطريقة التالية : -

$$\therefore y = \sqrt{\frac{3}{x}-2} \quad \therefore y^2 = \frac{3}{x}-2$$

$$\therefore \frac{3}{x} = y^2 + 2 \quad \therefore x = \frac{3}{y^2 + 2}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{(y^2 + 2)(0) - 3(2y)}{(y^2 + 2)^2} = \frac{-6y}{(y^2 + 2)^2} = \frac{-6\left(\frac{3}{x}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{3}{x}-2\right)+2\right]^2} = \frac{-6\left(\frac{3}{x}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{3}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{-6x^2}{9} \left(\frac{3-2x}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{-2x^2}{3} \times \frac{\sqrt{3-2x}}{\sqrt{x}}$$

مثال (٥) : - إذا كانت $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ فأوجد y_2, y_3

الحل :-

$$y_2 = y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

وهي تعني التفاضل للتفاضل أو التفاضل الثاني

$$y_3 = y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

وهي تعني التفاضل الثالث .

وباستخدام قاعدة القسمة :-

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)(1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y_2 = \frac{(x^2 + 1)^2(-2x) - (1 - x^2) \times 2(x^2 + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{(2x^3 - 6x)}{(1 + x^2)^3}$$

$$y_3 = \frac{(1 + x^2)^3(6x^2 - 6) - (2x^3 - 6x) \times 3(1 + x^2)^2(2x)}{(1 + x^2)^6} = \frac{-6x^4 + 36x^2 - 6}{(x^2 + 1)^4}$$

مثال (٦) : - أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة : $y = (3x^2 + 5x)^3$

الحل :-

نضع $u = (3x^2 + 5x)$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x + 5$$

$$y = u^3 \quad \therefore \frac{dy}{du} = 3u^2 = 3(3x^2 + 5x)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 3(3x^2 + 5x)^2 (6x + 5) \end{aligned}$$

ويمكن التفاضل مباشرة كالتالي :-

$$\because y = (3x^2 + 5x)^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3(3x^2 + 5x)^{3-1} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 + 5x) = 3(3x^2 + 5x)^2 \times (6x + 5)$$

مثال (٧) :- أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة :-

$$y = (4x^2 + 5x - 1)^4 + (3x^3 + 2x - 3)^6$$

الحل :-

$$y = u^4 + v^6$$

بطريقة دالة الدالة : نضع

حيث $u = (4x^2 + 5x - 1)$

$$\therefore \frac{du}{dx} = (8x + 5)$$

$$v = (3x^3 + 2x - 3)$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = (9x^2 + 2)$$

$$y = u^4 + v^6 \quad , \quad \frac{dy}{du} = 4u^3 \quad , \quad \frac{dy}{dv} = 6v^5$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4u^3 \cdot (8x + 5) + 6v^5 \cdot (9x^2 + 2)$$

$$= 4(4x^2 + 5x - 1)^3 (8x + 5) + 6(3x^3 + 2x - 3)^5 (9x^2 + 2)$$

$$y = (x + 1)^3$$

مثال (٨) : - أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة

الحل :-

بالطريقة المباشرة ، ن فك القوس :

$$\therefore y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x + 3$$

وبطريقة دالة الدالة : -

$$y = u^3 \quad \text{حيث} \quad u = x + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = 3u^2, \quad \frac{du}{dx} = 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 1 = 3(x + 1)^2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3x^5 - 2x^3}}$$

مثال (٩) : - أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة :

الحل :-

$$u = 3x^5 - 2x^3 \quad \text{نضع}$$

$$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad \frac{dy}{du} = \frac{-1}{2u^{3/2}} = \frac{-1}{2\sqrt{(3x^5 - 2x^3)^3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^4 - 6x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{(3x^5 - 2x^3)^3}} \times (15x^4 - 6x^2)$$

مثال (١٠) أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = (x^2 - 2x + 3)^3$$

الحل :-

$$u = (x^2 - 2x + 3) \quad \text{نضع}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{du}{dx} &= (2x-2)=2(x-1) \\ , y=u^3 \therefore \frac{dy}{du} &= 3u^2 = 3(x^2-2x+3)^2 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 3(x^2-2x+3)^2 \cdot 2(x-1) \\ &= 6(x-1)(x^2-2x+3)^2\end{aligned}$$

وبمزيد من التدريب فإن الطالب يمكنه إجراء عملية التفاضل بسهولة وبدون الحاجة إلى
فرض قيمة U

والمثال السابق يعتبر نموذج للطالب لكي يبدأ في إجراء التفاضل بدون اللجوء لفرض
قيمة لـ U

إلا أننا يمكن مما سبق أن نستنتج التالي :-

[تفاضل أى مقدار جبرى مرفوع لأس = الأس مضروباً فى المقدار الجبرى مرفوعاً
(للأس - ١) ومضروباً فى تفاضل المقدار الجبرى] .
وبذلك فإن المثال السابق يمكن حله مباشرة كالتالى :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3(x^2-2x+3)^2 \times (2x-2) \\ &= 6(x-1)(x^2-2x+3)^2\end{aligned}$$

مثال (١١) :- أوجد المشتقة الأولى للدالة :-

$$y = (3x^2 - 2x + 5)^{3/2}$$

الحل :- يمكن الحل بدون فرض قيمة U ويكون الحل كالتالى :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} (3x^2 - 2x + 5)^{\frac{3}{2}-1} \times d.c.of (3x^2 - 2x + 5)$$

، $d.c.$ هى اختصار لكلمة المعامل التفاضلى :- differential coefficient

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} (3x^2 - 2x + 5)^{\frac{1}{2}} \times (6x-2)$$

$$= 3(3x-1)(3x^2-2x+5)^{\frac{1}{2}}$$

مثال (١٢) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = (x^2 + 2) \times \sqrt[3]{(x^2 - 3)}$$

الحل :- واضح أن y عبارة عن حاصل ضرب مقدارين أو دالتين لذلك سنلجأ للقاعدة

$$\therefore \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 2) \times \left(d.c.of \sqrt[3]{(x^2 - 3)} \right) + \left(\sqrt[3]{(x^2 - 3)} \right) \times \left[d.c.of (x^2 + 2) \right] \quad \dots\dots\dots (1)$$

ونعلم مما سبق أن $\sqrt[3]{x^2 - 3}$ هو دالة في $(x^2 - 3)$

، $(x^2 - 3)$ دالة في x أي أن $\sqrt[3]{x^2 - 3}$ هو دالة الدالة .

ومن الأفضل هنا إجراء تفاضلها منفصلاً ثم التعويض عنها بعد ذلك .

$$\therefore \frac{d}{dx} \sqrt[3]{(x^2 - 3)} = \frac{d}{dx} (x^2 - 3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (x^2 - 3)^{-\frac{2}{3}} \times (2x) = \frac{2x}{3(x^2 - 3)^{\frac{2}{3}}}$$

وبالتعويض في (1) عن هذه القيمة : -

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 2) \times \frac{2x}{3(x^2 - 3)^{\frac{2}{3}}} + (x^2 - 3)^{\frac{1}{3}} \times 2x$$

$$= \frac{2x(x^2 + 2)}{3\sqrt[3]{(x^2 - 3)^2}} + 2x\sqrt[3]{(x^2 - 3)}$$

ويمكن اختصار هذه النتيجة لتصبح :-

$$\frac{2x(x^2 + 2)(x^2 - 3)^{\frac{1}{3}}}{3(x^2 - 3)} + \frac{2x(x^2 - 3)^{\frac{4}{3}}}{(x^2 - 3)} \times \frac{3}{3}$$

$$= \frac{2x(x^2-3)^{\frac{1}{3}}[x^2+2+3(x^2-3)]}{3(x^2-3)} = \frac{2x\sqrt{(x^2-3)}(4x^2-7)}{3(x^2-3)}$$

مثال (١٣) :-

$$y = \frac{\sqrt{1+3x}}{4x}$$

أوجد المشتقة الأولى لهذه الدالة :

الحل :-

هذا المقدار على صورة دالة كسرية $\left(\frac{u}{v}\right)$ حيث :-

$$u = 1 + 3x, \quad v = 4x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4x[d.c \text{ of } (1+3x)] - [(1+3x) \times d.c \text{ of } (4x)]}{(4x)^2}$$

وقد عرفنا أن $\sqrt{1+3x}$ هو دالة في الدالة

$$\therefore \frac{d}{dx} (1+3x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (1+3x)^{-\frac{1}{2}} \times 3 = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\left[4x \times \frac{3}{2\sqrt{1+3x}} \right] - \left[\sqrt{1+3x} \times 4 \right]}{16x^2} = \frac{\frac{6x}{\sqrt{1+3x}} - 4\sqrt{1+3x}}{16x^2} \\ &= \frac{6x - 4(1+3x)}{16x^2 \sqrt{1+3x}} = \frac{-6x - 4}{16x^2 \sqrt{1+3x}} = -\frac{2+3x}{8x^2 \sqrt{1+3x}} \end{aligned}$$

٦-٥ :- تفاضل الدالة الضمنية :-

Differentiation of implicit functions

علمنا من تعريف الدوال أن الدالة الضمنية هي الدالة التي تتضمن حدودها كل من x , y ولا يمكن فصل أى منهما عن الآخر
أى أنه لا يمكن وضع الحدود المشتملة على y فى طرف والحدود المحتوية على x فى الطرف الآخر .

ومثال ذلك ، الدوال التالية :-

$$x^3 - 3x^2y + 5y^3 - 7 = 0$$

$$x \log y + y^2 = 4xy$$

وفى هذه الحالة فإنه يلزم أن تفاضل حداً بعد حد فى جميع حدود المعادلة على أن لا ننسى أنه عند التفاضل بالنسبة إلى y ، أنها ذاتها (أى y) دالة الدالة فى x

مثال (١) :-

$$x^2 - y^2 + 3x = 5y$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة التالية :

الحل :-

بالتفاضل :-

$$\therefore 2x - 2y \frac{dy}{dx} + 3 = 5 \frac{dy}{dx}$$

وبتجميع الحدود المشتملة على $\frac{dy}{dx}$

$$\therefore 2y \frac{dy}{dx} + 5 \frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} (2y + 5) = 2x + 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3}{2y + 5}$$

وواضح أن $\frac{dy}{dx}$ بدلالة كل من x , y وبمعرفة قيم x , y فإن القيمة العددية للمقدار

$\frac{dy}{dx}$ ، يمكن حسابها :-

والمثال التالى يوضح ذلك :-

مثال (٢) :-

أوجد ميل المماس للمنحنى : $x^2 + 3xy + y^2 = 6$ عند النقطة $(3, -3)$

الحل :-

نقوم بإجراء التفاضل كما بالمثال السابق ويجب أن لا نغفل عن أن xy عبارة عن

حاصل ضرب

وبالتفاضل :

$$\therefore 2x + \left(3y + 3x \frac{dy}{dx} \right) + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} (3x + 2y) = -(2x + 3y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-(2x + 3y)}{(3x + 2y)}$$

وعند النقطة $(3, -3)$ أى عندما $x = 3$, $y = -3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-(2 \times 3 + 3 \times -3)}{(3 \times 3 + 2 \times -3)} = \frac{-(-3)}{(3)} = 1$$

\therefore ميل المماس للمنحنى $= 1$ وهو يصنع زاوية 45° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

(X-axis)

Exercise "7"

احسب التفاضلات التالية :-

$$(3x+2)^2, (1-3x)^4, (2x+5)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (١)$$

$$\frac{1}{(1-3x)}, (2-3x)^2, \sqrt{1-2x} \quad \dots\dots\dots (٢)$$

$$(x^2-3)^5, (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \sqrt{2x^2-5} \quad \dots\dots\dots (٣)$$

$$\frac{1}{(1-3x^2)}, \sqrt{1-3x^2}, x\sqrt{1-2x^2} \quad \dots\dots\dots (٤)$$

$$\frac{1}{(4-x)}, \frac{1}{\sqrt{(4-x)}}, \frac{1}{(4-x)^2} \quad \dots\dots\dots (٥)$$

$$\frac{1}{(x^2-1)}, \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \dots\dots\dots (٦)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}, \sqrt{\frac{x}{(1-x)}}, \sqrt{\frac{(1-x)}{(1+x)}} \quad \dots\dots\dots (٧)$$

$$x \times \sqrt{\frac{(1-x)}{(1+x)}}, \sqrt[3]{(x^3+1)} \quad \dots\dots\dots (٨)$$

$$\sqrt{c^2+x^2}, \frac{1}{\sqrt{c^2+x^2}} \quad \dots\dots\dots (٩)$$

$$\sqrt{1-x+2x^2}, (1-3x^2)^n \quad \dots\dots\dots (١٠)$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{c^2-x^2}}, \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 \quad \dots\dots\dots (١١)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{\sqrt{1+4x}}{x} \quad \dots\dots\dots (١٢)$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{2x} \quad \dots\dots\dots (١٣)$$

$$x^2 \times \sqrt{2-x}, \frac{1}{\sqrt{3x^2-5x+2}} \quad \dots\dots\dots (١٤)$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}, x\sqrt{(3x+2)} \quad \dots\dots\dots (١٥)$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ من المعادلات الضمنية التالية :-

$$2x^2 + 5xy + 7y^2 = 7 \quad \dots\dots\dots (١٦)$$

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (١٧)$$

$$x^3 + y^3 = 3xy \quad \dots\dots\dots (١٨)$$

$$x^n + y^n = a^n \quad \dots\dots\dots (١٩)$$

(٢٠) أوجد الميل عند النقطة (1 , 1) الذى يصنعه مماس المنحنى

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 3 = 0$$

٦-٦ :- التفاضل المتتالي : Successive differentiation

اتضح لنا مما سبق أن العامل التفاضلى لدالة ما فى x عبارة عن دالة فى x كذلك ما لم تكن الدالة الأصلية دالة خطية من الدرجة الأولى فمثلا لو أن :

$$y = 5x^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 20x^3$$

وواضح أن $20x^3$ هى دالة فى x كذلك والأخيرة يمكن تفاضلها بالنسبة إلى x
 $\frac{d}{dx}(20x^3) = 60x^2$
ويُطلق على $60x^2$ لهذه الدالة ($y = 5x^4$) بالمعامل التفاضلى الثانى أو المشتقة الثانية للدالة الأصلية، ويعبر عنها كالتالى :-

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

ويستخدم الرمز $\frac{d^2y}{dx^2}$ للتعبير عن المعامل التفاضلى الثانى ويجب مراعاة أن (2) فى

الرمز $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ، فى كل من البسط والمقام ليستا أساً ولكنها تعنى أن الدالة الأصلية y

قد تم تفاضلها مرتين وفى كل مرة منهما ، بالنسبة إلى x

وبذلك فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تقيس المعدل الذى تتغير به $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة إلى x ، تماماً مثلما تُعبر

$\frac{dy}{dx}$ عن معدل تغير y بالنسبة إلى x

والمعامل التفاضلى الثانى ، هو دالة فى x ، إذا لم تكن $\frac{dy}{dx}$ دالة خطية أو ثابت

كما أنه يمكننا أن نفاضل $\frac{d^2y}{dx^2}$ بالنسبة إلى x ويُعرف الناتج بالمعامل التفاضلى الثالث

لـ y بالنسبة إلى x ويرمز لها بالرمز $\frac{d^3y}{dx^3}$. وبذلك فإنه يمكننا الإستمرار فى عمليات

تفاضل متتالية إلى أن يُصبح أحد معاملات التفاضل ، رقماً ثابتاً

وبذلك فإنه فى مثالنا السابق :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 60x^2, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 120x, \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = 120$$

أى أنه لا يمكننا إيجاد أكثر من المعامل التفاضلى الرابع للمثال المذكور .

فإذا اعتبرنا أن $y = x^n$

فإنه بالتفاضل المتتالى بالنسبة إلى x نحصل على :-

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

فإذا كانت n عدد صحيح موجب فإن هذه العملية يمكن أن تستمر حتى نصل إلى $(n-n)$ ، مساوية لقوة x

$$n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$$

ويصبح المعامل التفاضلى

أى يُصبح عبارة عن مضروب n " Factorial n أو $n!$ " ويكون التفاضل التالى هو الصفر .

أما إذا كانت n عدداً ليس صحيحاً موجباً فإن العملية يمكنها أن تستمر بدون نهاية .

ويتضح ذلك من المثال التالى :-

$$y = x^3 - 5x^2 + 2x - 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 10x + 2$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 6x - 10$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 6$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

٦ - ٧ : الرموز البديلة للمعاملات التفاضلية

Alternative notation For differential Coefficients

يُطلق كذلك على المعاملات التفاضلية المتتالية بالمشتقات أو بالدوال المشتقة للدالة الأصلية

ويمكن التعبير بالرموز التالية : -

(١) عند استخدام رمز الدالة : $f(x)$ or $\Phi(x)$ ، فإذا كانت $f(x)$ أو $\Phi(x)$ ترمز لدالة في x

$\therefore f'(x)$ or $\Phi'(x)$	ترمز للمعامل التفاضلي الأول
$f''(x)$ or $\Phi''(x)$	ترمز للمعامل التفاضلي الثاني
$f'''(x)$ or $\Phi'''(x)$	ترمز للمعامل التفاضلي الثالث
$f^{IV}(x)$ or $\Phi^{IV}(x)$	ترمز للمعامل التفاضلي الرابع
 وهكذا .

(٢) عند استخدام y كرمز للدالة في x

$\therefore y_1 =$ المعامل التفاضلي الأول
 $y_2 =$ المعامل التفاضلي الثاني
 $y_3 =$ المعامل التفاضلي الثالث

..... وهكذا .

أو قد نستخدم الرموز y, y', y'', y''', y^{IV} ، أحياناً .

٦ - ٨ : منحنيات الاشتقاق Derived curves

اتضح لنا مما سبق أن التفاضل المتتالي لدالة في x ينتج عنه مجموعة من المشتقات ، كل منها دالة في x

ويمكننا تمثيل هذه المشتقات بمنحنياتها حيث تنشأ منها علاقات محددة .

ولنعبر الدالة : - $y = x^2 - 4x + 3$

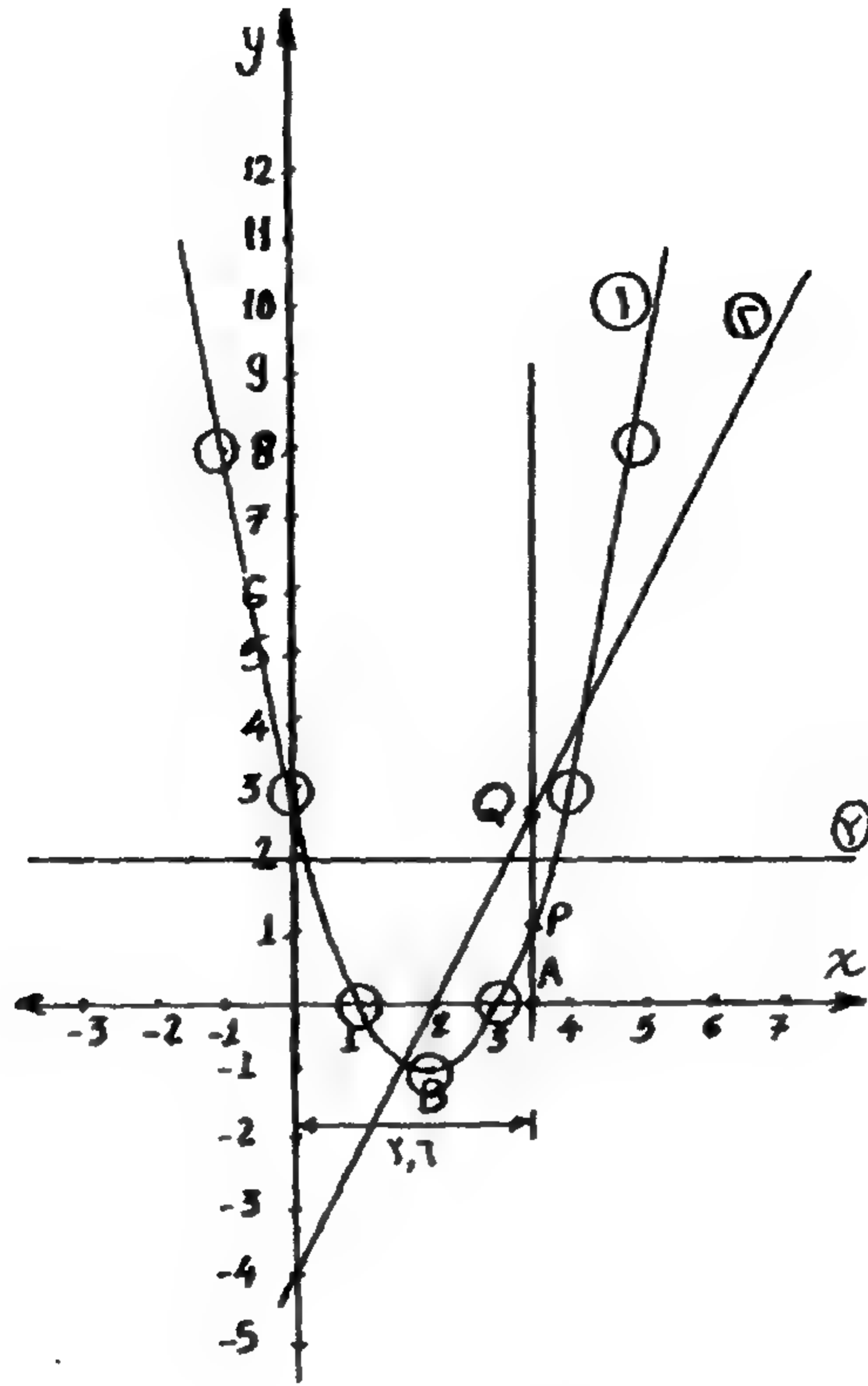
$$\therefore y_1 = 2x - 4 , y_2 = 2$$

ويوضح الشكل (٦-١) المنحنيات التالية : -

$$1) y = x^2 - 4x + 3$$

$$2) y_1 = 2x - 4$$

$$3) y_2 = 2$$



شكل (٦ - ١)

ويمكن ملاحظة العلاقات التالية بين المنحنى الأصلي ومشتقاته : -

(١) تعطى y_1 وهى دالة المشتقة الأولى ، معدل زيادة y بالنسبة إلى x ، وقيمتها عند أى قيمة نختارها لـ x ، تساوى الميل عند النقطة المناظرة على المنحنى فإذا أخذنا أى نقطة ولتكن A على المحور OX بحيث أن $x = 3.6$ ثم نرسم الخط الرأسى المار بـ A فيقطع المنحنى فى P ويقطع الخط المستقيم $[y_1 = 2x - 4]$ فى Q وبذلك فإن قيمة الإحداثى الرأسى QA تكون مساوية لميل المنحنى عند P ، وواضح من الرسم أنها حوالى 3.2 وحدة .

وبالحساب والتعويض عن قيمة $x = 3.6$ فى المعادلة $[y_1 = 2x - 4]$

فإن المعامل التفاضلى الأول يساوى : -

$$(2 \times 3.6 - 4) = 7.2$$

(٢) والرسم الذى يمثله y_2 أو التفاضل الثانى $y_2 = 2$ عبارة عن خط مستقيم موازياً لـ OX حيث تكون قيمة الإحداثى الصادى لأى نقطة عليه ثابتة وهو يوضح أن ميل $y_1 = 2x - 4$ ، رقم ثابت يساوى 2

(٣) وعند أسفل نقطة على المنحنى وهى نقطة B [المنحنى : $y = (x^2 - 4x + 3)$] فإن الإحداثى الصادى (الرأسى) عند النقطة المرادفة لـ B على المنحنى الممثل للتفاضل الأول $y_1 = 2x - 4$ تكون مساوية للصفر حيث أن $y_1 = 2x - 4$ يقطع محور OX عند هذه النقطة .

وبذلك فإن ميل الدالة الأصلية يساوى الصفر عندما $x = 2$ والمماس المرسوم للمنحنى عند B يكون موازياً لمحور السينات OX

(٤) لقيم x الأقل من 2 فإن الدالة $x^2 - 4x + 3$ تتناقص بينما قيم الدوال المشتقة تكون سالبة

ولقيم x الأكبر من 2 فإن الدالة $x^2 - 4x + 3$ تتزايد وتكون الدالة $2x - 4$ موجبة .

مسائل متنوعة محلولة : -

$$y = \frac{(x^2 + 2x)^5}{(x^4 + 3x - 1)^2} \quad (١) \text{ أوجد } \frac{dy}{dx} \text{ إذا كانت :}$$

الحل :-

يمكن حل هذه المسألة كحاصل قسمة أو كحاصل ضرب كالتالى : -

$$y = (x^2 + 2x)^5 \times (x^4 + 3x - 1)^{-2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 2x)^5 \times -2(x^4 + 3x - 1)^{-3} + (x^4 + 3x - 1)^{-2} \times 5 \times (x^2 + 2x)^4 \times (2x + 2)$$

ويمكن إختصار هذه الإجابة إلى أبسط صورة .

(٢) أوجد مشتقة الدالة : -

$$y = (x^3 - 6)^5$$

بالنسبة إلى x

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = 5(x^3 - 6)^4 \times \frac{d}{dx}(x^3 - 6) = 5(x^3 - 6)^4 \times 3x^2 = 15x^2(x^3 - 6)^4$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة إذا ما فككنا القوس المرفوع للأس 5 وأوجدنا المشتقة المطلوبة كحاصل جمع جبرى للحدود .

(٣) أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = (3x^2 + 2x)^{12}$$

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = 12(3x^2 + 2x)^{11} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 + 2x) = 12(3x^2 + 2x)^{11} \times (6x + 2).$$

(٤) أوجد مشتقة الدالة :-

$$u = \sqrt[4]{\frac{1}{y^5}} = y^{\frac{-5}{4}}$$

الحل :-

نضع الدالة فى الصورة الأسية بدلاً من الصورة الجذرية

$$\therefore u = y^{\frac{-5}{4}}$$

$$\therefore \frac{du}{dy} = \frac{-5}{4} y^{\frac{-5}{4}-1} = \frac{-5}{4} y^{\frac{-9}{4}} = \frac{-5}{4} \sqrt[4]{\frac{1}{y^9}}$$

$$f(x) = 3\sqrt[6]{x^5}$$

(٥) أوجد $f'(x)$ للدالة :

الحل :-

$$f(x) = 3x^{\frac{5}{6}}$$

$$\therefore f'(x) = 3 \times \frac{5}{6} \times x^{\frac{5}{6}-1} = \frac{5}{2} x^{\frac{-1}{6}} = \frac{5}{2} \sqrt[6]{\frac{1}{x}}$$

(٦) أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = \frac{ax^n - 5}{b}$$

الحل :-

$$y = \frac{a}{b}x^n - \frac{5}{b}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{an}{b}x^{n-1} - 0 = \frac{an}{b}x^{n-1}.$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة بكتابة :

$$y = \frac{1}{b}(ax^n - 5)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \cdot nax^{n-1} = \frac{an}{b}x^{n-1}$$

(٧) أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = a\sqrt{\frac{1}{x^b}}$$

الحل :- يمكن كتابة y هكذا :

$$y = x^{\frac{-b}{a}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-b}{a}x^{\frac{-b}{a}-1} = \frac{-b}{a}x^{-\left(\frac{b+a}{a}\right)}$$

(٨) أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = \sqrt{3x^3 - 5x + 2}$$

الحل :- يمكن كتابة الدالة y هكذا :-

$$y = (3x^3 - 5x + 2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x^3 - 5x + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(3x^3 - 5x + 2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3x^3 - 5x + 2}} \times (9x^2 - 5) = \frac{9x^2 - 5}{2\sqrt{3x^3 - 5x + 2}}$$

$$y = \sqrt{2x^3 + 3x}$$

(٩) أوجد مشتقة الدالة :

الحل :-

$$u = 2x^3 + 3x \quad \text{نضع}$$

$$\therefore y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore u = 2x^3 + 3x \quad \therefore \frac{du}{dx} = 6x^2 + 3$$

$$\therefore y = u^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 + 3x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 + 3x}} \times (6x^2 + 3)$$

ويمكن الحصول على الإجابة بسهولة وذلك بتربيع كل من الطرفين ثم نوجد مشتقة كل طرف بالنسبة إلى x :

$$\therefore y = \sqrt{2x^3 + 3x}$$

$$\therefore y^2 = 2x^3 + 3x$$

$$\therefore 2y \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(6x^2 + 3)}{2y} = \frac{(6x^2 + 3)}{2\sqrt{2x^3 + 3x}}$$

$$S = \sqrt[3]{(6-t)}$$

(١٠) أوجد مشتقة الدالة : -

الحل :- نُحول الجذر إلى أس كسرى

$$\therefore S = (6-t)^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{3} (6-t)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{d}{dt} (6-t) \\ &= \frac{1}{3} (6-t)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-1) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(6-t)^2}} \end{aligned}$$

$$f(t) = \sqrt[3]{2t^3 + 4t - 3}$$

(١١) إذا كانت

فأوجد $f'(t)$

الحل :-

$$f'(t) = \frac{df}{dt}$$

، نقوم بتحويل الجذر إلى أس كسرى

$$\therefore f(t) = (2t^3 + 4t - 3)^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(t) &= \frac{1}{3}(2t^3 + 4t - 3)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{d}{dt}(2t^3 + 4t - 3) \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(2t^3 + 4t - 3)^2}} \times (6t^2 + 4)\end{aligned}$$

(١٢) أوجد المشتقة الأولى للدالة :

$$y = \frac{1}{2x^3 - 3x^2 + 5x + 6}$$

الحل :-

$$\begin{aligned}y &= (2x^3 - 3x^2 + 5x + 6)^{-1} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= -1(2x^3 - 3x^2 + 5x + 6)^{-2}(6x^2 - 6x + 5) \\ &= \frac{-6x^2 + 6x - 5}{(2x^3 - 3x^2 + 5x + 6)^2}\end{aligned}$$

$$y = x^3 - 3\sqrt{2x^2 + 5}$$

(١٣) إذا كانت :

$$\frac{dy}{dx}$$

فأوجد

الحل :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3) - 3\frac{d}{dx}\sqrt{2x^2 + 5} \\ &= 3x^2 - 3 \times \frac{2x\sqrt{2x^2 + 5}}{2x^2 + 5} = 3x^2 - \frac{6x\sqrt{2x^2 + 5}}{2x^2 + 5}\end{aligned}$$

حيث :-

$$\frac{d}{dx}\sqrt{2x^2 + 5} = \frac{d}{dx}(2x^2 + 5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 5}} \times 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 5}}$$

(١٤) أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = 2 + \frac{3}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} - \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

الحل :- يمكن كتابة الدالة في الصورة الأسية كالتالى :-

$$y = 2 + 3x^{\frac{-1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{-3}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{2}x^{\frac{-3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}} + 3x^{\frac{-5}{2}} = \frac{-3}{2\sqrt{x^3}} + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x^5}}$$

(١٥) أوجد المشتقة السابعة للدالة : $y = x^7$

الحل :-

المشتقة الأولى : $7x^6$

المشتقة الثانية : $7 \times 6x^5$

المشتقة الثالثة : $7 \times 6 \times 5 x^4$

المشتقة الرابعة : $7 \times 6 \times 5 \times 4 x^3$

المشتقة الخامسة : $840 \times 3 x^2$

المشتقة السادسة : $2520 \times 2 x$

المشتقة السابعة : 5040

وواضح أن المشتقة الثامنة = صفر ولذلك فإن الدالة $y = x^7$ ، لها ثمانية مشتقات .

(١٦) أوجد مشتقة الدالة : $y = (x^2 - 5x)(3x + 2)$

الحل :-

نستخدم النظرية : $d(u.v) = u.dv + v.du.$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= (x^2 - 5x)(3) + (3x + 2)(2x - 5) \\ &= 3x^2 - 15x + 6x^2 - 15x + 4x - 10 \\ &= 9x^2 - 26x - 10 \\ y &= \frac{x^3}{\sqrt[3]{2x^2 - 1}} \end{aligned}$$

(١٧) أوجد تفاضل الدالة : -

الحل :-

نحول الصورة الجذرية إلى صورة أسية وهي تسمح لنا بتطبيق النظرية كالتالي : -

$$\therefore y = x^3(2x^2 - 1)^{\frac{-1}{3}}$$

وهي عبارة عن حاصل ضرب مقدارين

$$u = x^3, \quad V = (2x^2 - 1)^{\frac{-1}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$= x^3 \cdot \frac{-1}{3} (2x^2 - 1)^{\frac{-4}{3}} \cdot 4x + (2x^2 - 1)^{\frac{-1}{3}} \cdot 3x^2$$

$$= x^2 (2x^2 - 1)^{\frac{-4}{3}} \left[\frac{-4x^2 + 9(2x^2 - 1)}{3} \right]$$

$$= \frac{x^2}{3} (2x^2 - 1)^{\frac{-4}{3}} [14x^2 - 9]$$

$$= \frac{x^2 [14x^2 - 9]}{3\sqrt[3]{(2x^2 - 1)}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

(١٨) أوجد تفاضل الدالة :

الحل :-

يمكن حل هذه المسألة بكتابتها في الصورة :

$$x = (1 + y^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$u = 1 + y^2$$

ثم نضع

$$\therefore x = u^{\frac{-1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{du} = \frac{-1}{2} u^{\frac{-3}{2}}$$

$$\because u = 1 + y^2 \quad \therefore \frac{du}{dy} = 2y$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dy} = \frac{-1}{2} u^{\frac{-3}{2}} \cdot 2y \\ &= \frac{-1}{2} (1+y^2)^{\frac{-3}{2}} \cdot 2y \\ &= \frac{-y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}\end{aligned}$$

ويمكن حل هذه المسألة بتربيع الطرفين حيث نحصل على دالة ضمنية فى كل من x, y

$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\therefore x^2 = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\therefore x^2 + x^2 y^2 = 1$$

ثم نجرى التفاضل كالمعتاد بالنسبة إلى x ولا ننسى أن y دالة فى x وأن $x \cdot y$ مقدارين مضروبين فى بعضهما وكذلك $x^2 \cdot y^2$:

$$\therefore 2x + \left[x^2 \left(2y \frac{dy}{dx} \right) + y^2 \cdot (2x) \right] = 0$$

$$\therefore 2x + 2x^2 y \frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$$

$$\therefore 2x^2 y \frac{dy}{dx} = -2x - 2xy^2 = -2x(1+y^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2x(1+y^2)}{2x^2 y} = \frac{-(1+y^2)}{xy}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dx}{dy} &= \frac{-xy}{(1+y^2)} = \frac{-1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{y}{(1+y^2)} \\ &= \frac{-y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}\end{aligned}$$

$$y = \frac{9x^2}{3x-2} - (x-3)(3x-1)$$

(١٩) أوجد تفاضل الدالة : -

الحل :- فى هذه المسألة ، نستخدم قاعدة القسمة للحد الأول وحاصل الضرب للحد الثانى ، هكذا :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(3x-2)(18x) - 9x^2(3)}{(3x-2)^2} - [(x-3)(3) + (3x-1)(1)] \\ &= \frac{54x^2 - 36x - 27x^2}{(3x-2)^2} - (3x - 9 + 3x - 1) \\ &= \frac{27x^2 - 36x}{(3x-2)^2} - (6x - 10)\end{aligned}$$

وبتوحيد المقامات :-

$$= \frac{27x^2 - 36x - (6x - 10)(3x - 2)^2}{(3x - 2)^2}$$

ويمكن إختصار هذه النتيجة .

$$y = \left[\sqrt{x-2} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right]^5$$

(٢٠) أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة :

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = 5 \left[\sqrt{x-2} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right]^4 \times d.c.of \left[\sqrt{x-2} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right]$$

$$d.c.of \left[\sqrt{x-2} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right] = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \times 1 - \frac{1}{\sqrt{(x-2)^3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5 \left[\frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-2} + 2}{\sqrt{x-2}} \right]^4 \left[\frac{(x-2) - 2}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= 5 \left[\frac{x-2+2}{\sqrt{x-2}} \right]^4 \left[\frac{x-4}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= \frac{5x^4}{2(x-2)^2} \frac{(x-4)}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5x^4(x-4)}{2(x-2)^{\frac{7}{2}}}$$

(٢١) أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

الحل :- نضع الدالة فى الصورة الأسية كالتالى : -

$$y = \left\{ x + \left[x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

وهنا يلزم إجراء عملية تفاضل متسلسل (بالتتابع) chain rule

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \left\{ x + \left[x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ x + \left[x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ x + \left[x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \times \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx} \left[x + (x)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ x + \left[x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \times \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[1 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \\ &= \left[\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \right] \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$y = (x^2 + 2x + 1)^3$$

$$x = 3t^2 + 2t - 1$$

(٢٢) إذا كانت

وكانت : -

$$\frac{dy}{dt} \quad \text{فأوجد}$$

الحل :-

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3(x^2 + 2x + 1)^2 \cdot (2x + 2) = 6(x + 1)(x^2 + 2x + 1)^2$$

$$\frac{dx}{dt} = 6t + 2 = 2(3t + 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dt} &= 6(x+1)(x^2 + 2x + 1)^2 \times 2(3t+1) \\ &= 12(x+1)(x^2 + 2x + 1)^2 (3t+1) \end{aligned}$$

(٢٣) أوجد المشتقة النونية للدالة : -

$$y = \frac{1}{2x+3}$$

الحل :-

$$y = (2x+3)^{-1}$$

$$y' = -1(2x+3)^{-2} \times 2 = -2(2x+3)^{-2} \quad \text{والمشتقة الأولى : -}$$

$$y'' = 4(2x+3)^{-3} \times 2 = 8(2x+3)^{-3} \quad \text{والمشتقة الثانية : -}$$

$$y''' = -24(2x+3)^{-4} \times 2 = -48(2x+3)^{-4} \quad \text{والمشتقة الثالثة : -}$$

$$y^{IV} = 192(2x+3)^{-5} \times 2 = 384(2x+3)^{-5} \quad \text{والمشتقة الرابعة : -}$$

ولإيجاد المشتقة النونية يُلاحظ مايلي :-

(١) أن المشتقات تبادلية الإشارة أى أنها مرة موجبة والأخرى سالبة وأن ترتيب المشتقات (الأولى ، والثالثة ، والخامسة ،) عندما يكون فردياً فإن قيمة المشتقة تكون سالبة . وعندما يكون ترتيبها زوجياً فإن قيمة المشتقة موجبة

وبذلك فإنه يمكن التعبير عن الخاصية السابقة للمشتقة النونية بأنها $(-1)^n$ فمثلاً عندما

$$n=3 \text{ وهى فردية فإن الإشارة تُصبح سالبة : } (-1)^3 = -1$$

(٢) معامل المشتقة كالتالى (بإهمال الإشارات) :

$$2, 8, 48, 384, \dots$$

$$2 = 2^1 \cdot 1! = 2^n \times n! \quad \text{المشتقة الأولى [عندما } n=1 \text{] :}$$

$$8 = 2^2 \cdot 2! = 2^n \times n! \quad \text{المشتقة الثانية [عندما } n=2 \text{] :}$$

$$48 = 2^3 \cdot 3! = 2^n \times n! \quad \text{المشتقة الثالثة [عندما } n=3 \text{] :}$$

$$384 = 2^4 \cdot 4! = 2^n \times n! \quad \text{المشتقة الرابعة [عندما } n=4 \text{] :}$$

(٣) عند أخذ قوة أو أس المقدار $(2x+3)$ في الاعتبار :-

$$(2x+3)^{-2} = \frac{1}{(2x+3)^2} = \frac{1}{(2x+3)^{n+1}} \quad \text{المشتقة الأولى ، } n=1 :-$$

$$(2x+3)^{-3} = \frac{1}{(2x+3)^3} = \frac{1}{(2x+3)^{n+1}} \quad \text{المشتقة الثانية ، } n=2 :-$$

$$(2x+3)^{-4} = \frac{1}{(2x+3)^4} = \frac{1}{(2x+3)^{n+1}} \quad \text{المشتقة الثالثة ، } n=3 :-$$

$$(2x+3)^{-5} = \frac{1}{(2x+3)^5} = \frac{1}{(2x+3)^{n+1}} \quad \text{المشتقة الرابعة ، } n=4 :-$$

ومما سبق سنجد أن المشتقة النونية للمقدار $\frac{1}{2x+3}$ هي :-

$$f^n(x) = (-1)^n \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2x+3)^{n+1}}$$

مثال :-

المشتقة الثالثة للمقدار ذاته تساوى :

$$\begin{aligned} f^3(x) &= (-1)^3 \cdot \frac{2^3 \cdot 3!}{(2x+3)^{3+1}} = \frac{-1 \times 8 \times (3 \times 2 \times 1)}{(2x+3)^4} \\ &= \frac{-48}{(2x+3)^4} \end{aligned}$$

Exercise "8"

اكتب المشتقة الأولى والثانية والثالثة للدوال الآتية فى x :

$$x^2 (2x-3) \quad \dots\dots\dots (١)$$

$$x^{2a} \quad \dots\dots\dots (٢)$$

$$3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \quad \dots\dots\dots (٣)$$

$$2x^5 - 3x^3 + 4x - 1 \quad \dots\dots\dots (٤)$$

$$\frac{1}{x} \quad \dots\dots\dots (٥)$$

$$\sqrt{x} \quad \dots\dots\dots (٦)$$

$$\sqrt{2x+1} \quad \dots\dots\dots (٧)$$

$$\frac{1}{x^2} \quad \dots\dots\dots (٨)$$

$$(٩) \text{ أوجد المعامل التفاضلى من الرتبة "n" للمقدار } \frac{1}{a^2 - x^2}$$

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] \quad \text{ملحوظة :}$$

$$f(x) = 6x^2 - 5x + 3 \quad (١٠) \text{ إذا كانت :-}$$

فأوجد $f'(0)$ وما هى قيمة x التى تجعل $f'(0) = 0$ وما هى النقطة المناظرة على المنحنى $f(x)$.

(١١) أوجد قيمة x التى يكون عندها ميل المنحنى :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 1$$

مساوياً للصفر وما هى قيمة x التى يكون عندها ميل $f'(x)$ مساوياً للصفر وما هى قيمة $f'(x)$ المناظرة .

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7 \quad (١٢) \text{ إذا كانت :}$$

فأوجد $f'(1)$ ، $f''(2)$ وعند أى قيمة لـ x تتلاشى قيمة $f'(x)$.

الباب السابع

النهايات العظمى والصغرى للدوال فى متغير واحد ، نقط الانقلاب

**Maxima and minima values of
univariate functions ,
points of inflexion**

٧-١ : عام :-

درسنا فيما سبق كيفية إيجاد المشتقة الأولى والثانية وكذلك المشتقات العليا لـ y دالة ، وسنرى فى هذا الباب أهمية المشتقة الأولى وكيفية الاستفادة منها فى فهم أكثر للدوال ذات المتغير الواحد المستقل أى التى على الصورة :- $y = f(x)$ حيث تؤثر قيم x المختلفة فى قيمة الدالة ككل (y) .

وسنرى أن أى دالة من هذا النوع تكون إما :-

(أ) متزايدة increasing (ب) متناقصة decreasing (ج) ثابتة لحد stationary وذلك خلال فترة أو مدى محدد لقيم المتغير المستقل x .

أو قد تكون الدالة بحيث يجتمع فيها كل ما سبق أى متزايدة فى جزء ومتناقصة فى آخر وثابت فى جزء ثالث وفى خلال المدى المحدود x .

كما يهدف هذا الباب إلى كيفية تحديد القيم (الحرجة) - critical values لـ x والتى تكون عندها الدالة y قيمة عظمى أو صغرى أو ثابتة وذلك حيث أنه فى جميع فروع العلم المختلفة وتطبيقاتها العملية ، تُترجم المشاكل العملية إلى معادلات رياضية ونحتاج عادة إلى تحديد أقصى قيمة أو أقل قيمة لمتغير ما فى عمليات الإنتاج أو التصنيع أو التسويق .

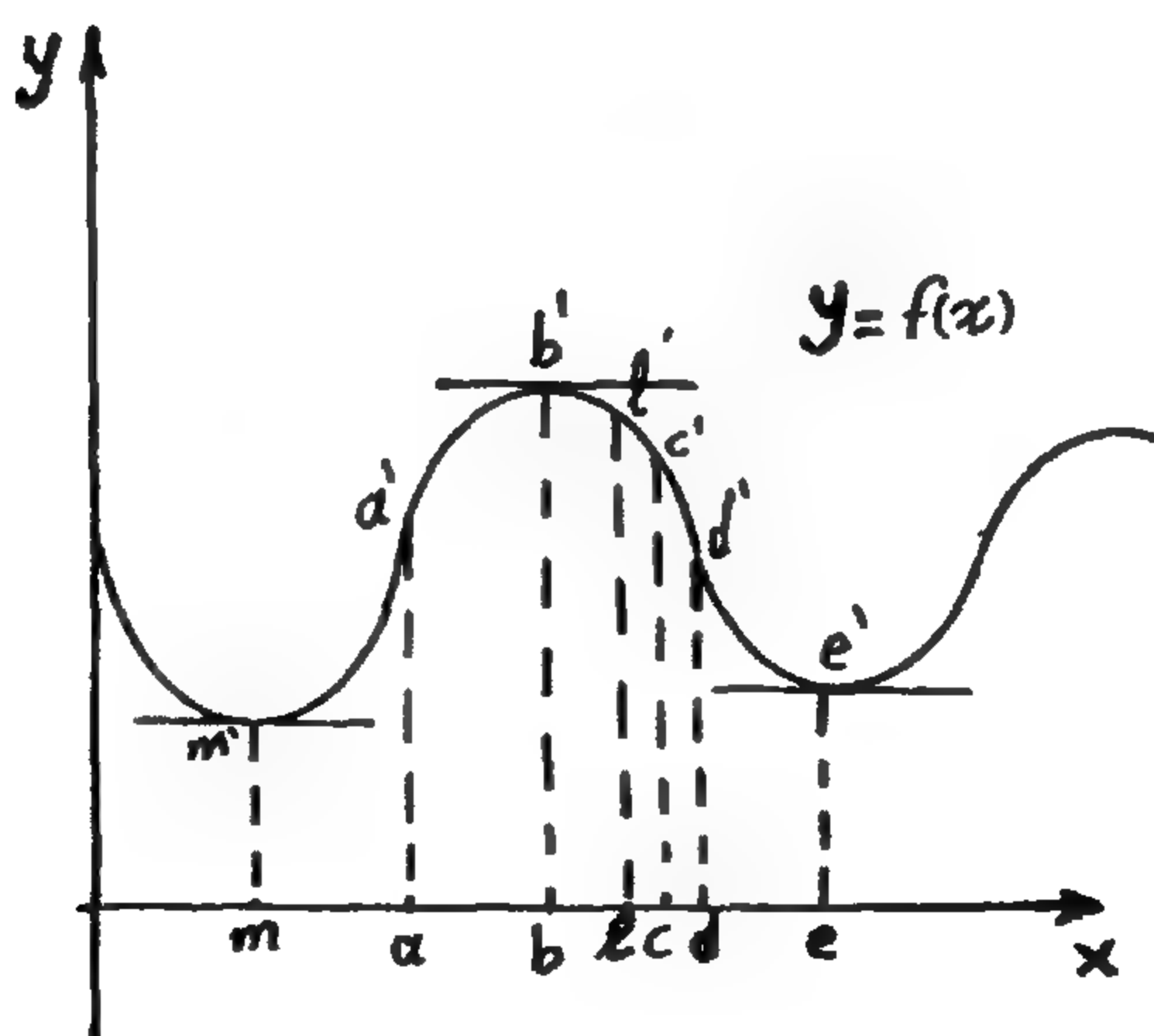
فإذا كانت لدينا العلاقة (العملية) على شكل دالة $y = f(x)$ فى متغير واحد x ، حيث y تمثل حجم الإنتاج الأمثل الذى يحقق أقل تكلفة إنتاج ، x تمثل تكلفة ، فإن الأمر يتطلب معرفة أقصى حجم إنتاج (نهاية عظمى - قيمة عظمى) ممكن بأقل تكلفة إنتاج (نهاية صغرى - قيمة صغرى) .

أو تحديد أقصى سعر للمنتج أو أقصى كمية مبيعات عند أقل تكلفة أجور أو أقل زمن تشغيل وهكذا ، والأمثلة في هذا الصدد ، لا حصر لها .
والآن سنبدأ في دراسة متعمقة وبشيء من التفصيل للدالة $y = f(x)$ ومشتقاتها الأولى والثانية .

٧-٢: تزايد وتناقص الدالة

(١) إذا أخذنا قيمة x أكبر بقليل من a وكانت $f(x)$ أكبر من $f(a)$ وفي نفس الوقت إذا أخذنا قيمة x أقل بقليل من a وكانت $f(x)$ أقل من $f(a)$ فإنه يقال أن الدالة $f(x)$ ، في هذه الحالة ، دالة متزايدة عند $x = a$
(٢) أما إذا أخذنا قيمة x أكبر بقليل من a وكانت $f(x)$ أقل من $f(a)$ وفي نفس الوقت إذا أخذنا قيمة x أقل بقليل من a وكانت $f(x)$ أكبر من $f(a)$ فإنه يقال أن الدالة $f(x)$ ، في هذه الحالة ، دالة متناقصة عند $x = a$
مثال :-

الدالة المبينة في شكل (٧-١) متزايدة عند $x = a$ وذلك واضح من أن المنحنى على يمين النقطة a يقع فوقها بينما المنحنى على يسار a يقع تحتها



شكل (٧-١)

وهذا واضح فى نقط المنحنى التى إحداثيها الصادى aa' أو قريباً منه أى فى نطاق جزء المنحنى الذى إحداثيه الصادى يعادل تقريباً إرتفاع $k'l$ أما إذا أخذنا نقط أخرى خارج جزء المنحنى $k'l$ مثل نقطة c' فإن الأمر يختلف حيث أن c' تقع على يمين النقطة a' ولكن تحتها ، فى حين تقع النقطة h' على يسار a' ولكن فوقها .

وبدراسة الدالة المبينة ، سنجد أنها تتناقص عند $x=d$ حيث أنه بجوار النقطة d' تكون نقط المنحنى التى على يمينها تحتها مثل (e') بينما النقط التى على يسارها مثل c' تكون فوقها كما وأن الدالة متناقصة كذلك عند $x=c$

فى حين أن الدالة عند النقط $(x=m, x=b, x=e)$ ، تكون لا متزايدة ولا متناقصة (ساكنة stationary)

حيث تكون للدالة عند $(x=m, x=e)$ نهاية صغرى بينما عند $(x=b)$ تكون نهاية عظمى

(٣) ويُطلق على الدالة بأنها متزايدة فى الفترة (a, b) ، إذا كانت تتزايد عند كل نقطة من النقط الداخلية للفترة فيما بين a, b ويمكن للدالة تحت هذا التعريف أن لا تتزايد عند حدى الفترة أو عند أحد حديها .

(٤) ويُطلق على الدالة بأنها متناقصة فى الفترة (a, b) ، إذا كانت تتناقص عند كل نقطة من النقط الداخلية للفترة فيما بين a, b ويمكن للدالة تحت هذا التعريف أن لا تتناقص عند مدى الفترة أو عند أحد حديها .

(٥) تتناقص الدالة الموضحة بالشكل فى الفترة (l, d) حيث أنها تتناقص عند كل نقطة داخل الفترة ، وكذلك عند حديها (l, d)

(٦) تتناقص الدالة الموضحة بالشكل فى الفترة (b, e) حيث أنها تتناقص عند كل نقطة داخل الفترة إلا أنها لا تتناقص عند حدى الفترة (b, e)

(٧) تتزايد الدالة فى الفترة (m, b)

(٨) غير أن الدالة لا تتزايد ولا تتناقص في الفترة (a, d) لأنها في الفترة (a, b) وهي جزء من الفترة الكلية (a, d) تكون متزايدة ، بينما في الفترة (b, d) تكون متناقصة .

(٩) إذا كانت الدالة تتزايد في الفترة (a, b) فإنه كلما ازدادت قيمة المتغير المستقل (x) ، كلما ازدادت قيم الدالة المناظرة له (y) وبالعكس فإنه إذا ازدادت قيم الدالة (y) كلما ازدادت قيم المتغير المستقل (x) في الفترة (a, b) فإن الدالة تكون متزايدة في الفترة (a, b) .

(١٠) وإذا كانت الدالة تتناقص في الفترة (a, b) فإنه كلما ازدادت قيمة المتغير المستقل (x) ؛ قلت قيمة الدالة المناظرة له (y) ؛ وبالعكس .
وهندسياً :-

يرتفع منحنى الدالة في الفترة أو الفترات التي تتزايد فيها الدالة كلما تحركنا إلى اليمين ، وينخفض في تلك الفترة أو الفترات التي تتناقص فيها الدالة .

٧-٣ :- إشارات المشتقة الأولى ودلائل تزايد وتناقص وثبوت الدالة عند نقطة

Sign of the differential coefficient

إذا كانت (y) دالة متصلة في (x) وزادت (x) بمقدار ضئيل للغاية مقداره (Δx) فإن الدالة (y) إما أن تتزايد أو تتناقص بمقدار (Δy) .

أ) فإذا ازدادت (y) : فإن (Δy) تكون موجبة ، (Δx) موجبة دائماً (فرضاً) وبذلك فإن معدل التغير والذي يمكن التعبير عنه بنهاية المقدار $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ أو $\frac{dy}{dx}$ وتكون موجبة .

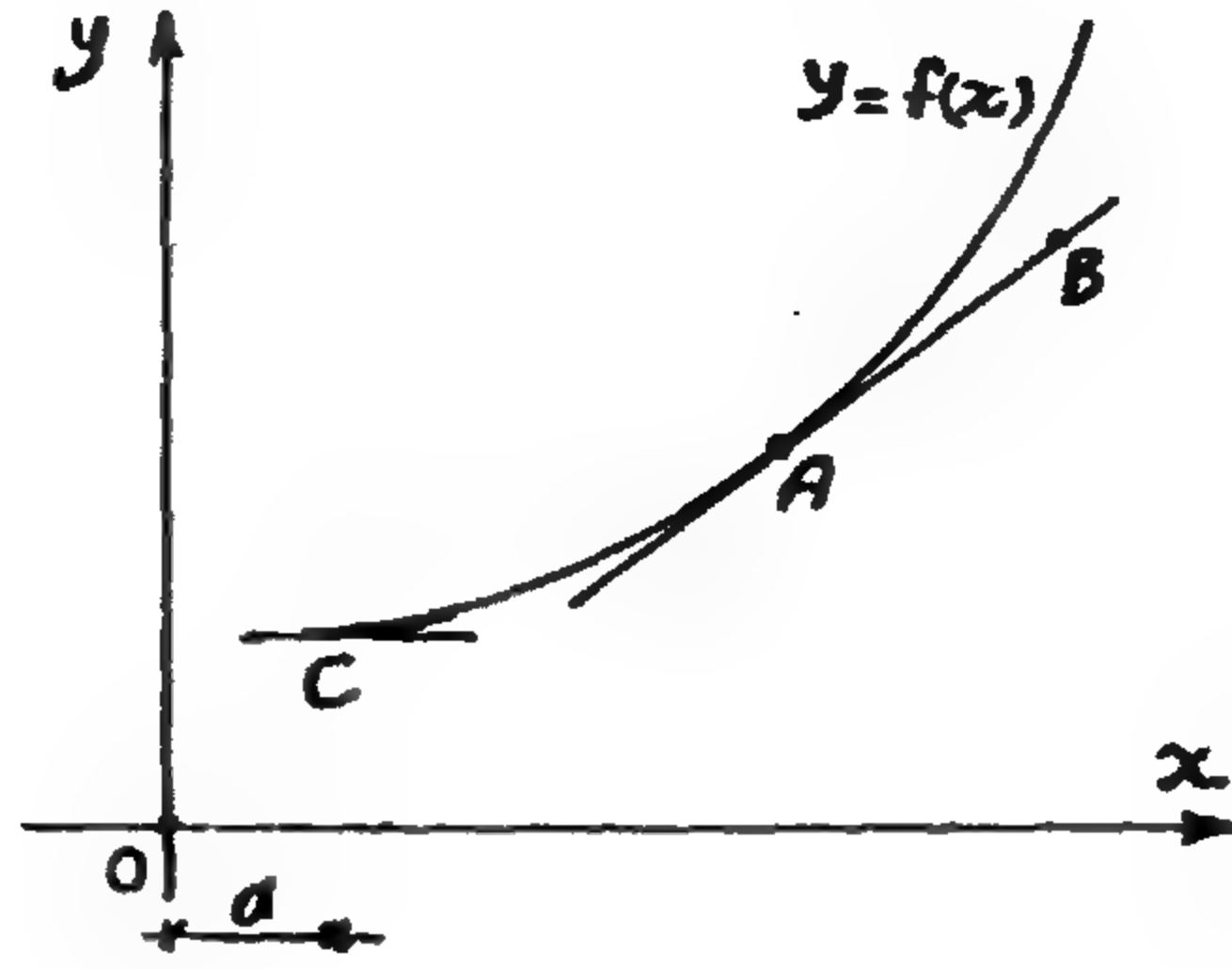
ب) وإذا تناقصت (y) : فإن (Δy) تكون سالبة وبذلك فإن $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تكون سالبة .

أى أن :-

١- لو ازدادت (y) بزيادة (x) فإن $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تكون موجبة .

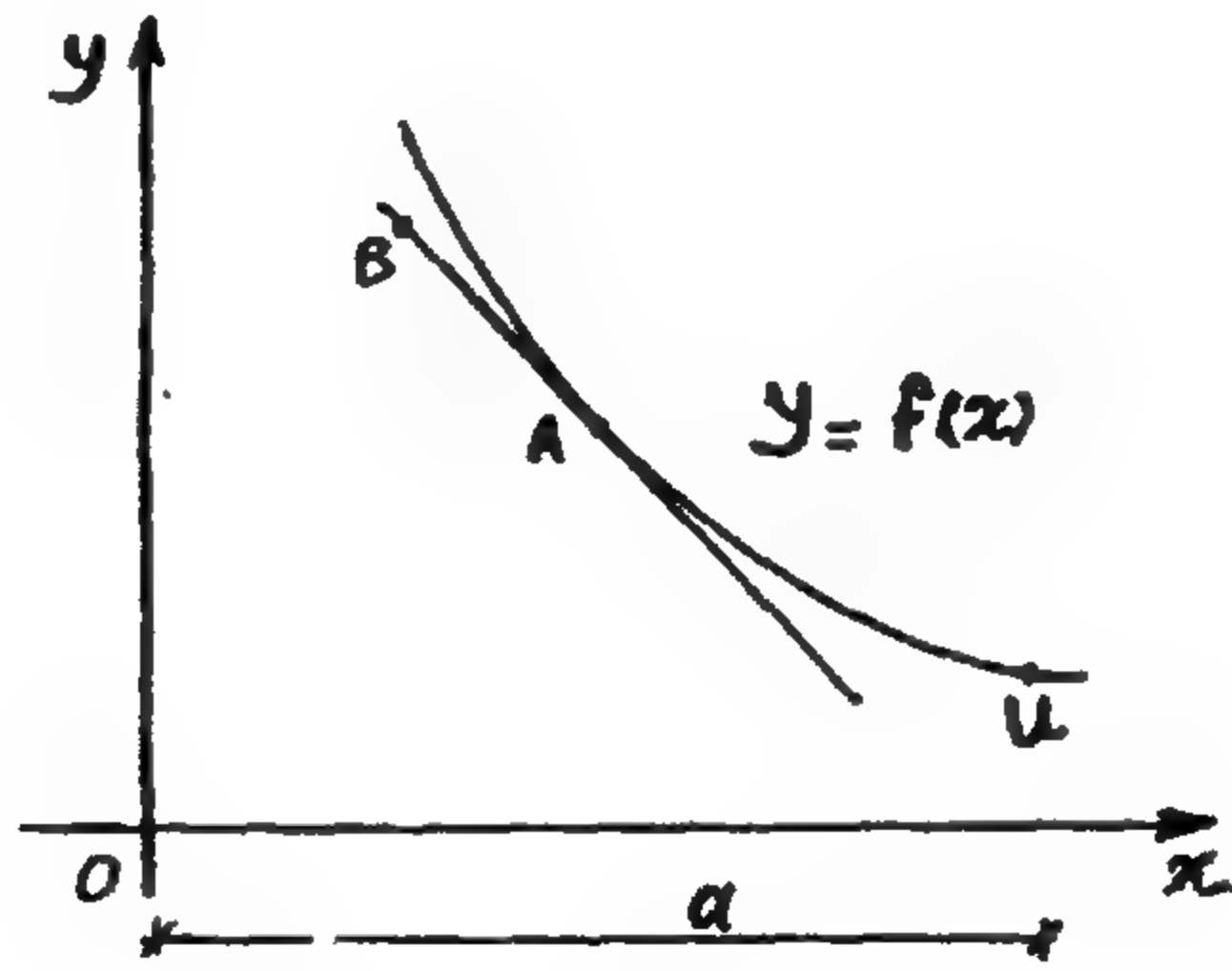
٢- لو نقصت (y) بزيادة (x) فإن $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تكون سالبة .

وهندسياً :- فإنه إذا كان ميل المماس AB موجباً، أنظر الشكل (٧-٢) فإنه



شكل (٧-٢)

بالقرب من النقطة A ، يقع المنحنى إلى يمين النقطة A وفوقها؛ وإلى يسارها تحتها
أما إذا كان ميل المماس AB سالباً، أنظر شكل (٧-٣) فإنه بالقرب من النقطة A يقع



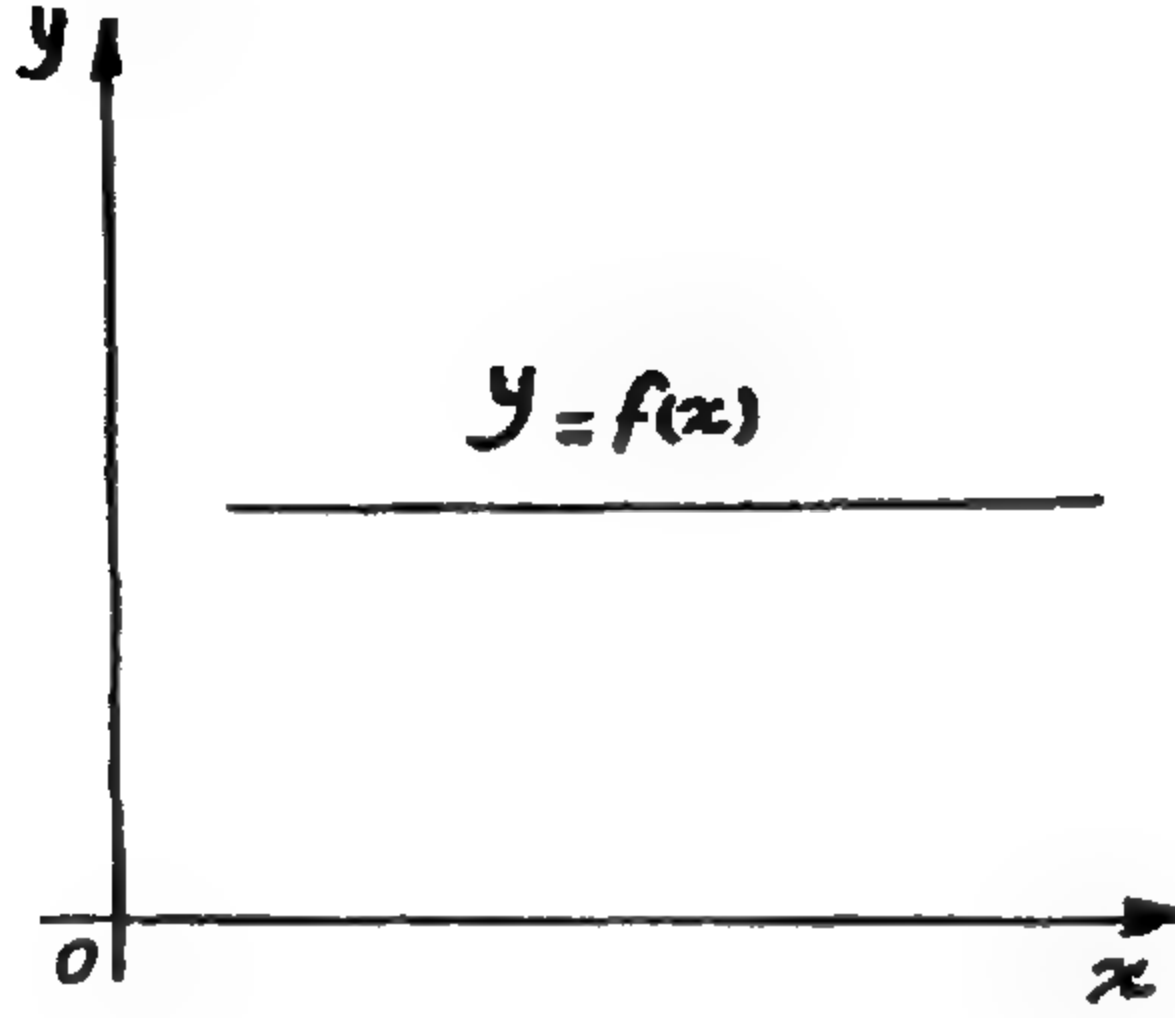
شكل (٧-٣)

المنحنى إلى يمين النقطة A تحتها وإلى يسارها، فوقها.

وإذا كانت الدالة عند نقطة $x = a$ ، لها مشتقة أولى تساوى الصفر؛ $f'(a) = 0$ فإن
الدالة عند النقطة $x = a$ يمكن أن تكون إما :-

متزايدة كما في الشكل الأول (٧-٢)، النقطة c

متناقصة كما في الشكل الثاني (٧-٣) ، النقطة u
 وكقاعدة فإن الدالة عند النقطة $x=a$ ، لاهى متزايدة ولا متناقصة كما في شكل
 (٧-٤) .

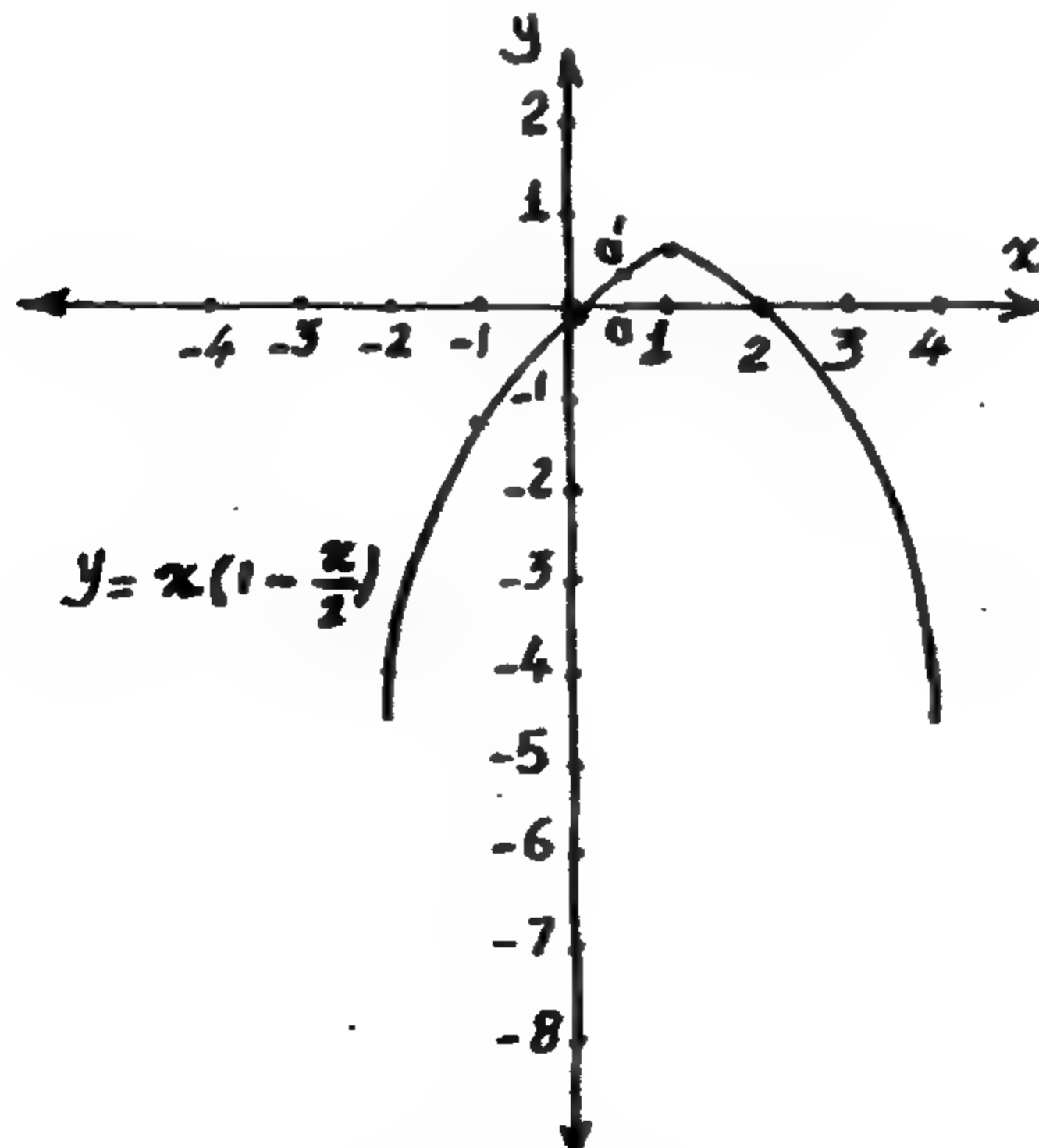


شكل (٧-٤)

ويُطلق على الدالة في هذه الحالة ، بدالة ساكنة Stationary

مثال (١) :-

الدالة $y = x\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ ، كما هو موضح في شكل (٧-٥)



شكل (٧-٥)

تزايد عند النقطة $x=0$ وذلك لأنه :

$$y = x - \frac{x^2}{2} \quad \therefore y' = 1 - x$$

وبوضع $x=0$ فى y' :-

$$\therefore y' = 1 - x = 1 - 0 = 1$$

أى أن $y' > 0$

كما أن هذه الدالة تتناقص عندما $x=2$ لأن :-

$$y' = 1 - 2 = -1$$

أى أن $y' < 0$.

فى حين أنه فى النقطة $x=1$ ، نجد أن :

$$y' = 1 - 1 = 0$$

وبذلك فإن الدالة ساكنة أى لا متزايدة ولا متناقصة .

وعليه فإن :-

(١) إذا كانت الدالة $y = f(x)$ تزايد عند النقطة $x=a$ فإن مشتقتها (بفرض أنها

قابلة للتفاضل فى هذه النقطة) ، عند هذه النقطة $(x=a)$ تكون موجبة كما فى شكل

(٧-٢) النقطة A أو تكون المشتقة مساوية للصفر كما فى نقطة (c) بنفس الشكل

$$\therefore f'(a) \geq 0$$

(٢) وبالمثل فإنه بالنسبة للدالة المتناقصة ، فإن مشتقتها تكون سالبة أو مساوية للصفر

فى هذه النقطة $(x=a)$

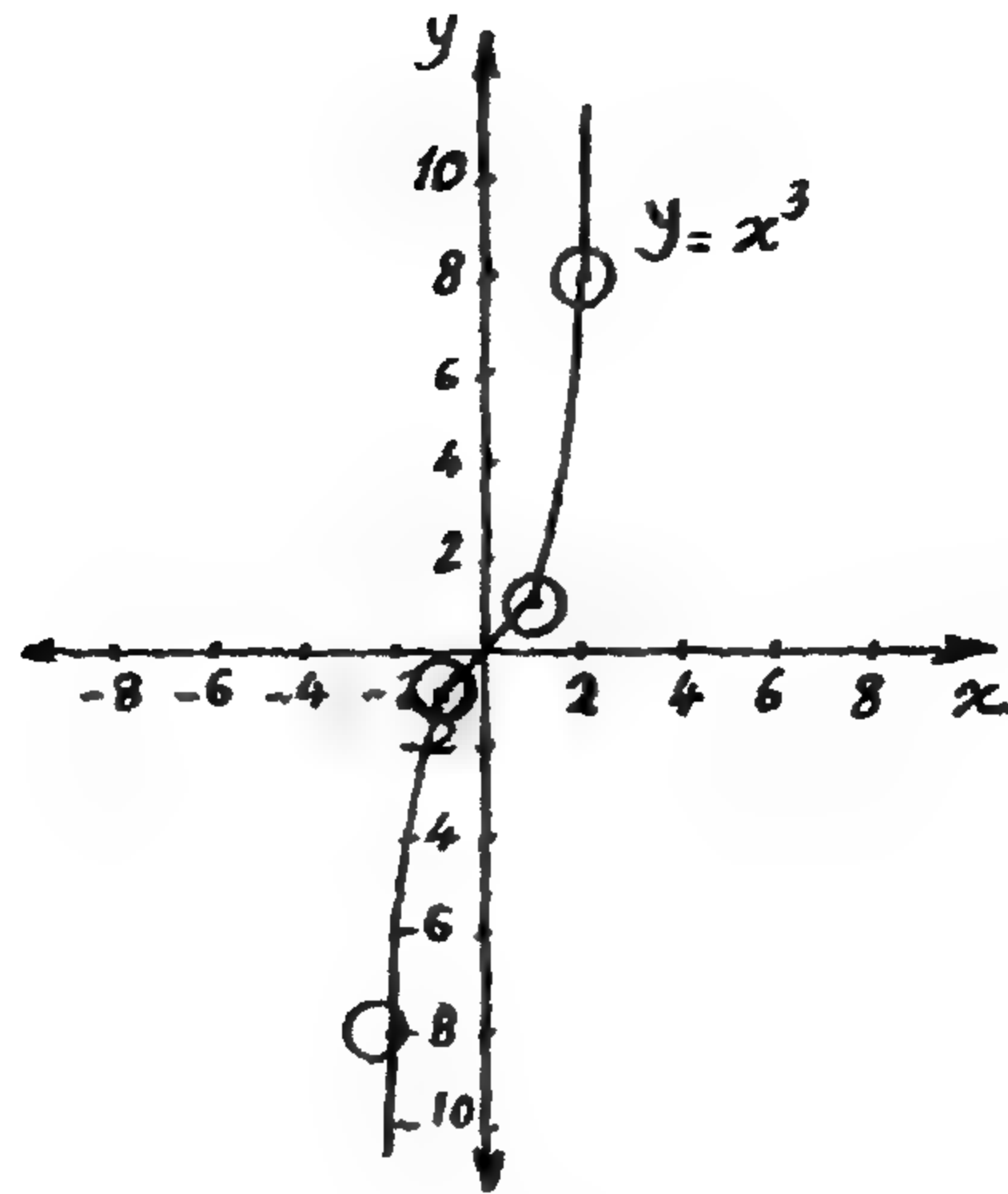
$$\therefore f'(a) \leq 0$$

مثال (٢) :-

الدالة $y = (x^3)$ ، متزايدة عند أى نقطة ومشتقتها : $y' = 3x^2$ تكون موجبة عند جميع

النقط ما عدا النقطة $(x=0)$ حيث تكون (y') عندها مساوياً للصفر $y' = 0$

أنظر الرسم شكل (٧-٦) .

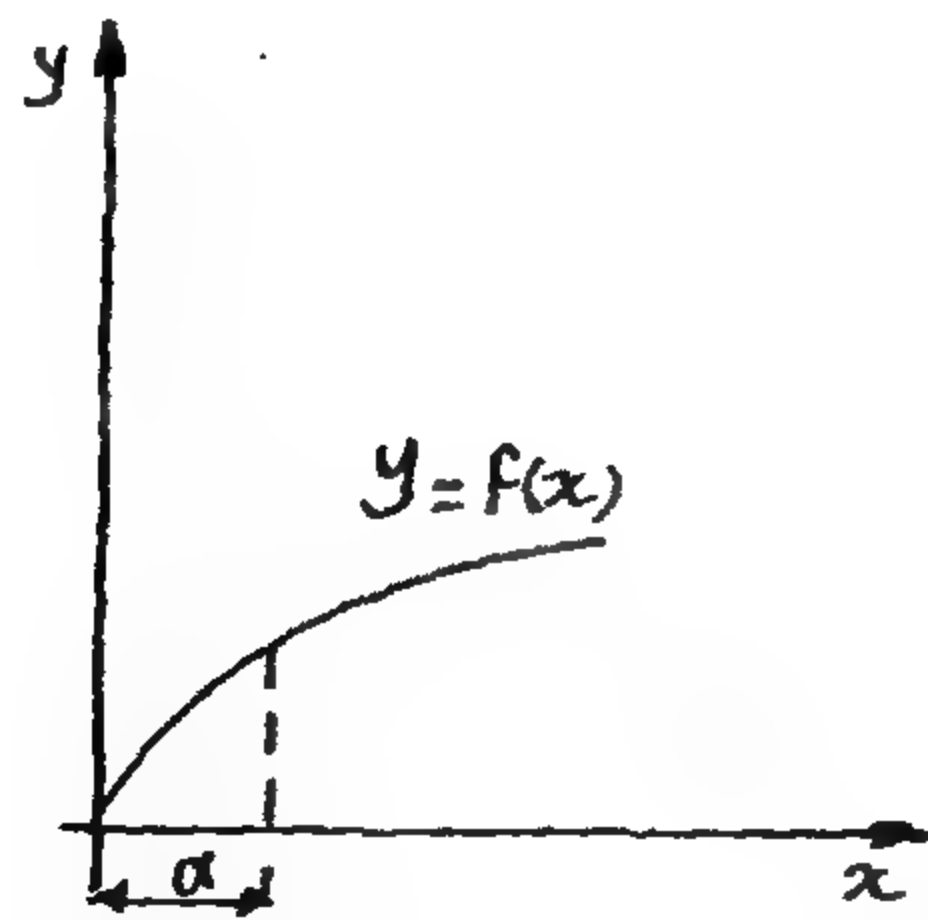


شكل (٧ - ٦)

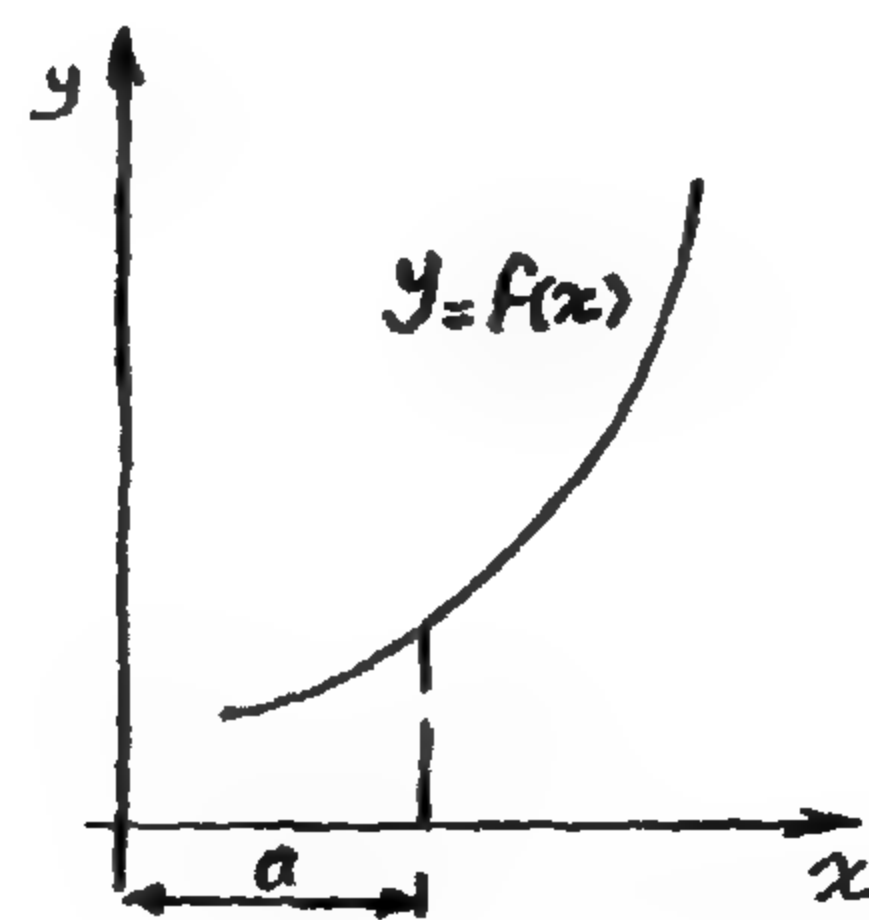
وحيث أن الدوال الجبرية يمكن تمثيلها بيانياً ، لذلك فإن شكل المنحنى كما سنرى ورأينا سابقاً ، يبين لنا ما إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة وبالتالي ما إذا كانت المشتقة الأولى موجبة أم سالبة .

٧-٤ :- الدوال المتزايدة Functions which are increasing

وهي تظهر لنا في الأشكال (٧-٧) ، (٧-٨) ، حيث A نقطة على المنحنى وإحداثياتها السيني $x = a$ ، نقطة أخرى قريبة منها ، إحداثياتها السيني $x = a + \Delta x$ ويلاحظ ما يلي :-



شكل (٧-٨)



شكل (٧-٧)

(١) إما أن تكون المنحنيات المثلثة للدالة أو أجزاء منها مقعرة لأعلى وترتفع
Concave upwards and rising كما فى شكل (٧-٧) .

وأمثلة لهذا النوع :- أ) $y = x^2$ لقيم x الموجبة

ب) $y = 10^x$

ج) $y = \tan x$ فيما بين $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(٢) أو قد تكون المنحنيات المثلثة للدالة أو أجزاء منها مقعرة لأسفل وترتفع كذلك
Concave downwards and rising ، كما فى شكل (٧-٨)

وأمثلة لهذا النوع :- أ) $y = \sqrt{x}$

ب) $y = \text{Log } x$

ج) $y = \sin x$ فيما بين $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

وفى كلتا الحالتين فإن المنحنى يرتفع لأعلى وإلى اليمين كلما زادت x
وكما هو واضح من الأشكال فإنه عندما تزداد x بمقدار ضئيل Δx ، فإن y تزداد
بمقدار مناظر مقداره Δy .

وبذلك فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وكذلك نهايتها تكون موجبة .

وهندسياً :- فإنه يتضح أن المماس للمنحنى عند النقطة A يصنع زاوية حادة

acute angle مع المحور OX

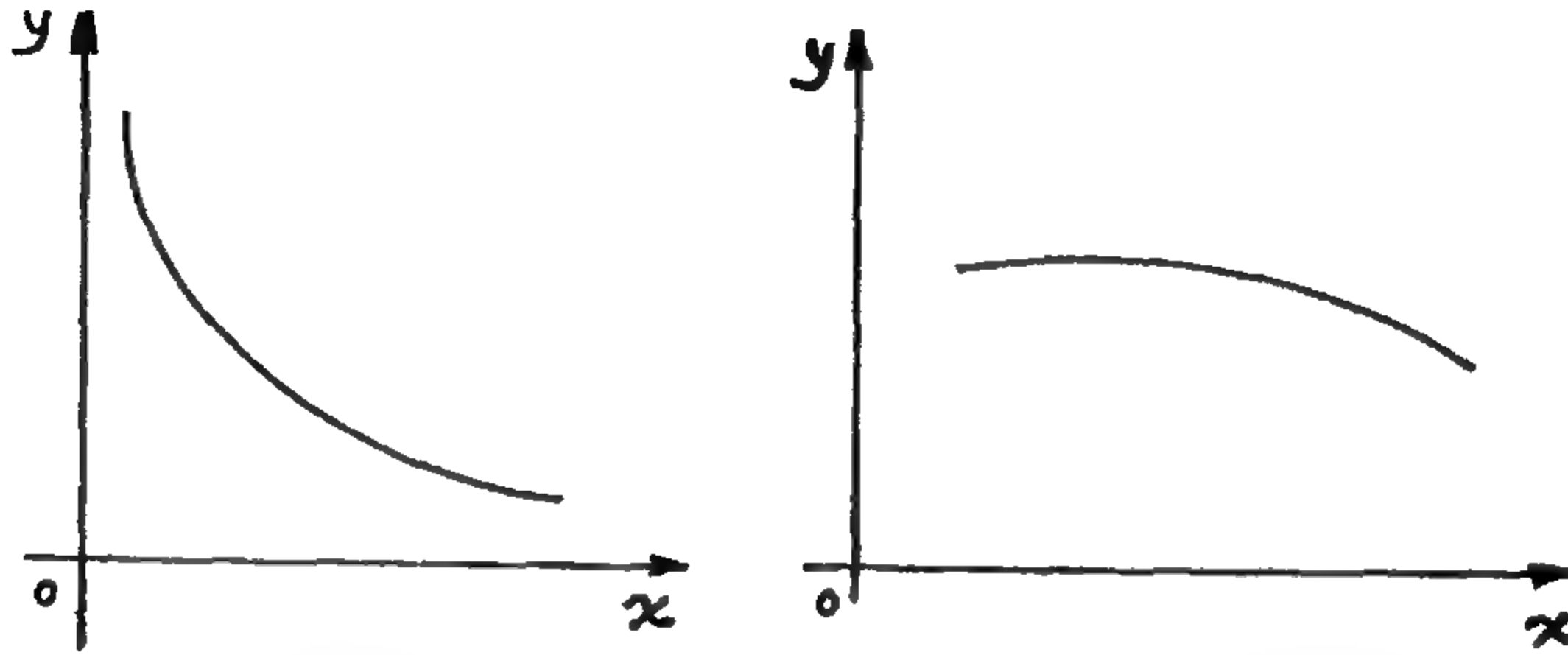
وبذلك فإن الميل والذى يمثله ظل الزاوية θ ($\tan \theta$) يكون موجباً ويتضح كذلك أنه

فى شكل (٧-٧) فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة

خلاصة :- يُقال أن الدالة $f(x)$ ، دالة متزايدة فى فترة معينة لقيم المتغير المستقل
(x) ، إذا كانت $f(x_2) > f(x_1)$ لأى نقطتين متجاورتين فى نفس الفترة وبحيث
 $x_2 > x_1$ أى أنه إذا حدثت أى زيادة فى x فى خلال هذه الفترة فإنه يصاحبها زيادة
مناظرة فى y

٧-٥ :- الدوال المتناقصة Functions which are decreasing

وبنفس الطريقة كما في حالة الدوال المتزايدة فإنه يمكن تمثيلها بالمنحنيات كما في شكل (٧-٩) ، (٧-١٠) .



شكل (٧-٩) ، شكل (٧-١٠)

ويتضح في كلتا الحالتين أنه إذا زادت قيمة x عند A بمقدار ضئيل مقداره Δx فإن قيمة الدالة تقل .

وبذلك فإن Δy تكون سالبة عندما Δx موجبة وعليه فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وكذلك نهايتها $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة .

وكما سبق فهناك وضعان :-

(١) المنحنى مقعر لأعلى وهابطاً concave upwards falling كما في شكل (٧-٩) .
وأمثلة لهذا النوع :-

أ- $y = \frac{1}{x}$

ب- $y = x^2$ (لقيم x السالبة)

ج- $y = \cot(x)$ بين $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(٢) المنحنى مقعر لأسفل وهابطاً concave downwards falling كما في شكل (٧-١٠)

وأمثلة لهذا النوع :-

(أ) - $y = -x^2$ (لقيم x الموجبة)

(ب) - $y = \sin x$ فيما بين $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

وتكون المماسات المرسومة لكل من هذين المنحنيين ، بحيث تصنع زاوية منفرجة Obtus angle مع محور السينات وبالتالي فإن $(\tan \theta)$ وميل هذا المماس يكون سالباً

خلاصة :-

يُقال أن الدالة $f(x)$ دالة متناقصة في فترة معينة لقيم المتغير المستقل x إذا كانت $f(x_2) < f(x_1)$ لأي نقطتين متجاورتين x_1, x_2 في الفترة المعينة وبحيث $x_2 > x_1$ أي أنه كلما حدثت زيادة لـ x في خلال هذه الفترة فإنه يُصاحبها نقص في قيمة y .

مثال (١) :-

إذا كانت $y = 4x^2 - 20x + 2$

فالمطلوب تحديد الفترة التي تكون فيها الدالة y :-

(أ) - متزايدة .

(ب) - متناقصة .

(ج) - لا متزايدة ولا متناقصة .

الحل :-

يجب أولاً إيجاد قيمة y' أي المشتقة الأولى للدالة :

$$\because y = 4x^2 - 20x + 2$$

$$\therefore y' = 8x - 20$$

(أ) - وتكون الدالة متزايدة عندما $y' > 0$

$$(8x - 20) > 0$$

$$i.e \ x > 2.5$$

أي عندما

(ب) - وتكون الدالة متناقصة عندما $y' < 0$

$$0 > (8x - 20)$$

$$i.e \ x < 2.5$$

أي عندما

ج- وتكون الدالة لا متزايدة ولا متناقصة عندما $y' = 0$

$$\therefore 8x - 20 = 0$$

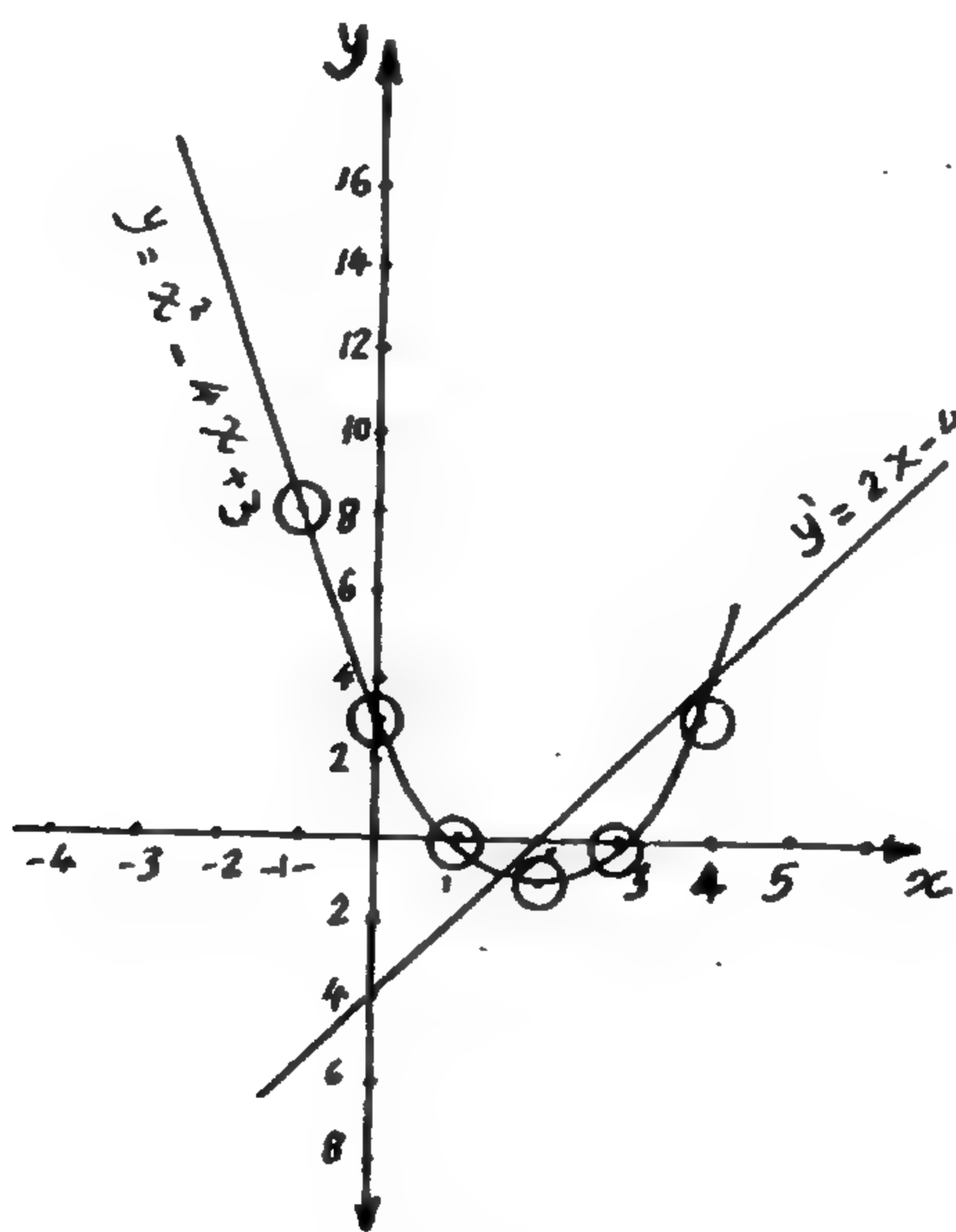
$$\therefore x = 2.5$$

وبذلك فإن الدالة $4x^2 - 20x + 2 \leftarrow$
 متزايدة عندما $x > 2.5$
 لا متزايدة ولا متناقصة عندما $x = 2.5$
 متناقصة عندما $x < 2.5$

ملحوظة :- يقال أن الدالة $y = f(x)$ دالة ساكنة Stationary أى غير متزايدة ولا متناقصة عند النقطة $x = k$ ، إذا كانت قيمة $y' = 0$ عند هذه النقطة كما يتضح فى الفقرة التالية بالتفصيل .

٧-٦ :- القيم الثابتة Stationary values

ويظهر لنا فى شكل (٧-١١) الحالتان اللتان تم إيضاحهما فى شكل (٧-٧) ، (٧-٩) .



شكل (٧-١١)

$$y = x^2 - 4x + 3$$

ويوضح شكل (٧-١١) الدالة :-

وقد سبق دراستها فى شكل (٦-١) .

وسوف نتعرض لها بمزيد من الإيضاح فيما يلي :-

$$y = x^2 - 4x + 3 \quad \text{وحيث أن}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

والدالة الأخيرة $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تمثل خطاً مستقيماً AB فى شكل (٧-١١) ويمكن ملاحظة

التغيرات التالية فى كل من المنحنى والدالة وكما يتضح من الرسم :-

(١) عندما تزداد x من $(-\infty \text{ to } +2)$ فإن y تتناقص

وقيم $\frac{dy}{dx}$ الممثلة بالخط المستقيم AB تكون سالبة [انظر شكل (٧-٩)]

(٢) عندما تزداد x من $(+2 \text{ to } +\infty)$ فإن y تزايد

ومن ثم فإن قيم $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة [انظر شكل (٧-٧)]

(٣) عند نقطة C يتوقف المنحنى عن التناقص ثم يبدأ فى الزيادة

وبذلك فإنه عندما $x = 2$ فإن قيمة y لا تتغير لحظياً بل تكون ثابتة

وبذلك فإنه لا يكون هنالك معدل للتغير وتكون $\frac{dy}{dx} = \text{صفر}$

ويقطع الخط المستقيم AB المحور OX عند هذه النقطة $(x = 2)$ ومن ثم فإنه عند

$x = 2$ فإنه يقال أن :-

الدالة لها قيمة ثابتة ويُطلق على C بأنها نقطة ثابتة على المنحنى

ويمكن تلخيص الاستنتاجات الهامة السابقة فيما يلي :-

(١) لو أن $x < 2$ فإن y تتناقص ، $\frac{dy}{dx}$ سالبة .

(٢) لو أن $x > 2$ فإن y تزايد ، $\frac{dy}{dx}$ موجبة

(٣) عندما $x = 2$ عند نقطة C فإن y ولفترة لحظية ، لا هى متزايدة ولا متناقصة ،

أى أن الدالة لها قيمة ثابتة عندما $\frac{dy}{dx} = 0$

وسوف نعتبر الآن الدالة :-

$$y = 3 + 2x - x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 - 2x$$

وبوضح شكل (٧-١٢) هذه المنحنيات $[y = 3 + 2x - x^2, y' = 2 - 2x]$

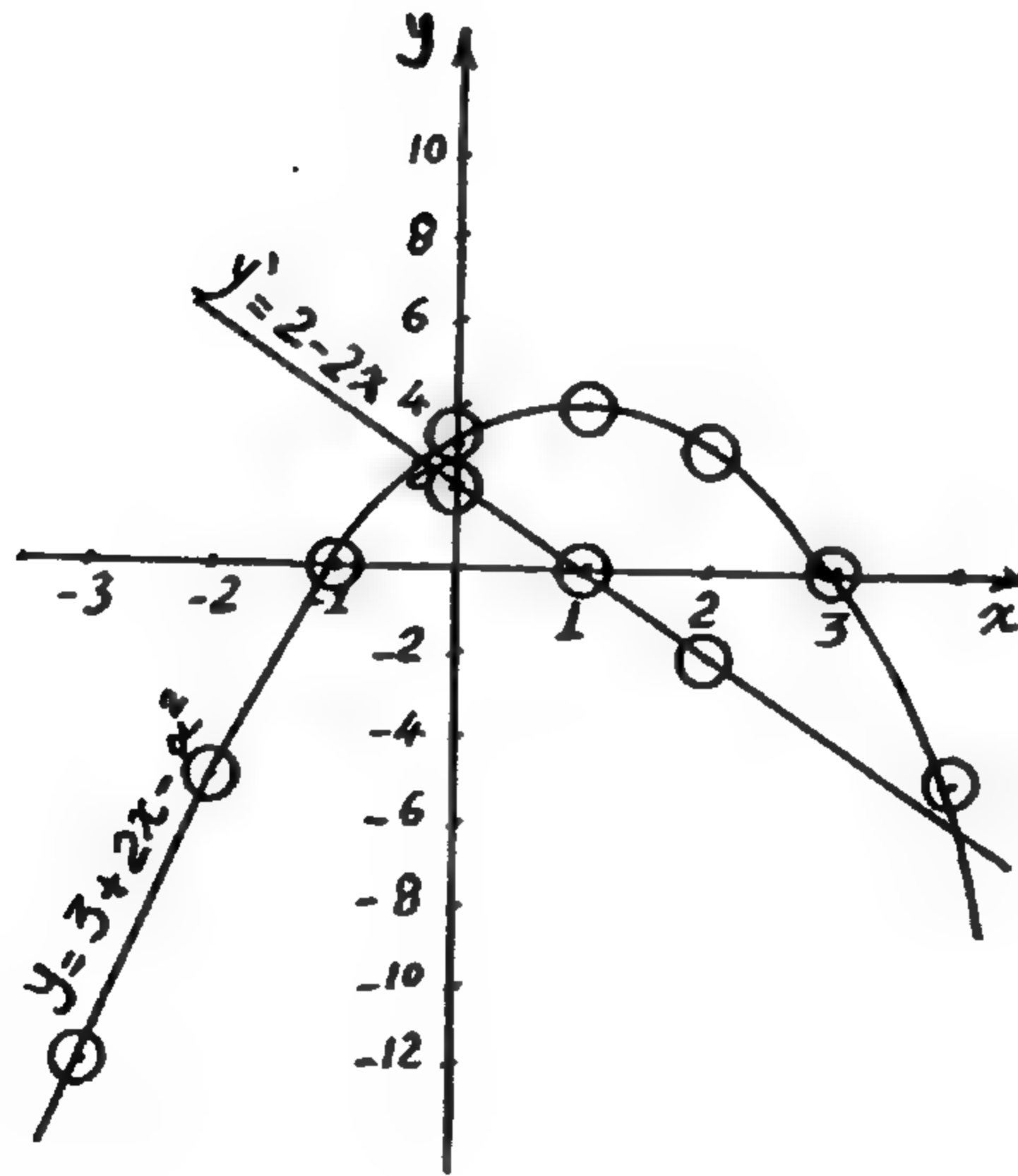
حيث يمثل الخط المستقيم AB الدالة المشتقة : $2 - 2x$

وبدراسة المنحنيات في الشكل (٧-١٢) وكما سبق فسوف نلاحظ ما يلي :

(١) عندما $x < +1$ ، y متزايدة ، $\frac{dy}{dx}$ موجبة

(٢) عندما $x > +1$ ، y متناقصة ، $\frac{dy}{dx}$ سالبة

(٣) عندما $x = 1$ (عند نقطة c) فإن y تتوقف عن الزيادة وتبدأ في التناقص وبذلك فإن قيمة الدالة عند c تكون ثابتة



شكل (٧ - ١٢)

٧-٧ : - نقط التحول " الانعطاف " Turning Points

إذا ما قمنا بمقارنة النقط ذات القيم الثابتة في شكل (٧-١١) ، (٧-١٢) [نقطة c في كل من الشكلين] للمنحنيين : -

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$y = 3 + 2x - x^2$$

فسوف نلاحظ الاختلافات الهامة التالية : -

في الدالة : - $y = x^2 - 4x + 3$ عند النقطة c (الثابتة) أو الساكنة : -

(١) يتغير شكل المنحنى من مقعر للأعلى وهابطاً إلى مقعر للأعلى (كذلك) وصاعداً كما في شكل (٧-٧) ، شكل (٧-٩) كما وأن الزاوية θ تتغير من زاوية منفرجة إلى زاوية حادة مارة بالصفر .

(٢) قيم الدالة تتناقص قبل وتزايد بعد (النقطة الساكنة)

(٣) وبالتبعية فإن : - $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة قبل وموجبة بعد (النقطة الساكنة)

وفي الدالة . $y = 3 + 2x - x^2$ عند النقطة الساكنة c : -

(١) يتغير شكل المنحنى من مقعر للأسفل وصاعداً إلى مقعر للأسفل (كذلك) وهابطاً

إلا أن زاوية θ تتغير من زاوية حادة قبل النقطة الساكنة إلى زاوية منفرجة بعد النقطة

كما في شكل (٧-٨) ، (٧-١٠)

(٢) قيم الدالة تتزايد قبل وتتناقص بعد .

(٣) وبالتبعية فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة قبل وسالبة بعد .

وبذلك فإنه عند كل من النقطتين : -

(١) تتناقص الدالة قبل وتزايد بعد أو العكس بالعكس

$$(٢) \frac{dy}{dx} = 0 \text{ وتُغير إشارتها}$$

ويُطلق على مثل هذه النقط على منحنى بنقط التحول أو الانعطاف

وسوف نرى فيما يلى بأن كل النقط الساكنة ليست نقط تحول أو انعطاف إلا أنه عند كل من النقط الساكنة ونقط الانعطاف فإن : -

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ دائماً ، وهي تُعبر عن سلوك الدالة قبل وبعد هذه النقطة}$$

مثال (١) : - حدد قيم x التى يوجد عندها نقط تحول على المنحنى : -

$$y = 2x^2 - 6x + 9$$

$$y' = 4x - 6$$

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ وعند نقطة التحول فإن}$$

$$\therefore 4x - 6 = 0 \quad \therefore x = 1.5$$

ولقيم x الأقل من 1.5 سنجد أن $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة ((وذلك بوضع قيم لـ x أقل من

$$1.5 \text{ فى المعادلة } 4x - 6 = 0))$$

وبالتالى فإن الدالة متناقصة

وعند قيم x الأكبر من 1.5 ($x > 1.5$) سنجد أن $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة وبالتالي فإن الدالة متزايدة .

وحيث أن الدالة تتناقص قبل النقطة الساكنة وتزايد بعدها

$$\therefore \text{ هنالك نقطة تحول عند } x = 1.5$$

مثال (٢) : - حدد نقط التحول (الانعطاف) للدالة : -

$$y = 1 - 2x - x^2$$

الحل :-

$$\therefore y = 1 - 2x - x^2$$

$$\therefore y' = -2 - 2x$$

وللقيم الثابتة أو عند النقط الساكنة تكون $y' = 0$

$$\therefore -2 - 2x = 0$$

$$\therefore x = -1$$

أى أنه توجد نقطة ساكنة عند $x = -1$.

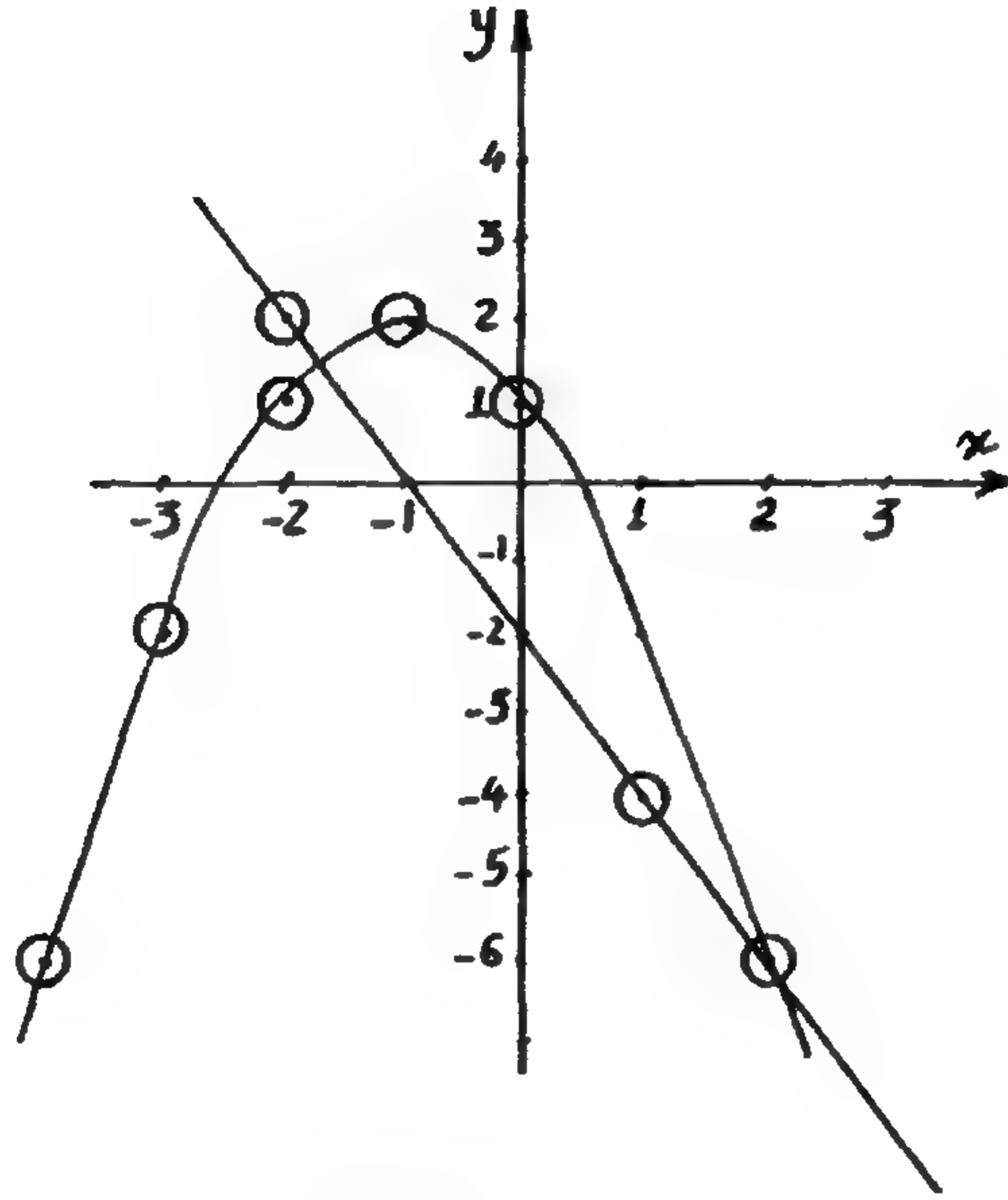
فإذا كانت $x < -1$ فإننا نجد $y' = \frac{dy}{dx}$ تكون موجبة وتتناقص قيمة y .

وإذا كانت $x > -1$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة وتتناقص قيمة y

$\therefore y$ تتزايد قبل وتتناقص بعد النقطة الساكنة

\therefore فالنقطة الساكنة هي نقطة تحول (نهاية عظمى أو صغرى) كذلك عندما $x = -1$ ،

أنظر شكل (٧ - ١٣) .



شكل (٧ - ١٣)

٧ - ٨ : القيم العظمى والصغرى Maximum and minimum values

هنالك فرق غاية فى الأهمية بين نقط التحول للدالتين السابق شرحهما ألا وهما :-

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$y = 3 + 2x - x^2$$

وهذه الفروق كالتالى :-

(١) فى الدالة : $y = x^2 - 4x + 3$ المبينة فى شكل (٧-١١)

نجد أن نقطة التحول c هي أسفل نقطة فى المنحنى أى أن عندها تكون أقل قيمة لـ y

فإذا أخذنا مجموعة من النقط قرب c في أي من الاتجاهين يمينا أو يساراً ، فسوف نجد أن قيم الدالة عند هذه النقط أكبر من قيمتها عند c

ويُطلق على مثل هذه النقطة بنقطة نهاية صغرى Minimum Point ويقال أن للدالة قيمة صغرى عند هذه النقطة .

وقد اتضح مما سبق أن قيم الدالة تتناقص قبل الوصول لنقطة التحول هذه (النهاية الصغرى) وتزايد بعدها .

(٢) في الدالة : $y = 3 + 2x - x^2$ المبينة في شكل (٧-١٢)

نجد أن نقطة التحول c هي أعلى نقطة في المنحنى أي أن عندها تكون أكبر قيمة لـ y فإذا أخذنا مجموعة من النقط قرب c في أي من الاتجاهين (يمينا أو يساراً) فسوف نجد أن قيم الدالة عند هذه النقط أقل من قيمتها عند c

ويُطلق على مثل هذه النقطة ، بنقطة نهاية عظمى Maximum Point ويقال أن للدالة قيمة عظمى عند هذه النقطة .

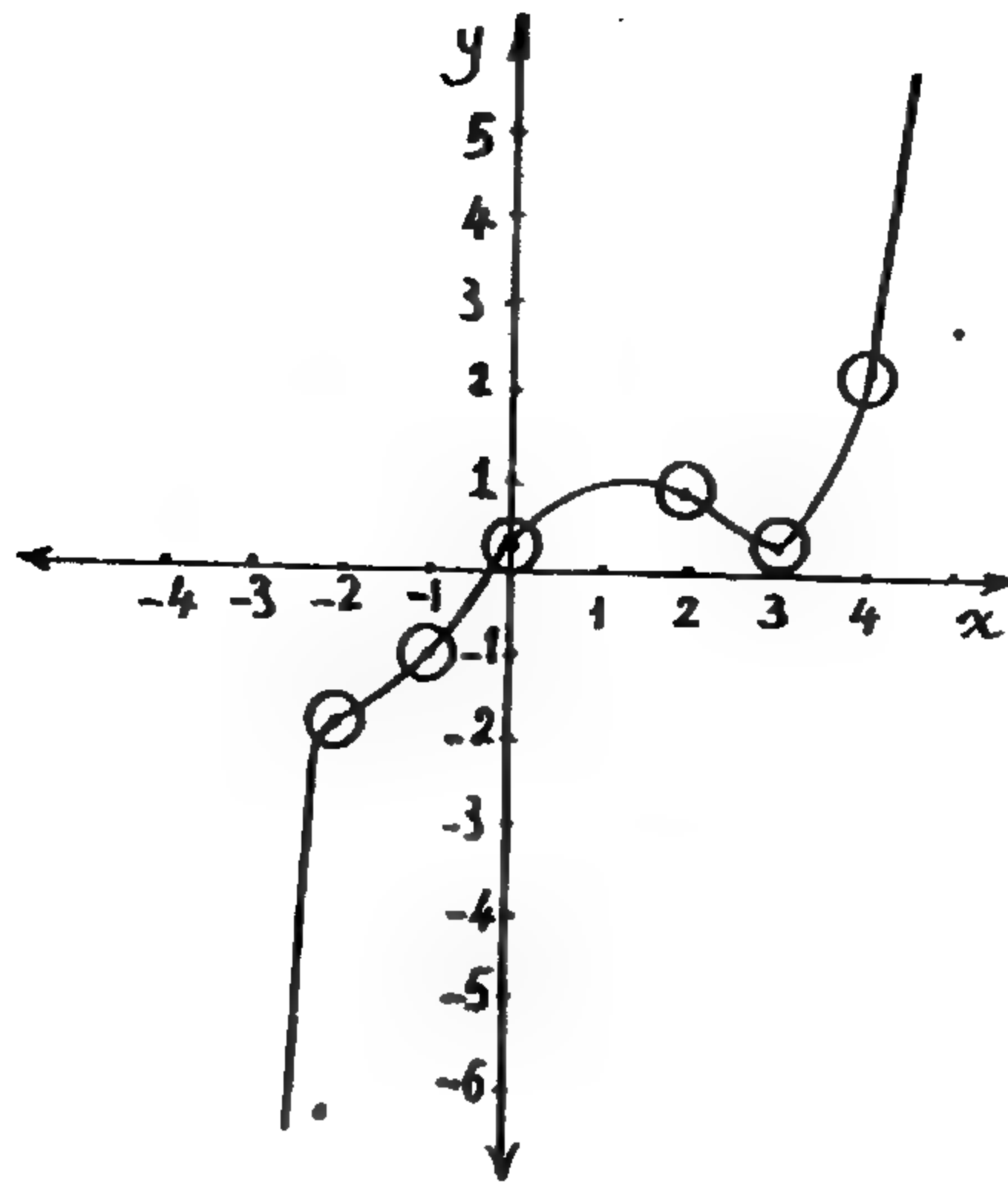
وقد وضع مما سبق أن قيم الدالة تتزايد قبل الوصول لنقطة التحول هذه (النهاية العظمى) وتتناقص بعدها .

وباختصار [الدالة $f(x)$ يكون لها نهاية عظمى (أو صغرى) عند النقطة $x = a$ إذا كانت قيمة $f(a)$ أكبر من (أو أصغر) من جميع القيم المجاورة]
ملاحظة : - يمكن ألا تكون النهاية العظمى للدالة هي أكبر قيمها وكذلك ألا تكون النهاية الصغرى للدالة هي أقل قيمها

ويظهر ذلك من الدالة : - $3y = x^3 - 3x^2 + 1$

$$\text{أو } y = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{3}$$

أنظر شكل (٧-١٤) .



شكل (٧ - ١٤)

فهذه الدالة لها نهاية عظمى $x=0$] النقطة $A(0, \frac{1}{3})$ ، أعلى في المستوى من جميع
النقط المجاورة لها] .

كما وأن لها نهاية صغرى عند $x=2$] النقطة $B(2, -1)$ ، أدنى في المستوى من جميع
النقط المجاورة لها] .

وعلى ذلك فإن الدالة في الفترة المحدودة $x[0,3]$ لها نهاية واحدة عظمى ونهاية
واحدة صغرى .

إلا أننا لو نظرنا للدالة في الفترة $x[-1,4]$ ، سنرى أن النهاية العظمى عند $x=0$ ،
 $y=f(0)=\frac{1}{3}$ ، ليست هي أكبر قيمة للدالة في الفترة $(-1,4)$ لأنه عندما تكون
 $x > 3$ فإن : -

$$f(x) > \frac{1}{3}$$

حيث أنه إلى يمين النقطة c يقع المنحنى فوق نقطة A

$$y = (x-1)(x-2)(x-3)$$

مثال : ادرس الدالة

الحل :-

هذه الدالة تساوى الصفر عندما :

$$(x-1)=0 , (x-2)=0 , (x-3)=0$$

أى عندما $x=1, 2, 3$

وبالتالى فإن المنحنى يقطع محور السينات عند هذه القيم لـ (x) فإذا كانت الدالة متصلة ،

أى أن التغيرات الصغيرة فى x ينشأ عنها تغيرات صغيرة مناظرة فى y فإنه :-

[لابد وأن يكون بين أى نقطتين متتاليتين من نقط تقاطع المنحنى مع محور OX ،

نقطة تحول سواء عظمى أو صغرى]

وعلى هذا فللدالة السابقة يوجد ثلاثة نقط لتقاطع الدالة مع محور OX وبالتالى فإنه

يكون هنالك نقطتا تحول :-

(١) فيما بين $x=1$ ، $x=2$

(٢) فيما بين $x=2$ ، $x=3$

ويتضح ذلك من التحليل الآتى :-

(١) لو $x < 1$ فإن y دائماً سالبة

(٢) لو $1 < x < 2$ فإن y موجبة

(٣) لو $2 < x < 3$ فإن y سالبة

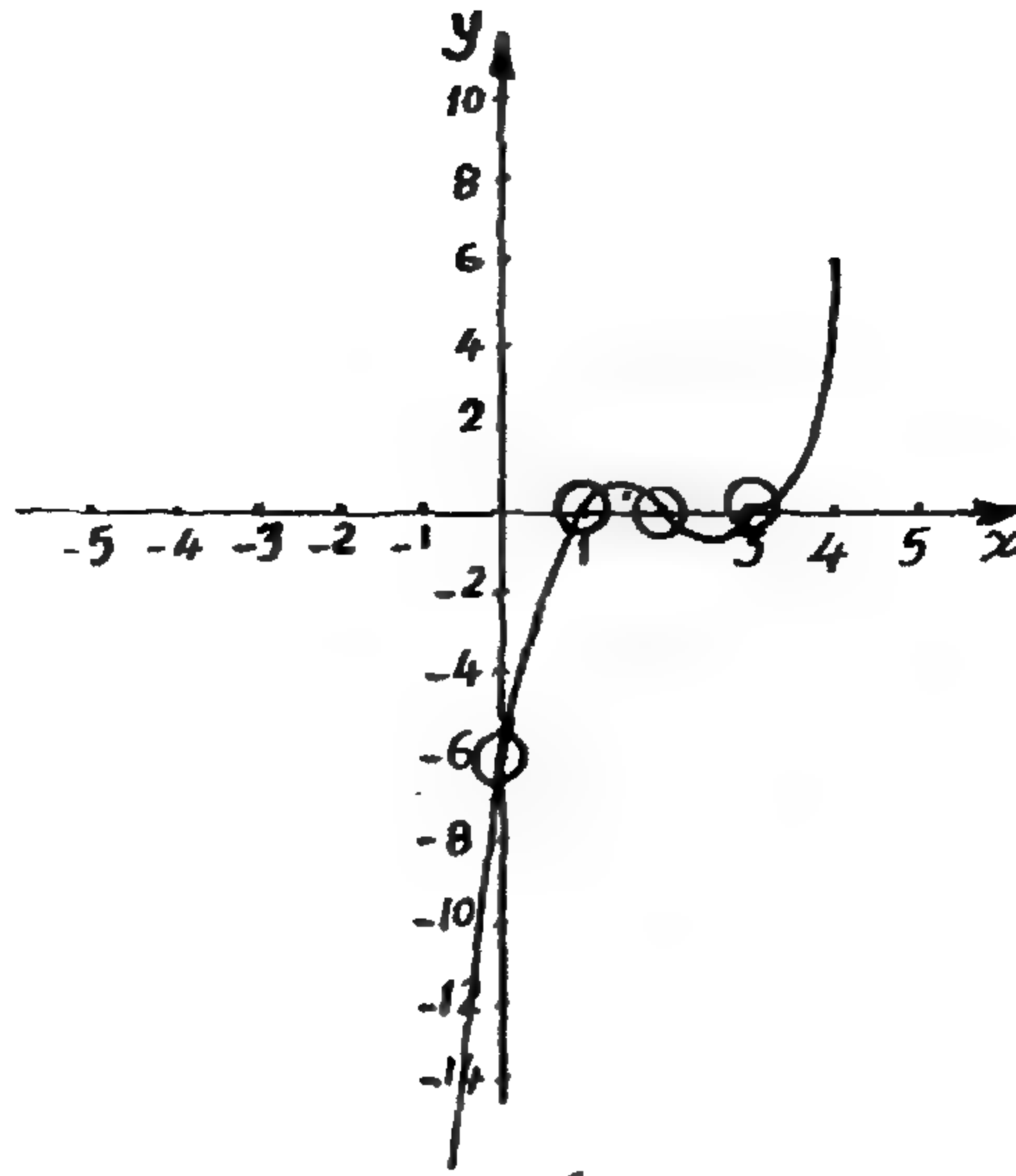
(٤) لو $x > 3$ فإن y دائماً موجبة .

والنقطتان (٣) ، (٤) فى التحليل السابق تدعونا إلى إستنتاج ما يلى :-

(١) توجد نهاية عظمى بين $x=1$ ، $x=2$

(٢) توجد نهاية صغرى بين $x=2$ ، $x=3$

ويمكن رسم الدالة بعد عمل جدول مناسب بين قيم x ، y المناظرة لها



شكل (٧-١٥)

ويقتضى رسم هذه الدالة مزيد من الحسابات المطولة لتحديد نقط النهاية العظمى والصغرى

إلا أنه باستخدام التفاضل ، يمكن تسهيل العملية إلى حد كبير فالدالة : -

$$y = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 11.$$

ومن المعلوم أنه عند نقط التحول فإن $\frac{dy}{dx} = 0$ (المماس أفقياً)

$$\therefore 3x^2 - 12x + 11 = 0$$

ومنها يمكن الحصول على قيمتي (جذري) x وهما : -

$$x_1 = 1.42 \quad \text{تقريباً}$$

$$x_2 = 2.58 \quad \text{تقريباً}$$

وهي النقط A^* , B^* على المنحنى

وبالتعويض عن قيم x هذه في المعادلة الأصلية نحصل على قيم y المناظرة

$$\therefore y_1 = 0.385 \quad \text{at} \quad x_1 = 1.42$$

$$\begin{array}{ll} \text{نهاية عظمى} & \text{at } (A') \\ y_2 = -0.385 & \text{at } x_2 = 2.58 \\ \text{نهاية صغرى} & \text{at } (B') \end{array}$$

٧-٩ : - طرق التمييز بين النهايات العظمى والصغرى : -

وتوجد ثلاث طرق ، نابعة من الاستنتاجات السابق التعرض لها في هذا الباب ، إلا إنه بعد معرفة هذه الطرق سنكتفى بطريقتين منها فقط كما سيرد فيما بعد : -

أولاً : - تغيرات الدالة قرب نقط التحول

Changes in the function near the turning points

(١) نقطة النهاية العظمى هي النقطة التي تكون عندها قيمة الدالة أكبر من قيمتها عند قيم x الأكبر قليلاً أو الأقل قليلاً من قيمة x لنقطة التحول

(٢) نقطة النهاية الصغرى تُعرف وبالمثل بأنها النقطة التي تكون عندها قيمة الدالة أصغر من قيمتها عند قيم x الأكبر قليلاً أو الأقل قليلاً من قيمة x لنقطة التحول

وبناءً على هذه التعريفات فإنه يتم التعويض بقيم x الأكبر قليلاً والأقل قليلاً من قيمة x عند نقطة التحول ، في الدالة الأصلية وبمقارنة هذه النتائج بالحالة (١) نهاية عظمى أو بالحالة (٢) نهاية صغرى ، يمكن تحديد نوع النقطة " نقطة التحول "

ويمكن التعبير عن هذا بصورة عامة كالتالي : -

نفترض أن $f(x)$ دالة في (x)

، نفترض أن a هي قيمة x عند نقطة التحول والمطلوب معرفة نوعيتها هل هي عظمى أم صغرى

∴ $f(a)$ هي قيمة الدالة عند نقطة التحول هذه

ونفترض أن $f(a+h)$ ، $f(a-h)$ هي قيمتي الدالة بالقرب من النقطة (يمينها ويسارها) وعليه فإن : -

النهاية العظمى تكون عندما $f(a)$ أكبر من كل من $f(a+h)$ ، $f(a-h)$ أي أكبر من قيمها بالقرب من $x=a$

وبالمثل فإن النهاية الصغرى تكون عندما $f(a)$ أصغر من كل من $f(a+h)$ ، $f(a-h)$ أى أصغر من قيمها بالقرب من $x=a$

ثانياً :- التغيرات فى قيمة المشتقة الأولى (المعامل التفاضلى) قبل وبعد نقطة التحول
Changes in the value , sign of the differential Coefficient before and after the turning point

(١) النهاية العظمى : - رأينا فيما سبق أن الدالة تزيد قبلها وتقل بعدها

[$\therefore \frac{dy}{dx}$ يجب أن تكون موجبة قبلها وسالبة بعدها]

ولمعرفة هذا نعوض فى المشتقة الأولى بقيم x الأكبر قليلاً والأقل قليلاً عن قيمة x عند هذه النقطة : -

[فإذا كانت المشتقة الأولى تُغير إشارتها من موجب قبلها إلى سالب بعدها مرة بالصفء فإن النقطة تكون نهاية عظمى]

فى حين أن $\frac{dy}{dx}$ عند هذه النقطة = صفر

(٢) النهاية الصغرى : - وبالمثل نجد هنا أن [$\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة قبلها وموجبة بعدها]

فإذا ما عوضنا فى المشتقة الأولى بقيم x الأكبر قليلاً والأقل قليلاً من قيمة x عند هذه النقطة : -

[فإذا كانت $\frac{dy}{dx}$ تُغير إشارتها من سالب إلى موجب مرة بالصفء فإن النقطة تكون نهاية صغرى]

فى حين أن $\frac{dy}{dx}$ عند هذه النقطة = صفر

ثالثاً : - إشارة المشتقة الثانية **Sign of the second differential coefficient**

وحيث أن $\frac{d^2y}{dx^2}$ هى مشتقة المقدار " $\frac{dy}{dx}$ " وبالتالى فهى تُحدد التغيرات فى الدالة

$\frac{dy}{dx}$ أى التغيرات فى المشتقة الأولى كالتالى : -

(١) النهاية العظمى : -

أ - الدالة تزيد قبلها وتقل بعدها

ب - $\therefore \frac{dy}{dx}$ تكون موجبة قبلها وسالبة بعدها

ج - $\therefore \frac{dy}{dx}$ تتناقص عند النهاية العظمى

د - $\therefore \frac{d^2y}{dx^2}$ يجب أن تكون سالبة

(٢) النهاية الصغرى : -

أ - الدالة تقل قبلها وتزيد بعدها

ب - $\therefore \frac{dy}{dx}$ تكون سالبة قبلها وموجبة بعدها

ج - $\therefore \frac{dy}{dx}$ تتزايد عند النهاية الصغرى

د - $\therefore \frac{d^2y}{dx^2}$ يجب أن تكون موجبة

٧-١٠ : - الإيضاح البياني Graphical illustrations

ولإيضاح ما سبق بيانياً فإننا نبدأ في دراسة الدالة السابق التعرض لها عند إيضاح نقط النهاية العظمى والصغرى وهي : -

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

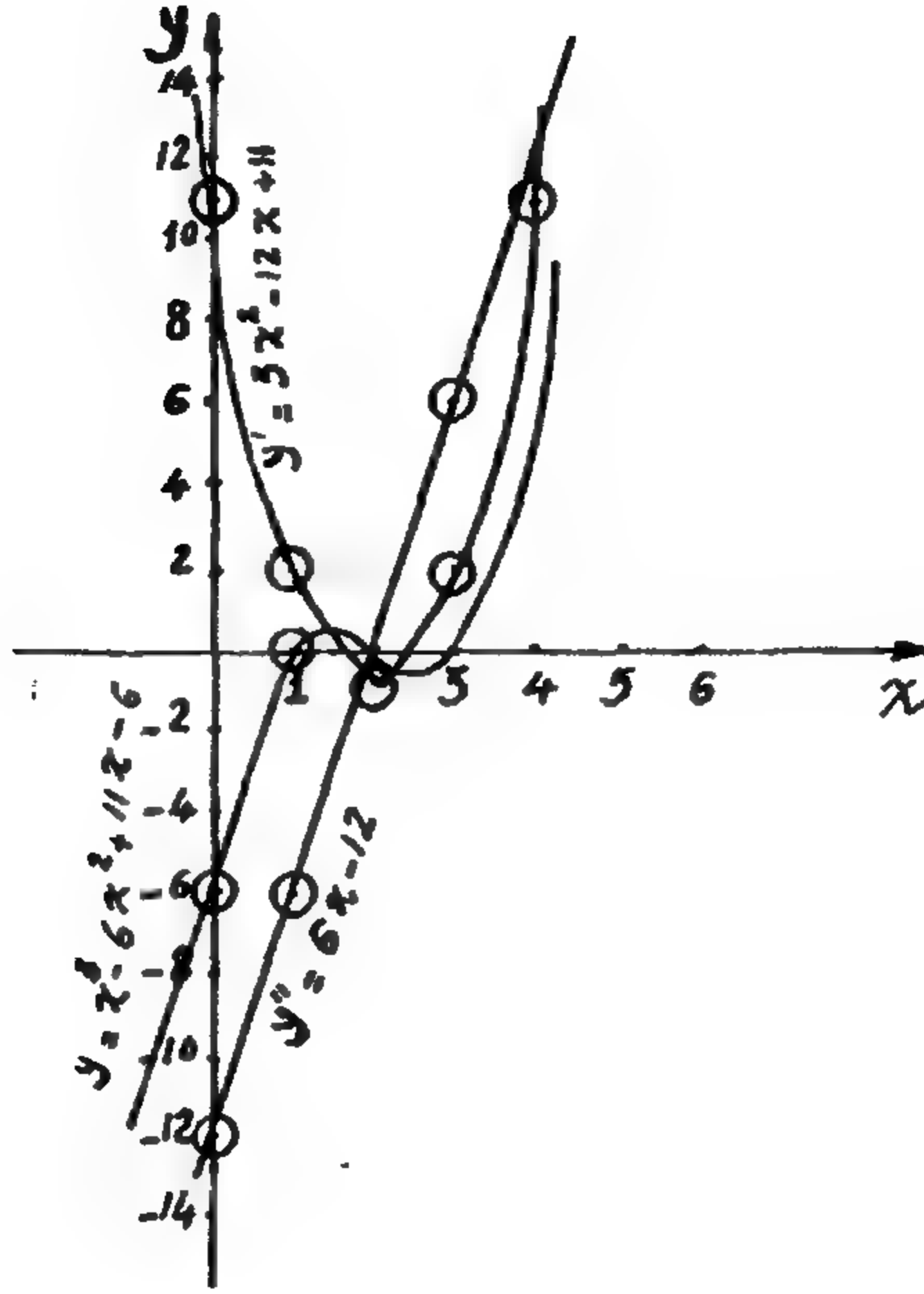
، إرجع لشكل $\leftarrow (٧ - ١٥)$

$$\therefore f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$f''(x) = 6x - 12 \quad \dots\dots\dots (3)$$

وشكل (٧ - ١٦) يوضح هذه المنحنيات الثلاث .



شكل (٧ - ١٦)

وللبحث عن نقط النهاية العظمى والصغرى ، نضع $f'(x) = 0$ لأن المشتقة الأولى لأى دالة عندها = صفر

$$\therefore 3x^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\therefore x_1 = 1.42 \quad , \quad x_2 = 2.58$$

وتُمثل هذه القيم النقط A, B على المحور السينى ويقابلها النقط A', B' كنقط تحول على المنحنى وكما سبق فإن قيمة الدالة عند :

$$A' = 0.385 \quad , \quad B' = -0.385$$

وباستخدام طريقة المشتقة الثانية (الطريقة ثالثاً السابقة) فى تحديد ماهية نقط التحول وهل هى عظمى أم صغرى ، يمكننا تحديد نوع النهاية تماماً
فإذا عوضنا فى $f''(x)$ بقيمتى x ،

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$$

(١) عندما $x = 1.42$

$$\therefore 6x - 12 = 6 \times 1.42 - 12 = -3.48$$

أى أن $\frac{d^2y}{dx^2}$ سالبة

$\therefore A'$ لابد وأن تكون نقطة نهاية عظمى

(٢) عندما $x = 2.58$

$$\therefore 6x - 12 = 6 \times 2.58 - 12 = +3.48$$

$\therefore B'$ لابد وأن تكون نقطة نهاية صغرى .

وبالرجوع إلى المنحنيات الممثلة للدوال الثلاث : $f(x)$ ، $f'(x)$ ، $f''(x)$ نجد الآتى

أ - عند نقطة النهاية العظمى A' : -

(١) $f'(x) = 0$ وهى شرط ضرورى عند نقطة التحول

(٢) $f(x)$ تزيد قيمتها قبل نقطة A' وتقل بعدها

(٣) $f'(x)$ تكون موجبة قبل A' وسالبة بعدها

(٤) $f'(x) \therefore$ متناقصة

(٥) $f''(x) \therefore$ أى ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ سالبة

ب - عند نقطة النهاية الصغرى B' : -

(١) $f'(x) = 0$ وهى شرط ضرورى عند نقطة التحول

(٢) $f(x)$ تقل قيمتها قبل نقطة B' وتزيد بعدها

(٣) $f'(x)$ تكون سالبة قبل B' وموجبة بعدها

(٤) $f'(x) \therefore$ متزايدة

(٥) $f''(x) \therefore$ أى ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ موجبة

ويوضح شكل (٧ - ١٦) كل هذه الاستنتاجات

ومن كل ما سبق يتضح أن الطريقة المتبعة فى (أولاً) لتحديد نقط النهاية العظمى والصغرى يمكنها أن تدلنا بالرغم من أنها مطولة كما أن الطريقة (ثانياً) مجهدة كذلك أما الطريقة المتبعة فى (ثالثاً) وهى طريقة المشتقة الثانية فهى الأسهل

٧ - ١١ : - أمثلة محلولة : -

(١) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة : -

$$y = 2x^2 - 6x + 3$$

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 6$$

وعند نقط التحول أو نقط النهاية العظمى والصغرى فإن : $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore 4x - 6 = 0 \quad \therefore x = 1.5$$

\therefore توجد نقطة تحول (نهاية عظمى أو نهاية صغرى) على المنحنى عندما $x = 1.5$

ولتحديد ما إذا كانت نهاية عظمى أو صغرى : -

، حيث أن $\frac{dy}{dx} = 0$ أى $4x - 6 = 0$: -

(١) إذا كانت $x < 1.5$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة

(٢) إذا كانت $x > 1.5$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة

$\therefore \frac{dy}{dx}$ تزيد بزيادة x

وباستخدام الطريقة الثالثة فإن y يكون لها قيمة صغرى عندما $x = 1.5$

(٢) ادرس نقط النهاية العظمى والصغرى للدالة :-

$$y = 6 - x - x^2$$

ثم حدد كل منها

الحل :-

$$\therefore y = 6 - x - x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -1 - 2x$$

وعند نقط النهاية العظمى والصغرى فإن : $\frac{dy}{dx}$ تساوى الصفر

$$\therefore -1-2x=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$$

(a) فإذا كانت $x < -\frac{1}{2}$ فإن $(-1-2x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة

(b) وإذا كانت $x > -\frac{1}{2}$ فإن $(-1-2x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة

أى أن $\frac{dy}{dx}$ تتناقص بتزايد x

وباستخدام الطريقة (ثانياً) وهى طريقة y' فإن y تكون لها قيمة عظمى عندما

$$x = -\frac{1}{2}$$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$ وهى سالبة دائماً

وبواسطة الطريقة (ثالثاً) وهى طريقة المشتقة الثانية y'' ، تكون النقطة عبارة عن نهاية عظمى .

(٣) أوجد نقط النهاية العظمى والصغرى على المنحنى :-

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

ثم حدد كل منها وقيم الدالة حينئذ ؟

الحل :-

$$\therefore y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

$$\therefore y' = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y'' = 6x - 12$$

ثم نضع $y' = 0$ ونحل المعادلة فى x :-

$$\therefore 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\therefore (x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 3$$

أى أنه توجد نقطتا تحول أو نقطتا نهاية عندما : $x=3$ ، $x=1$ وسوف نستخدم الطريقة المتبعة فى (ثالثاً) وهى طريقة المشتقة الثانية فى تحديد نوعية هذه النهاية ، عظمى أم صغرى .

$$y'' = 6x - 12$$

∴ عندما $x=1$ فإن :-

$$y'' = 6 \times 1 - 12 = -6 = (-)ve$$

وعندها تكون نقطة نهاية عظمى لأنها سالبة $(-)ve$

، عندما $x=3$ فإن :-

$$y'' = 6 \times 3 - 12 = 6 = (+)ve$$

وعندها تكون نقطة نهاية صغرى لأنها موجبة $(+)ve$

∴ فلهذه الدالة أو لهذا المنحنى ، نهاية عظمى عند $x=1$ ، ونهاية صغرى عند

$x=3$ وقيم الدالة حينئذ كالتالى :

$$y = f(x) = f(1) = 1 - 6 + 9 - 3 = +1$$

$$، f(3) = 27 - 54 + 27 - 3 = -3$$

(٤) قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية قدرها $8m/sec$ فإذا كانت المسافة

$$s \text{ التى قطعها الجسم بعد } t \text{ ثانية تُعطى بالعلاقة : } s = 8t - 4.9t^2$$

فأوجد أقصى ارتفاع يمكن للجسم أن يصل له والزمن اللازم لذلك .

الحل :-

$$\therefore s = 8t - 4.9t^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 8 - 9.8t$$

وعند أقصى مسافة فإن $\frac{ds}{dt}$ تساوى الصفر

[عند أقصى مسافة يتوقف الجسم عن الصعود ويسكن لحظياً أى تصبح سرعته صفراً ،

أى $\frac{ds}{dt} = 0$ ثم يبدأ فى الهبوط]

$$\therefore 8 - 9.8t = 0 \quad \therefore t = \frac{8}{9.8} = 0.816 \text{ sec.}$$

$$\therefore \frac{d^2s}{dt^2} = -9.8$$

وواضح أنها سالبة دائماً

\therefore فمقدار المسافة s يكون نهاية عظمى بعد زمن مقداره 0.816 sec.

وبالتعويض فى المعادلة :-

$$\therefore S = 8 \times 0.816 - 4.9 \times 0.666 \\ = 6.528 - 3.263 \approx 3.265 \text{ meter}$$

(٥) إذا كانت تكلفة التصنيع بالجنيه لكابل كهربائى طوله كيلو متر واحد تُعطى

$$c = \frac{140}{x} + 500x \quad \text{بالعلاقة :}$$

حيث :

x مساحة مقطع الكابل بالسنتيمتر المربع ، c التكلفة بالجنيه

فأوجد :

مساحة المقطع التى تكون عندها التكلفة أقل ما يمكن

وما هى أقل تكلفة للكيلو متر الطولى الواحد .

الحل :-

$$\therefore c = \frac{140}{x} + 500x$$

$$\therefore \frac{dc}{dx} = -\frac{140}{x^2} + 500$$

وعندما تكون c أقل ما يمكن (أو أكبر ما يمكن) فإن :-

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

$$\therefore -\frac{140}{x^2} + 500 = 0$$

$$\therefore x^2 = \frac{140}{500} = \frac{28}{100}$$

$$\therefore x = \sqrt{0.28} = \pm 0.529 \text{ cm}^2$$

تقريباً

وفى موضوعنا هذا فإن الجذر السالب (-0.529) عديم المعنى ولمعرفة ما إذا كانت قيمة x المساوية لـ +0.529 ، تعطى أكبر أو أقل قيم ، تستخدم الطريقة (الثالثة) أى طريقة y''

$$c'' = \frac{d^2c}{dx^2} = \frac{280}{x^3}$$

فإذا عوضنا بقيمة $x = 0.529$ فإن $\frac{d^2c}{dx^2}$ تكون موجبة .

∴ فالتكلفة تكون أقل ما يمكن (نهاية صغرى) عندما :

$$x = 0.529 \text{ cm}^2$$

وبالتعويض بقيمة x فى المعادلة

$$\begin{aligned} \therefore c &= \frac{140}{(0.529)} + 500 \times 0.529 \\ &= 264.65 + 264.50 = 529.15 \text{ L.E} \end{aligned}$$

$$6y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 900 \quad (٦) \text{ إذا كانت}$$

تمثل الدالة $y = f(x)$ فى المتغير x ، فحدد نقط النهايات العظمى والصغرى لهذه الدالة باستخدام المشتقة الأولى فقط .

الحل :-

$$\therefore y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 150$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 - x - 6$$

وعند نقط النهاية بنوعيتها تكون $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore x^2 - x - 6 = 0$$

$$\therefore (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x_1 = -2, \quad x_2 = 3$$

∴ توجد نقطتا نهاية عظمى وصغرى عند $x = -2$, $x = 3$

أولاً عند $x = -2$:-

نعتبر نقطتين على يمين ويسار $x = -2$ وقريباً منها وهما $x = -2.1$, $x = -1.9$

وعندما $x = -2.1$:

$$\begin{aligned}\therefore y' &= (-2.1)^2 - (-2.1) - 6 \\ &= 4.41 + 2.1 - 6 = +0.51(+ve)\end{aligned}$$

وعندما $x = -1.9$:

$$\begin{aligned}\therefore y' &= (-1.9)^2 - (-1.9) - 6 \\ &= 3.61 + 1.9 - 6 = -0.49(-ve)\end{aligned}$$

$\therefore y'$ في الحالتين تغير إشارتها من $(+ve)$ إلى $(-ve)$

\therefore عند $x = -2$ توجد نهاية عظمى .

ثانياً : عند $[x = 3]$ -:

نعتبر نقطتين على يمين ويسار $x = 3$ وهما : $x = 2.9$, $x = 3.1$

فعندما $x = 2.9$ -:

$$\begin{aligned}\therefore y' &= (2.9)^2 - (2.9) - 6 \\ &= 8.41 - 8.9 = -0.49 (-ve)\end{aligned}$$

وعند $x = 3.1$ -:

$$\begin{aligned}y' &= (3.1)^2 - (3.1) - 6 \\ &= 9.61 - 9.1 = 0.51 (+ve)\end{aligned}$$

أي أن y' تغير إشارتها من $(-)$ إلى $(+)$

\therefore عند $x = 3$ توجد نهاية صغرى .

(٧) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}$$

الحل :-

حيث أنه لم يذكر الطريقة الواجب اتباعها لتحديد نقط النهايات لذلك فسنستخدم

طريقة المشتقة الثانية لأنها الأسهل والأسرع في تحديد المطلوب .

$$\therefore y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}$$

$$\therefore y' = x^2 - 5x$$

$$y'' = 2x - 5$$

والشرط اللازم توفره (ولكنه ليس بالشرط الأكيد) عند نقط النهايات هو $y' = 0$

$$\therefore y' = x^2 - 5x = 0$$

$$\therefore x(x-5) = 0 \quad \therefore x_1 = 0, \quad x_2 = 5$$

أما الشرط الكافي لتحديد نوع النهاية فهو إيجاد قيمة y'' ومعرفة إشارتها

(١) عندما $x = 0$:

$$y'' = 2x - 5 = 2 \times 0 - 5 = -5 \quad (\text{سالبة})$$

\therefore عندما $x = 0$ توجد نهاية عظمى

(٢) عندما $x = 5$

$$\therefore y'' = 2x - 5 = 2 \times 5 - 5 = 5 \quad (\text{موجبة})$$

\therefore عندما $x = 5$ توجد نهاية صغرى

(٨) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة :

$$y = \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3$$

الحل :-

$$y' = 3x^3 - 3x$$

$$y'' = 9x^2 - 3$$

والشرط اللازم هو :- $y' = 0$

$$\therefore 3(x^3 - x) = 0 \quad \therefore 3x(x^2 - 1) = 0$$

$$\therefore 3x(x-1)(x+1) = 0$$

\therefore نقط التحول أو نقط النهايات العظمى والصغرى تكون عندما :-

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1$$

والشرط الكافي هو إيجاد قيمة y'' ومعرفة إشارتها :

$$y'' = 9x^2 - 3$$

عندما $x=0$:

$$y'' = 9 \times 0 - 3 = -3 \quad \text{سالبة}$$

\therefore عندما $x=0$ توجد نقطة نهاية عظمى .

وعند $x=+1$:

$$y'' = 9 \times (1)^2 - 3 = 6 \quad \text{موجبة}$$

\therefore عندما $x=+1$ تكون نهاية صغرى

وعندما $x=-1$:

$$y'' = 9 \times (-1)^2 - 3 = 6 \quad \text{موجبة}$$

\therefore عندما $x=-1$ تكون نهاية صغرى كذلك

أى أنه لهذه الدالة توجد نهاية واحدة عظمى عند $x=0$ ونهائتان صغريتان عندما :

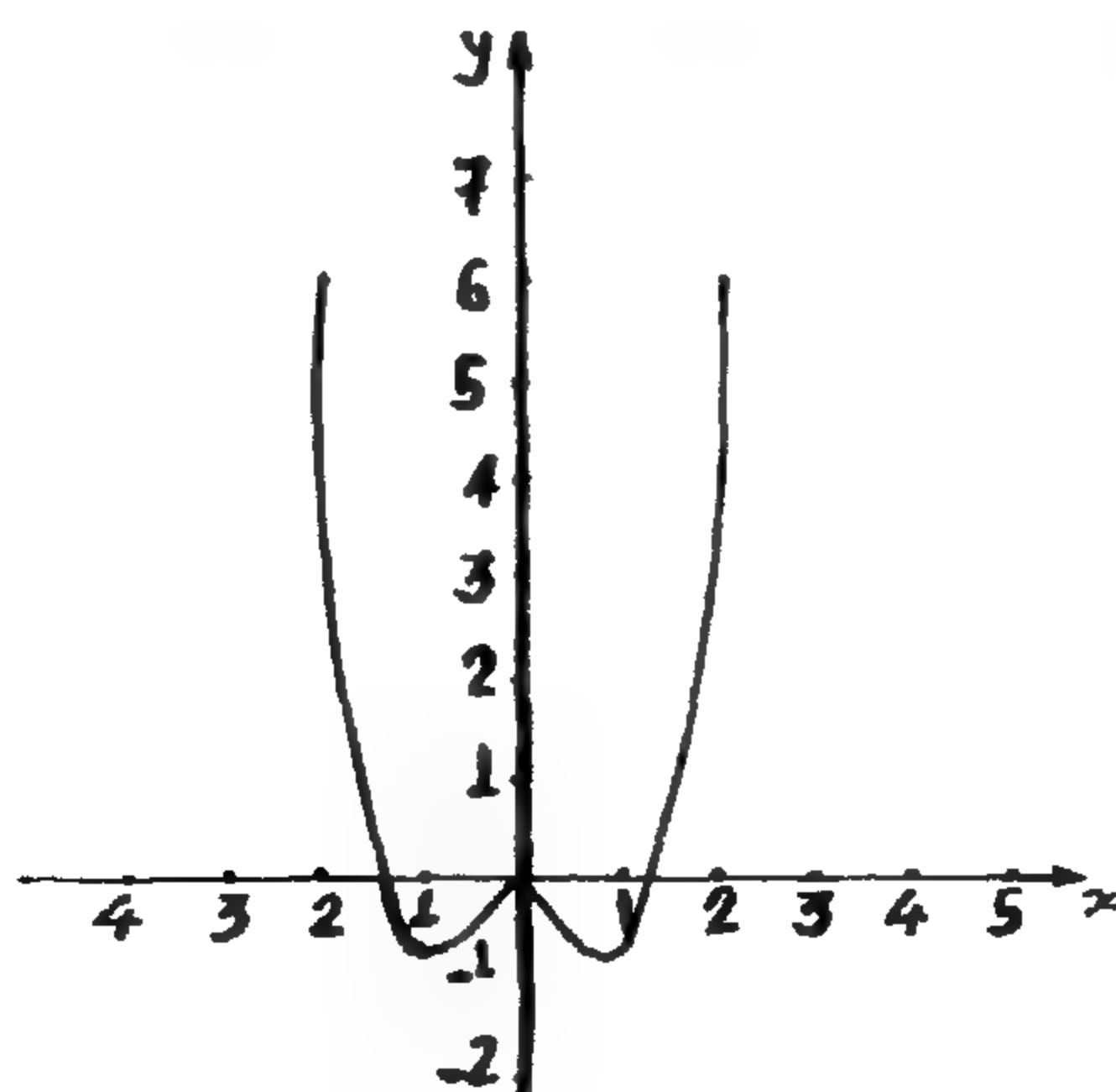
$$x=-1, x=+1$$

وحيث أننا قد عرفنا نقط النهايات لهذه الدالة فإنه يمكننا الآن رسمها بعمل جدول بين

قيم x (فرضاً) وقيم y المناظرة لها على أن يكون ضمن هذه القيم :-

$$x=0, x=-1, x=+1$$

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$47\frac{1}{4}$	6	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{21}{64}$	0	$-\frac{21}{64}$	$-\frac{3}{4}$	6	$47\frac{1}{4}$



شكل (٧-١٧)

ومن هذا المثال يتضح أنه يجوز أن يكون للدالة أكثر من نقطة نهاية صغرى أو كبرى إلا أن المشكلة تظهر إذا أردنا معرفة أيًا من هذه النقط ، يمثل النهاية الصغرى الحقيقية (المطلقة) أو النهاية الكبرى الحقيقية باعتبار جميع قيم x وليس فى خلال فترة محددة. ونود أن نذكر هنا بأنه يوجد نوعان من النهايات العظمى والصغرى :-

١- نهايات عظمى وصغرى مطلقة Global

٢- نهايات عظمى وصغرى محلية محدودة Local

والنهايات المحدودة يقصد بها النهايات عند نقطة قريبة جداً يميناً أو يساراً من نقطة معينة أو فى خلال فترة محدودة .

أما النهايات المطلقة فهى فى غاية الأهمية وتظهر هذه الأهمية إذا كان لدينا أكثر من نقطة نهاية صغرى أو عظمى محلية ويراد معرفة النهاية الصغرى أو العظمى المطلقة ، والتى بناء عليها يتم تحديد إجراء معين مطلوب .

ففى الحياة تُترجم المشاكل إلى مسائل رياضية ، ويتطلب الأمر أحياناً الحصول على أكبر مساحة أو أصغر حجم أو أقصى تكلفة أو أطول مدى أو أقل ارتفاع ، ... وهكذا . ولتحديد النهاية المطلقة نتبع التالى :-

إذا كانت $y = f(x)$ ، نوجد y ثم نوجد قيم x التى تجعل $y' = 0$. ولتكن هذه النقط (x_1, x_2, x_3, \dots) .

ثم نوجد قيمة الدالة عند كل منها ، ثم نوجد قيمة y عند أقل وأكبر قيمة لـ x عند طرفى الفترة أو المدى

، نعين النقط التى تكون عندها $f'(x)$ غير معرفة ، وتقع خارج المدى . ونحسب قيم الدالة عند النقط الحرجة وعند طرفى الفترة وأكبر قيمة فى مجموعة القيم السابقة تعتبر بمثابة القيمة العظمى المطلقة بينما أصغر قيمة تكون القيمة الصغرى المطلقة.

(٩) اوجد جميع النهايات الصغرى والعظمى للدالة :-

$$y = x \left(1 - \frac{x}{2} \right)$$

الحل :-

$$\therefore y = x - \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore y' = 1 - x$$

وعند نقاط النهاية العظمى والصغرى فإن $y' = 0$:

$$\therefore 1 - x = 0 \quad \therefore x = 1$$

فعندما $x < 1$ فإن $y' = +ve$

وعندما $x > 1$ فإن $y' = -ve$

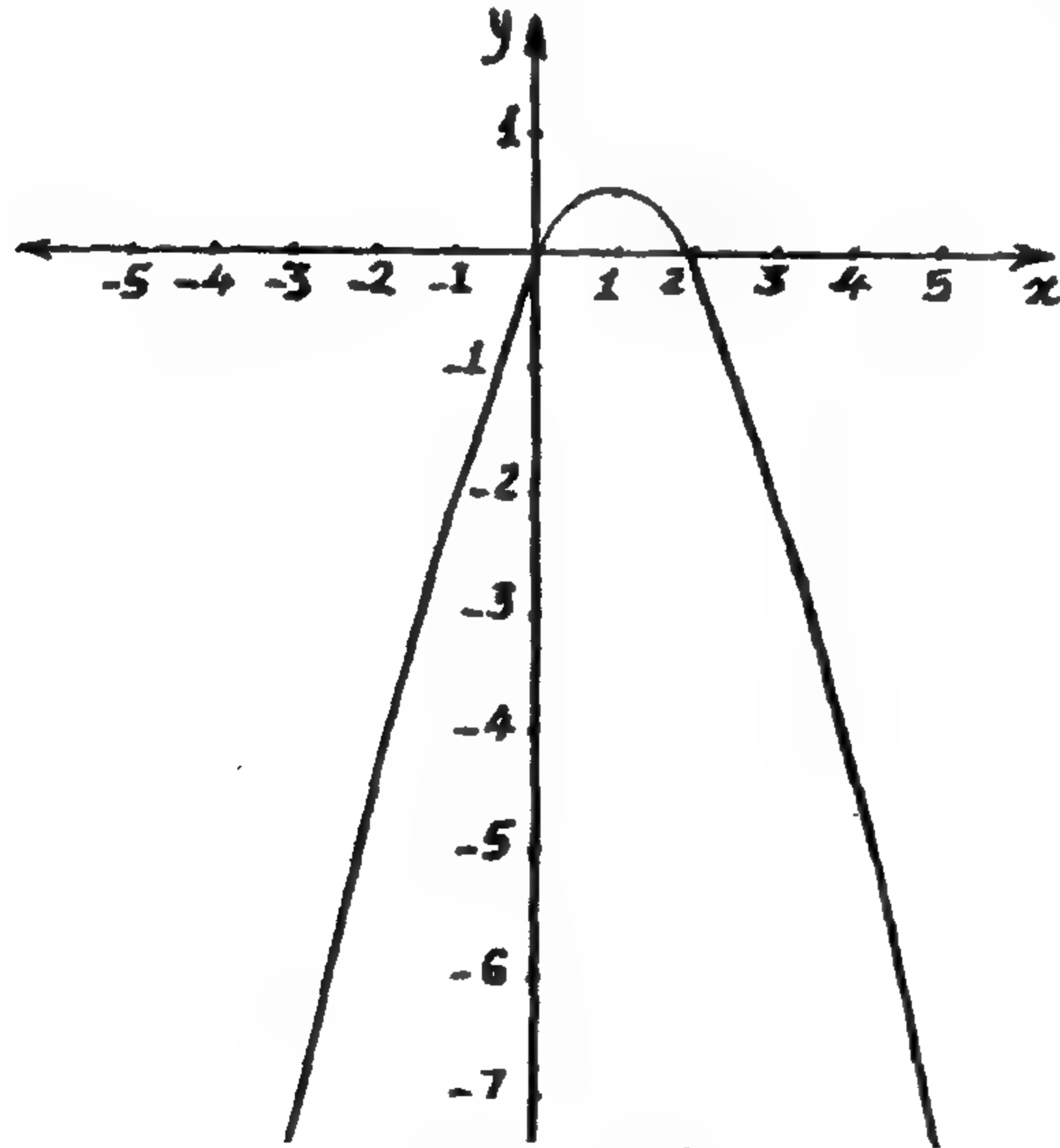
أى أن المشتقة الأولى تُغير إشارتها من موجب إلى سالب وهو شرط لازم عند نقط النهاية العظمى والصغرى إلا أنه غير كافٍ لوجود أياً من النهايتين والشرط الكافى هو

$$y'' = 0 \text{ ، حيث أن } y' = 1 - x$$

$$\therefore y'' = -1$$

وهى سالبة وعليه فإنه توجد عند $x = 1$ ، نهاية عظمى

أنظر شكل (٧-١٨)



شكل (٧-١٨)

(١٠) أوجد جميع النهايات الصغرى والعظمى للدالة :

$$y = (x-1)^2 (x+1)^3$$

الحل :-

$$y' = 2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2 \\ = (x-1)(x+1)^2(5x-1)$$

وعند النهايات العظمى والصغرى فإن $y' = 0$

$$\therefore (x-1)(x+1)^2(5x-1) = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = \frac{1}{5}$$

ومنها :-

إلا أنه يلزم ترتيب قيم x تصاعدياً

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{5}, \quad x_3 = 1$$

وكذلك $f'(x)$:-

$$f'(x) = 5(x+1)^2 \left(x - \frac{1}{5} \right) (x-1)$$

فعندما $x_1 < -1$:-

$$f'(x) = 5(-)^2(-)(-) = +ve \quad \dots\dots\dots (1)$$

وفي الفترة فيما بين $x = -1$, $x = \frac{1}{5}$:-

$$f'(x) = 5(+)^2(-)(-) = +ve \quad \dots\dots\dots (2)$$

وبمقارنة (1) ، (2) نجد عدم وجود تغيير في إشارة المشتقة الأولى وتظل موجبة عند عبور النقطة $x = -1$

وعليه فإنه للدالة المذكورة لا توجد نهاية عظمى ولا صغرى عند $x = -1$ بل تتزايد الدالة

وعندما $x_2 < \frac{1}{5}$:-

$$y' \text{ or } f'(x) = +ve \quad \text{كما في (2)}$$

وعندما $x_2 > \frac{1}{5}$:-

$$y' = f'(x) = 5(+)^2(+)(-) = -ve \quad \dots\dots\dots (3)$$

ولما كانت y' تغير إشارتها من موجب (+ve) إلى سالب (-ve) عند عبور المتغير x للنقطة $x_2 = \frac{1}{5}$ ؛ فإن الدالة تتحول من التزايد للتناقص ،

أى أنه عند $x = \frac{1}{5}$ توجد نهاية عظمى وقيمته :-

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5} - 1\right)^2 \left(\frac{1}{5} + 1\right)^3 \approx 1.1 \quad \text{تقريباً}$$

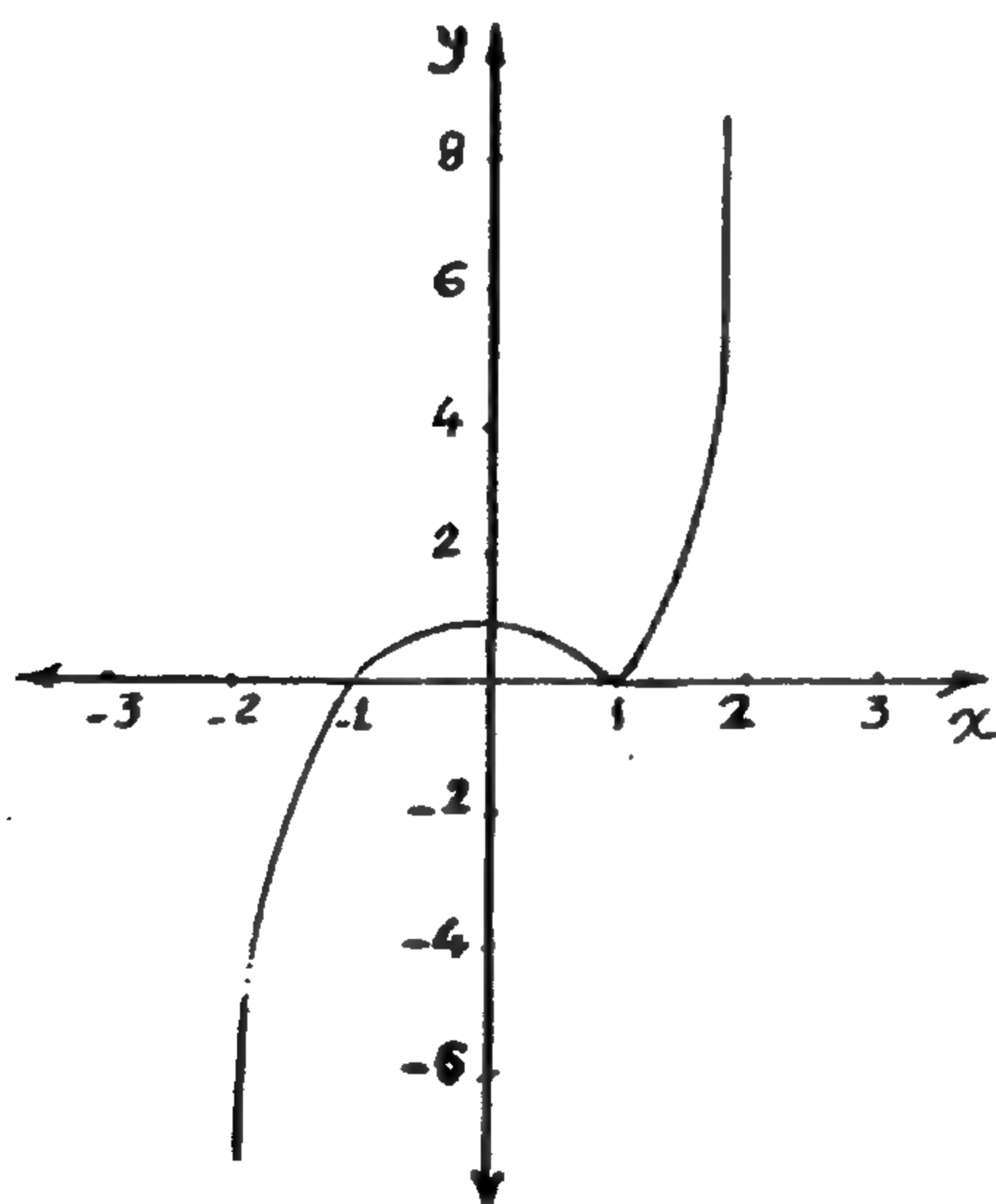
وعندما $x_3 < 1$:- $\therefore y' = 5(+)^2(+)(-) = -ve$

وعندما $x^3 > 1$:- $\therefore y' = 5(+)^2(+)(+) = +ve$

أى أن المشتقة تُغير إشارتها من سالب (-ve) إلى موجب (+ve) عند عبور النقطة $x = 1$ وعليه فإن الدالة تنتقل من التناقص للتزايد

∴ عندما $x = 1$ ، هنالك نهاية صغرى مقدارها $y = (1-1)^2(1+1)^3 = 0$.

أنظر الرسم شكل (٧-١٩) .



شكل (٧-١٩)

(١١) أوجد جميع النهايات الصغرى والعظمى للدالة :-

$$y = (x-1).x^{\frac{2}{3}}$$

الحل :-

$$y' = x^{\frac{2}{3}} + \frac{(2x-1)}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{5\left(x - \frac{2}{3}\right)}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

ويلاحظ أن الدالة عند $x=0$ غير قابلة للتفاضل ($y' = \infty$)

وعليه فإنه يكون لدينا نقطتان عندما $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{5}$

- : $x < 0$

$$y' = \frac{5(-)}{3(-)} = +ve$$

- : $\frac{2}{5} > x > 0$ ،

$$y' = \frac{5(-)}{3(+)} = -ve$$

: $x > \frac{2}{5}$ ،

$$y' = \frac{5(+)}{3(+)} = +ve$$

وعليه ، حيث أن y' تغير إشارتها حول الصفر من موجب $+ve$ لسالبة $-ve$ ، يكون للدالة نهاية عظمى عند $x=0$ وقيمتها :

$$y = f(0) = 0$$

وعندما $x < \frac{2}{5}$ فإن y' سالبة كما سبق

وعندما $x > \frac{2}{5}$ فإن y' موجبة كما سبق

وعليه فإن y' تغير إشارتها حول الصفر من سالبة إلى موجب

∴ فيكون لها نهاية صغرى عند $x = \frac{2}{5}$ وقيمتها $y = f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{-3}{5} \sqrt[3]{\frac{4}{25}} \cong -0.33$

(١٢) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة : -

$$y = \frac{x^4}{2} - x^2 + 3$$

الحل :-

$$y' = 2x^3 - 2x$$

ثم نضع $y' = 0$ للحصول على نقط النهايات العظمى والصغرى :-

$$\therefore 2x^3 - 2x = 0$$

$$\therefore x(x^2 - 1) = 0$$

$$\therefore x(x-1)(x+1) = 0$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$$

هي النقط التي عندها نهايات عظمى أو صغرى

$$y'' = 6x^2 - 2$$

وبالتعويض بقيم x السابقة في y'' لمعرفة إشارتها :-

$$\therefore f''(-1) = 4 > 0 \text{ i.e. (+ve)}$$

$$f''(0) = -2 < 0 \text{ i.e. (-ve)}$$

$$f''(1) = 4 > 0 \text{ i.e. (+ve)}$$

\therefore توجد نهاية عظمى واحدة عند $x = 0$ (y'' سالبة)

ونهايتان صغريتان عند $x = 1, -1$ (y'' موجبة).

٧ - ١٢ : نقط الإنقلاب Points of inflexion

كما علمنا فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تكون إشارتها سالبة عند نقط النهاية العظمى وموجبة عند نقط النهاية الصغرى ؛

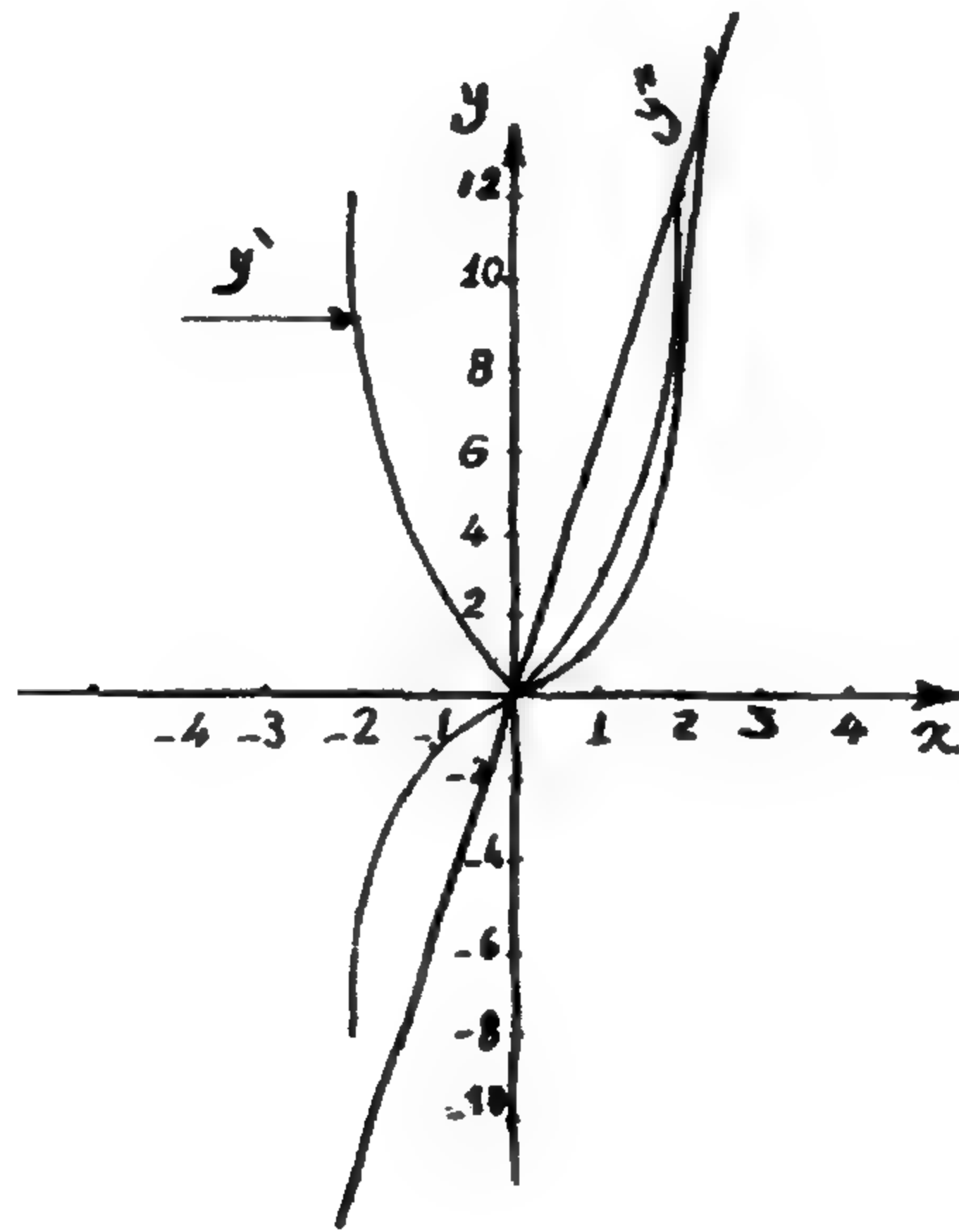
والآن دعنا نعرف كيف يكون الأمر عندما تكون $\frac{d^2y}{dx^2}$ مساوية للصفر بالرغم من عدم وجود نهاية صغرى أو عظمى .

لنعتبر الدالة : $y = x^3$

$$\therefore y' = 3x^2$$

$$y'' = 6x$$

ويوضح الشكل (٧-٢٠) هذا المنحنى والمنحنيات والمستقيمات المناظرة لدوال المشتقة الأولى والثانية .



شكل (٧ - ٢٠)

ويلاحظ أن المنحنى $y = x^3$ يمر بنقطة الأصل والتي عندها يُغير المنحنى تقوسه (شكله) من مقعر للأسفل صاعداً إلى مقعر للأعلى وصاعداً كذلك .

أى أنه يكون صاعداً فى كلتا الحالتين أى أن الدالة ذات قيمة متزايدة فيما عدا عند نقطة الأصل حيث يبدو منحنى الدالة ساكناً لحظياً أى انه عند هذه النقطة توجد قيمة ثابتة ، والميل يساوى الصفر ويكون محور السينات هو المماس للمنحنى .

وهى بذلك لا ينطبق عليها كل مواصفات نقطة التحول (أى زيادة قبل نقطة التحول ونقص بعدها أو العكس بالعكس) .

ويظهر المنحنى الممثل للمشتقة الأولى $y' = 3x^2$ فى صورة قطع مكافئ (متقطع) وهذا المنحنى (موجب) دائماً إلا أن قيمته تساوى الصفر عند نقطة الأصل .

وهذا يبين أن الميل للمنحنى $y = x^3$ ، يساوى الصفر عند هذه النقطة والتى هى أسفل نقطة فى المنحنى . $y = 3x^2$.

ويُطلق على مثل هذه النقط على المنحنى بنقط الانقلاب .

ويعنى الاسم : إنحناء فى سير المنحنى ، حيث يتغير تقوس المنحنى عندها من مقعر للأسفل إلى مقعر للأعلى أو بالعكس كما فى حالة المنحنى $(y = -x^3)$.

إلا أنه ليست بالضرورة أن تكون $\frac{dy}{dx}$ مساوية للصفر عند هذه النقطة أى أنه ليس بالضرورة أن يكون المماس موازياً للمحور OX إلا أن الميل بالنسبة لنقطة الانقلاب يكون أقل ما يمكن . وفى مثالنا هذا فإن القيمة الصغرى لهذا الميل = صفر .

ومصادقاً لأن المماس للدالة عند نقطة الانقلاب لا يوازى محور OX دائماً ، سوف نعتبر نقطة C على المنحنى المبين فى الشكل (٧ - ١٥) وهو المنحنى الممثل للدالة :

$$y = (x-1)(x-2)(x-3) \text{ وبالرجوع لهذا المنحنى نجد أن : -}$$

(١) عند النقطة C ، يتغير تقوس المنحنى من مقعر للأسفل إلى مقعر للأعلى

(٢) عندما يكون المنحنى مقعر للأسفل فإن $\frac{dy}{dx}$ تتناقص : -

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} \text{ سالبة}$$

وعندما يكون المنحنى مقعراً للأعلى فإن $\frac{dy}{dx}$ تزايد

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} \text{ موجبة}$$

$$(٣) \text{ عند نقطة الانقلاب } y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$(٤) \text{ وبالتبعية فإن } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ تغير إشارتها عند نقطة الانقلاب}$$

$$(٥) \text{ عند نقطة الانقلاب "C" فإن } \frac{dy}{dx} \text{ تكون أقل ما يمكن لقيم } x \text{ المناظرة}$$

$$(٦) \text{ وقيمة } \frac{dy}{dx} \text{ ، هذه ومن على الرسم : } \frac{dy}{dx} = -1$$

تعطى ميل المنحنى عند نقطة الانقلاب أى أنها تمثل ميل المماس للمنحنى الأصلى للدالة عند نقطة C

فإذا كانت θ = زاوية ميل المماس :

$$\therefore \tan \theta = -1 \quad \therefore \hat{\theta} = 135^\circ$$

وبناءً على ما تقدم فإنه عند نقطة الانقلاب على منحنى : -

(١) يتغير تقوس المنحنى من مقعر للأعلى إلى مقعر للأسفل أو العكس بالعكس

(٢) وبالتالى فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون متزايدة قبل ومتناقصة بعد أو العكس بالعكس

(٣) ولهذا فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تكون موجبة قبل وسالبة بعد أو العكس بالعكس

(٤) $\frac{dy}{dx}$ تكون أكبر ما يمكن أو أقل ما يمكن

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

وبذلك فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تغير إشارتها خلال نقطة الانقلاب .

ويمكن تلخيص طرق تحديد نقط النهايات العظمى والصغرى والانقلاب فى الجدول

(١-٧) التالى : -

نهاية عظمى	نهاية صغرى	نقطة انقلاب	
(١) تزيد قبلها (٢) تقل بعدها	(١) تقل قبلها (٢) تزيد بعدها	تتغير من مقعر لأعلى إلى مقعر لأسفل أو العكس بالعكس	$y = f(x)$
(١) موجبة قبلها (٢) سالبة بعدها (٣) تساوى الصفر عند النقطة \therefore متناقصة	(١) سالبة قبلها (٢) موجبة بعدها (٣) تساوى الصفر عند النقطة \therefore متزايدة	لها قيمة عظمى أو صغرى	$y' = \frac{dy}{dx}$
سالبة	موجبة	صفر وتغير إشارتها	$\frac{d^2y}{dx^2}$

٧ - ١٣ خلاصة :-

هنالك عدة نقاط تكون عندها مشتقة المنحنى " الدالة " مساوية للصفر أى أن $\frac{dy}{dx} = 0$ ، تعنى أن عند هذه النقط يكون المماس للمنحنى أفقياً
وعندما يكون المماس أفقياً فإن المنحنى يكون آخذاً فى تغير شكله من صعود إلى هبوط
أو من هبوط إلى صعود ، أو سيكون لحظى
ورياًضياً يمكننا إيجاد هذه النقط بإيجاد المشتقة الأولى للدالة ونساويها بالصفر ومن ثم
نوجد قيمة أو قيم x والتي يُطلق عليها حينئذ بالقيم الحرجة critical values ، وهذه
النقط الحرجة إما أن تكون نقط نهاية عظمى أو صغرى أو انقلاب .
وبمجرد الحصول على هذه النقط ، يمكن معرفة وتحديد كل منها باستخدام طريقتين
فالنهاية العظمى تكون قيمة المشتقة الثانية " التغير فى الميل - changes in slope " ،
عندها سالبة .

والنهاية الصغرى تكون قيمة المشتقة الأولى عندها موجبة .

وعند نقطة الانقلاب يكون كل من f' , f'' مساوياً للصفر وعلى ذلك ، فبحساب كل من f' , f'' يُمكن أن يُحدد نوع النقطة .

أما إذا لم نرغب في إيجاد قيمة f'' ، لصعوبة ذلك مثلاً ، فإنه بعد إيجاد القيم الحرجة ، نعرض في معادلة الدالة الأصلية بقيم أقل منها قليلاً أو أكبر منها قليلاً (من القيم الحرجة) .

وسنلاحظ حينئذ قيمة الدالة عند هذه القيم ونقارنها بقيمتها عند النقطة الحرجة . وسوف نجد أنه عند النهاية العظمى ، تزيد قيمة y قبلها وتقل بعدها والعكس عند نقط النهاية الصغرى .

٧-١٤ : مسائل محلولة على القيم العظمى والصغرى ونقط الانقلاب :

(١) أوجد نقط النهاية العظمى والصغرى للدالة : $y = f(x) = x^4$ ثم إرسمها.
الحل :-

$$f'(x) = 4x^3$$

وبوضع $f'(x) = 0$ ، للحصول على النقط الحرجة

$$\therefore 4x^3 = 0$$

$$\therefore x = 0$$

وهي القيمة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة .

والآن يلزم أن نحدد ماهية النقطة $x = 0$ ، هل هي عظمى أم صغرى وفي هذه المسألة فإنه ليس من المفيد إيجاد قيمة f'' ، حيث أن :-

$$f'' = 12x^2$$

فعند التعويض بقيمة $x = 0$ في f'' فإن $f''(0) = 0$

وعليه يلزم الاعتماد على طريقة المشتقة الأولى :-

حيث نوجد قيمها قبل وبعد النقطة $x = 0$

فعندما $x < 0$ فإن $f'(x) = -ve$ (سالبة)

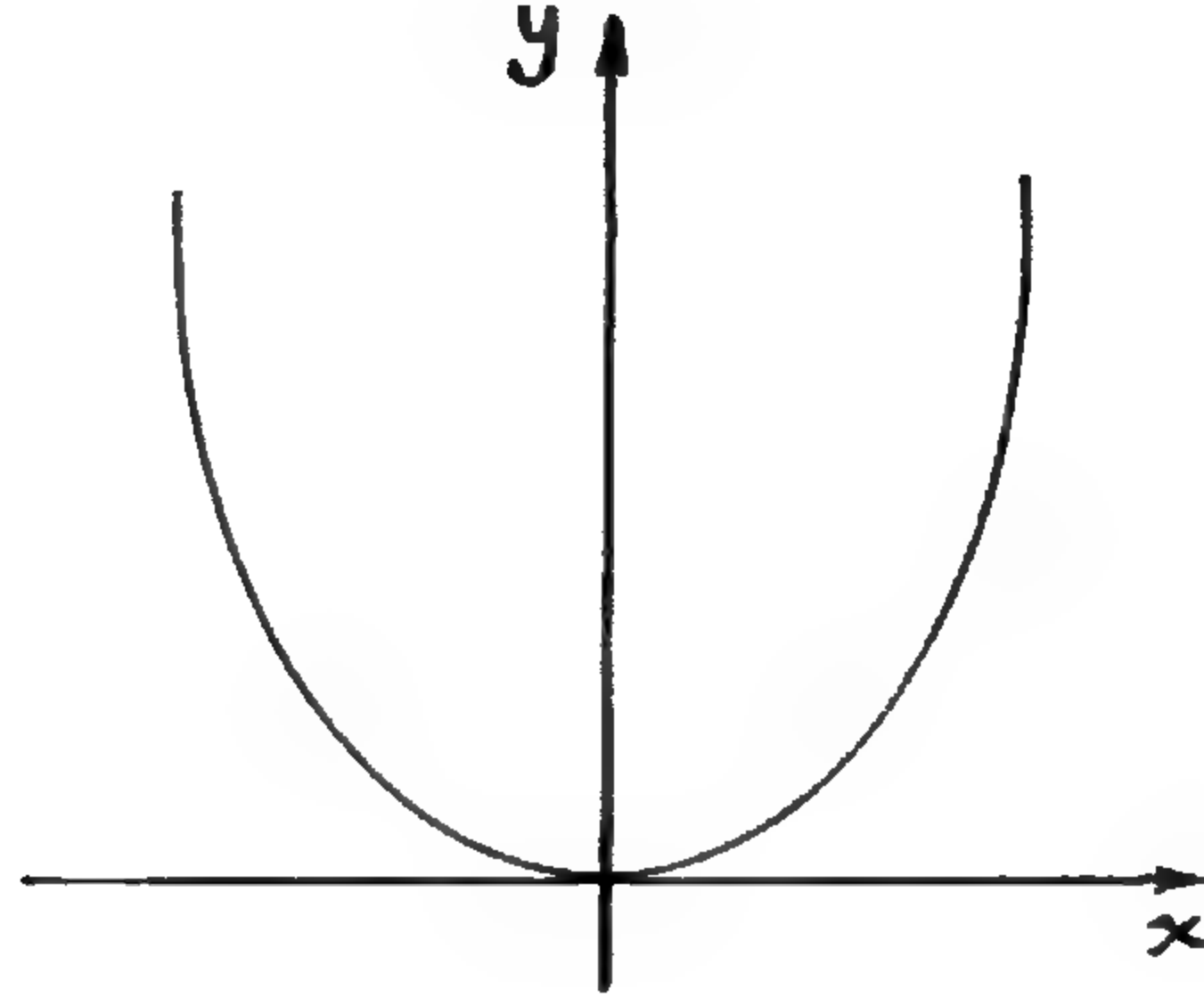
وعندما $x > 0$ فإن $f'(x) = +ve$ (موجبة)

أى أن y تُغير إشارتها من سالبة إلى موجبة

∴ عندما $x=0$ ، هنالك نهاية صغرى

∴ عند النقطة $(0,0)$ وهى نقطة الأصل هنالك نهاية صغرى ، انظر الرسم

شكل (٧-٢١) .



شكل (٧-٢١)

(٢) أوجد النقط الحرجة للدالة : $f(x)=3x^4-4x^3$ ثم إرسمها ؟

الحل :-

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 12x^2 \\ &= 12x^2(x-1) \end{aligned}$$

$$\text{وبوضع } f'(x)=0$$

$$\therefore 12x^2(x-1)=0$$

∴ إما $x=0$ وإما $x=1$ وهى النقط الحرجة لهذه الدالة

وبالنسبة للنقطة $x=0$ ، إذا ما أوجدنا المشتقة الثانية :-

$$f'' = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2)$$

فإذا ما عوضنا بقيمة $x=0$ سنجد أن $f''(0)=0$ وبالتالى فإن طريقة المشتقة الثانية

هنا لا تفيد فى تحديد قيم النهاية .

وعليه سنعتمد على طريقة $f'(x)$ ونوجد قيمها عند $x<0$ ، $1>x>0$ ، $x>1$

فعندما $x < 0$ فإن $f'(x) = -ve$

وعندما $1 > x > 0$ فإن $f'(x) = -ve$

وعندما $x > 1$ فإن $f'(x) = +ve$

وحيث أن $f'(x)$ تغير إشارتها من سالب إلى موجب

عند الواحد ($x=1$) فإن هذا يعنى أنه عند $x=1$ توجد نهاية صغرى

وعندما $x=0$ فإن $f'(x)$ لا تغير إشارتها

فهى سالبة عندما $x < 0$ وعندما $1 > x > 0$ ؛ كذلك .

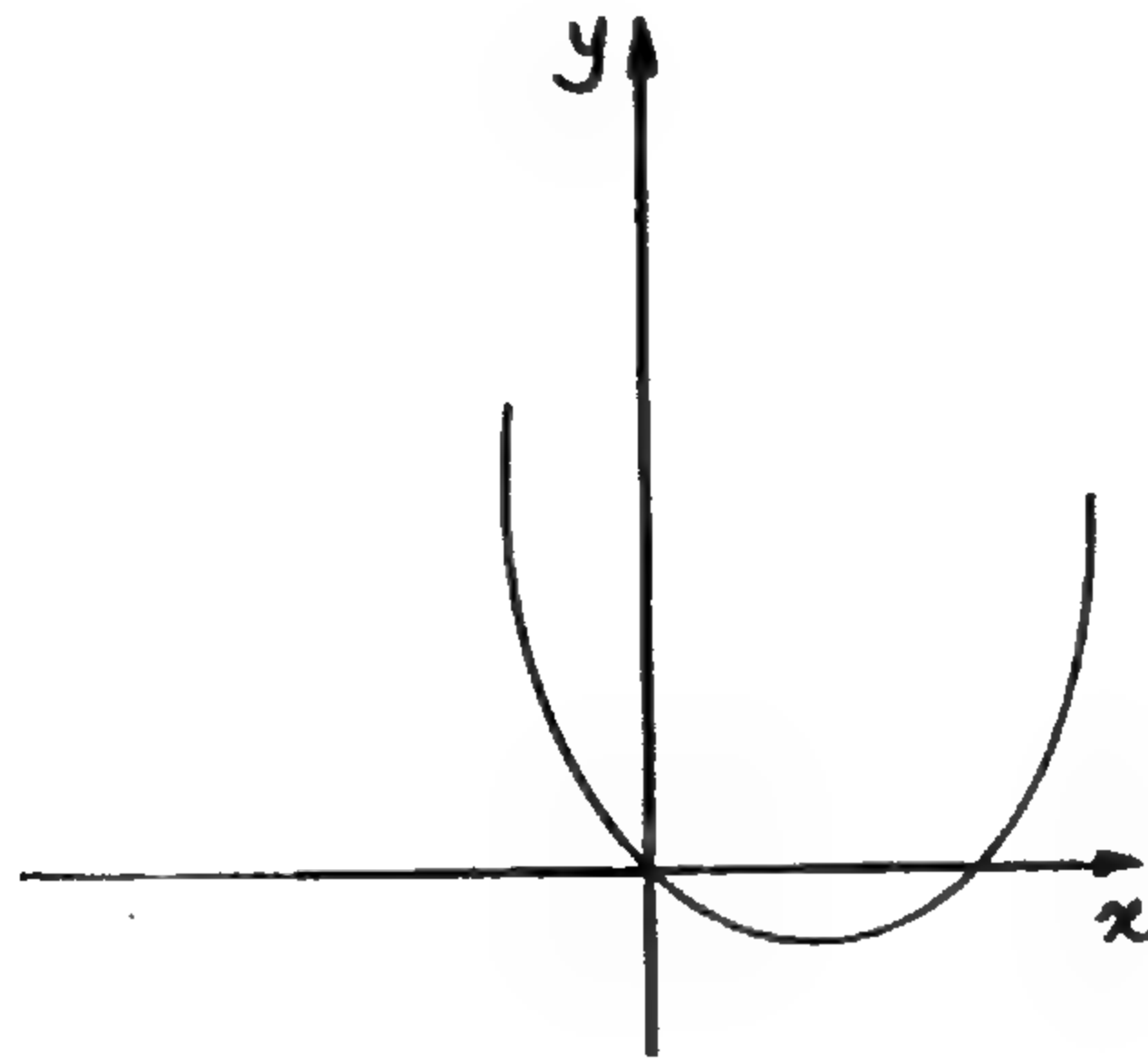
وعليه فإنه لا توجد نهاية صغرى ولا عظمى عند $x=0$

وحيث أن $f'(0)=0$ فإن الدالة يكون لها مماس أفقى عند $x=0$ ويُطلق على مثل

هذه النقطة بنقطة انقلاب .

كما وأن $f''(0)=0$ مما يؤكد وجود نقطة انقلاب عندما $x=0$

انظر الرسم شكل (٧-٢٢) .



شكل (٧-٢٢)

(٣) حدد النهايات العظمى والصغرى للدالة : -

$$y = 3x^2 - 2x$$

الحل :-

نوجد $\frac{dy}{dx}$ ونساويها بالصفر فنحصل على النقط الحرجة ثم نستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد ماهية هذه النهاية ، عظمى أم صغرى :-

$$f'(x) = 6x - 2$$

$$6x - 2 = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = 6 \quad i.e. +ve$$

\therefore عند $x = \frac{1}{3}$ توجد نقطة حرجة وهى نهاية صغرى $[f''(x) = +ve]$

وبالتعويض بقيمة $x = \frac{1}{3}$ فى الدالة $f(x)$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

\therefore نقطة النهاية الصغرى هى النقطة التى إحداثياتها

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

(٤) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة :-

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

الحل :-

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) \\ &= 15x^2(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

\therefore القيم الحرجة هى :

$$x = 0, \quad x = -1, \quad x = +1$$

وبترتيبها تصاعدياً :

$$\therefore x = -1, \quad x = 0, \quad x = +1$$

ولتحديد نوع النهاية عند كل نقطة ، نوجد المشتقة الثانية :-

$$\therefore f''(x) = 60x^3 - 30x$$

$$= 30x(2x^2 - 1)$$

$$\therefore f''(-1) = -30 < 0 \text{ (-ve)}$$

\therefore عند $x = -1$ توجد نهاية عظمى

$$، f''(1) = 30 > 0 \text{ (+ve)}$$

\therefore عند $x = 1$ توجد نهاية صغرى

$$، f''(0) = 0$$

مما يعنى أنه عند النقطة $x = 0$ توجد نقطة لا هى نهاية عظمى ولا هى نهاية صغرى
فهى بالتالى نقطة انقلاب

وللتأكد ، لنرى سوياً ، سلوك الدالة $f(x)$ عند نقطة $x = 0$ باستخدام المشتقة الأولى

فعند $-1 < x < 1$:

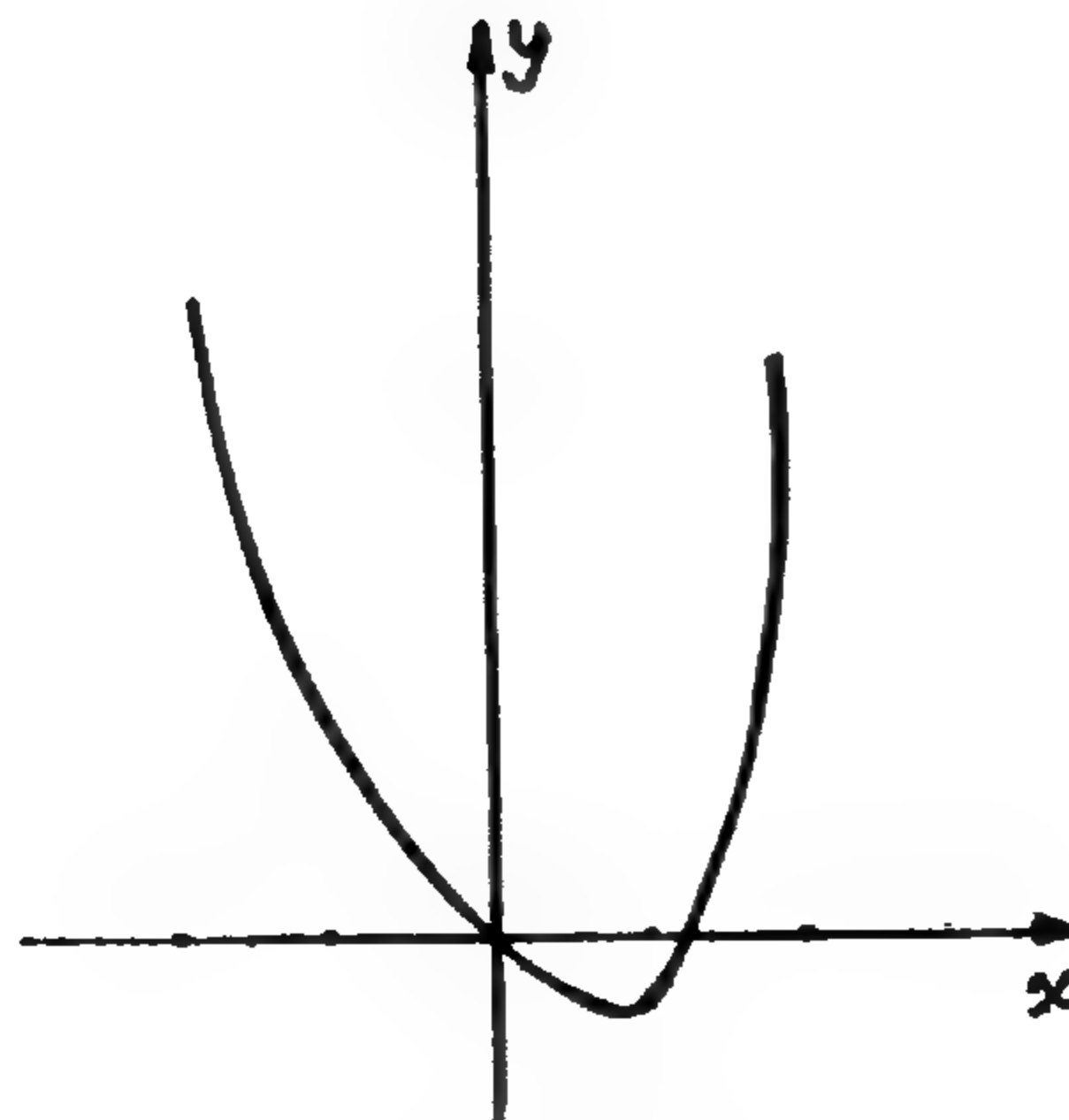
$$\therefore f'(x) = -ve \text{ (سالبة)}$$

وعند $1 > x > 0$ فإن

$$\therefore f'(x) = -ve \text{ (سالبة)}$$

أى أنه لا يوجد تغير فى إشارة y' .

، انظر الرسم شكل (٧ - ٢٣) .



شكل (٧ - ٢٣)

(٥) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة : -

$$y = 2x^2 - 8x + 5$$

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 8$$

وبمساواتها بالصفر نحصل على قيم x الحرجة : -

$$\therefore 4x - 8 = 0 \quad \therefore x = 2$$

\therefore عند $x = 2$ توجد نقطة حرجة ، وسوف نستخدم طريقة المشتقة الثانية لتحديد

ما إذا كانت $x = 2$ عظمى أم صغرى

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = 4 \quad +ve \quad \text{موجبة}$$

\therefore فعند $x = 2$ توجد نهاية صغرى .

وبالتعويض بقيمة $x = 2$ في الدالة y

$$\begin{aligned} \therefore y &= 2(2)^2 - 8(2) + 5 \\ &= 8 - 16 + 5 = -3 \end{aligned}$$

\therefore النهاية الصغرى تكون عند النقطة $(2, -3)$

(٦) : - أوجد النهاية العظمى والصغرى للدالة : -

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$$

الحل :-

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\ &= 6(x^2 - x - 2) \\ &= 6(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{وبوضع}$$

$$\therefore 6(x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1, x = 2$$

، نوجد $f''(x)$ ونوجد قيمتها المناظرة لقيم x الحرجة : -

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$= 6(2x - 1)$$

$$\therefore f''(-1) = -18 \quad \text{at } x = -1$$

$$, f''(2) = +18 \quad \text{at } x = 2$$

وعند $x = -1$:

$$\therefore f(x) = 20$$

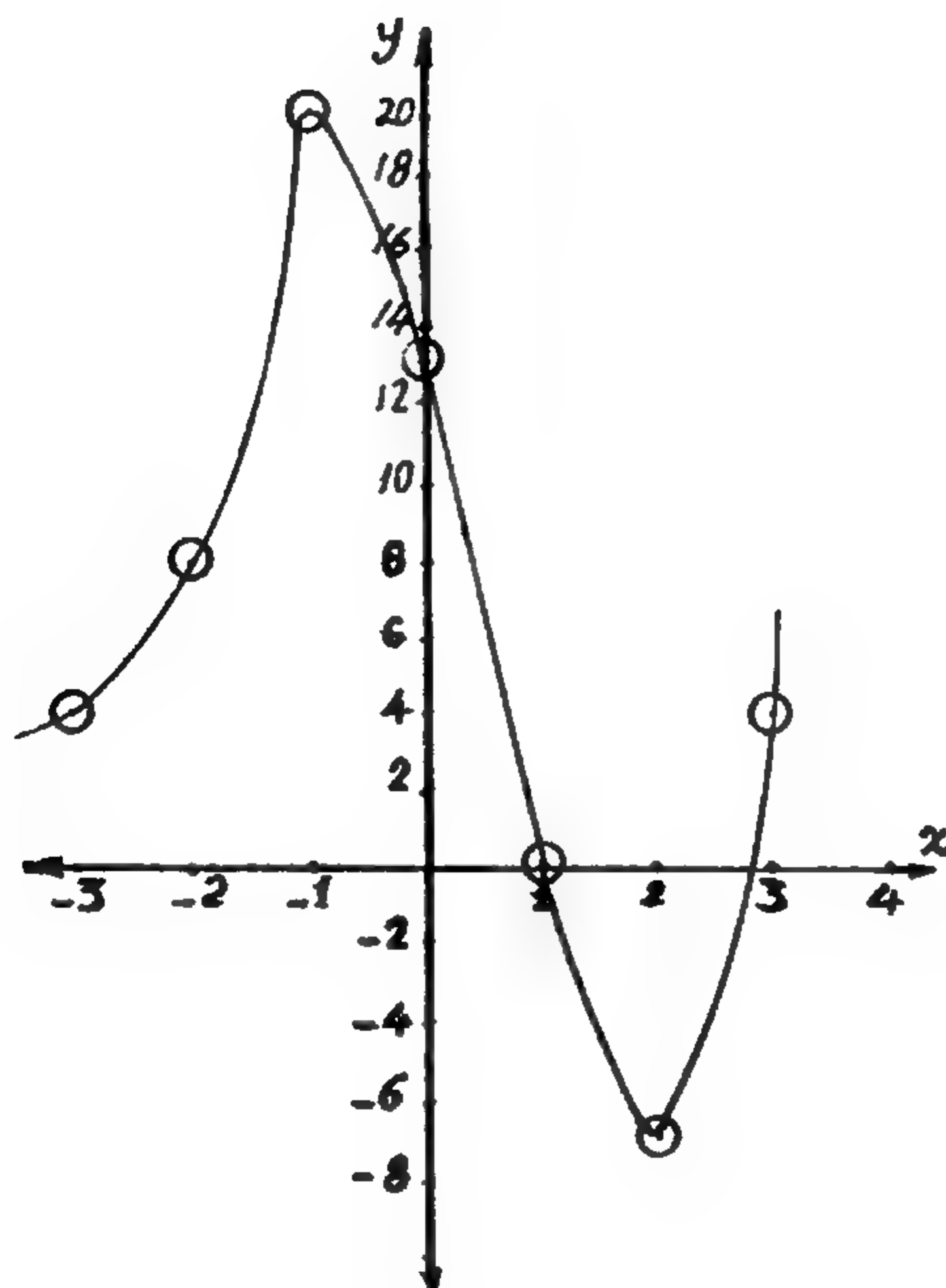
وعند $x = 2$:

$$\therefore f(x) = -7$$

\therefore ، نقطة نهاية عظمى $(-1, 20)$

، ، نقطة نهاية صغرى $(2, -7)$

انظر الرسم شكل (٧ - ٢٤) .



شكل (٧ - ٢٤)

(٧) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة التالية ، وارسمها : -

$$y = \frac{4}{x^2 - 4}$$

الحل :-

$$y' = \frac{(x^2 - 4)(0) - 4(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^2}$$
$$= \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

وبوضع $y' = 0$

$$\therefore \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} = 0$$

$$\therefore -8x = 0 \quad \therefore x = 0$$

وبالتعويض بقيمة x فى الدالة y :

$$\therefore y = \frac{4}{0 - 4} = -1$$

\therefore النقطة $(0, -1)$ هى النقطة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة .

ولتحديد ماهية هذه النقطة ، نستخدم طريقة المشتقة الأولى :

$$\text{ونوجد قيم } \frac{dy}{dx} \text{ عند } -1 \leq x < 0$$
$$0 < x \leq 1$$

فعند $x = -1$ ، مثلاً ، نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{9} (+ve)$$

وعند $x = +1$ نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8}{9} (-ve)$$

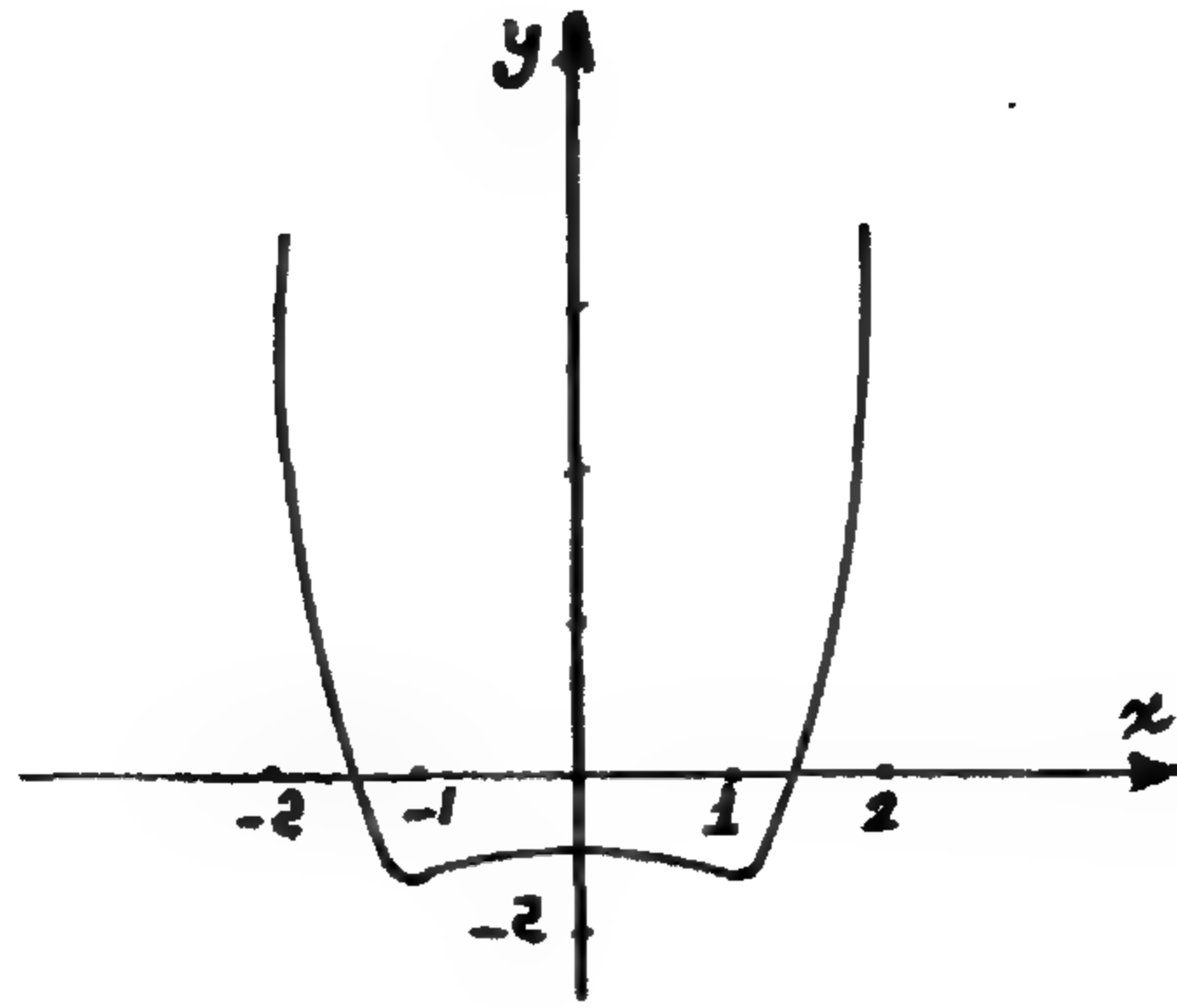
$\therefore \frac{dy}{dx}$ تُغير إشارتها من $(+ve)$ إلى $(-ve)$ عند المرور بنقطة $x = 0$

\therefore عند النقطة $(0, -1)$ ، هنالك نهاية عظمى

فإذا ما عوضنا بقيمة $x = \pm 2$ فى الدالة الأصلية سنجد أن :

$$y = \pm \infty$$

انظر الرسم شكل (٧ - ٢٥) .



شكل (٧ - ٢٥)

(٨) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة :-

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 4$$

الحل :-

نوجد $\frac{dy}{dx}$ ونساويها بالصفر ثم نوجد قيم x الحرجة

$$\begin{aligned} \therefore y' &= x^2 - 5x + 6 \\ &= (x-2)(x-3) = 0 \\ \therefore x &= 2, \quad x = 3 \end{aligned}$$

والآن نوجد المشتقة الثانية لتحديد ماهية هذه النقاط :-

$$y'' = 2x - 5$$

فعندما $x = 2$ توجد نهاية عظمى لأن :-

$$y'' = 2 \times 2 - 5 = -1 \text{ (-ve) سالبة .}$$

وعند $x = 3$ نهاية صغرى لأن :-

$$y'' = 2 \times 3 - 5 = +1 \text{ (+ve) موجبة .}$$

وبالتعويض بقيم x الحرجة في الدالة y

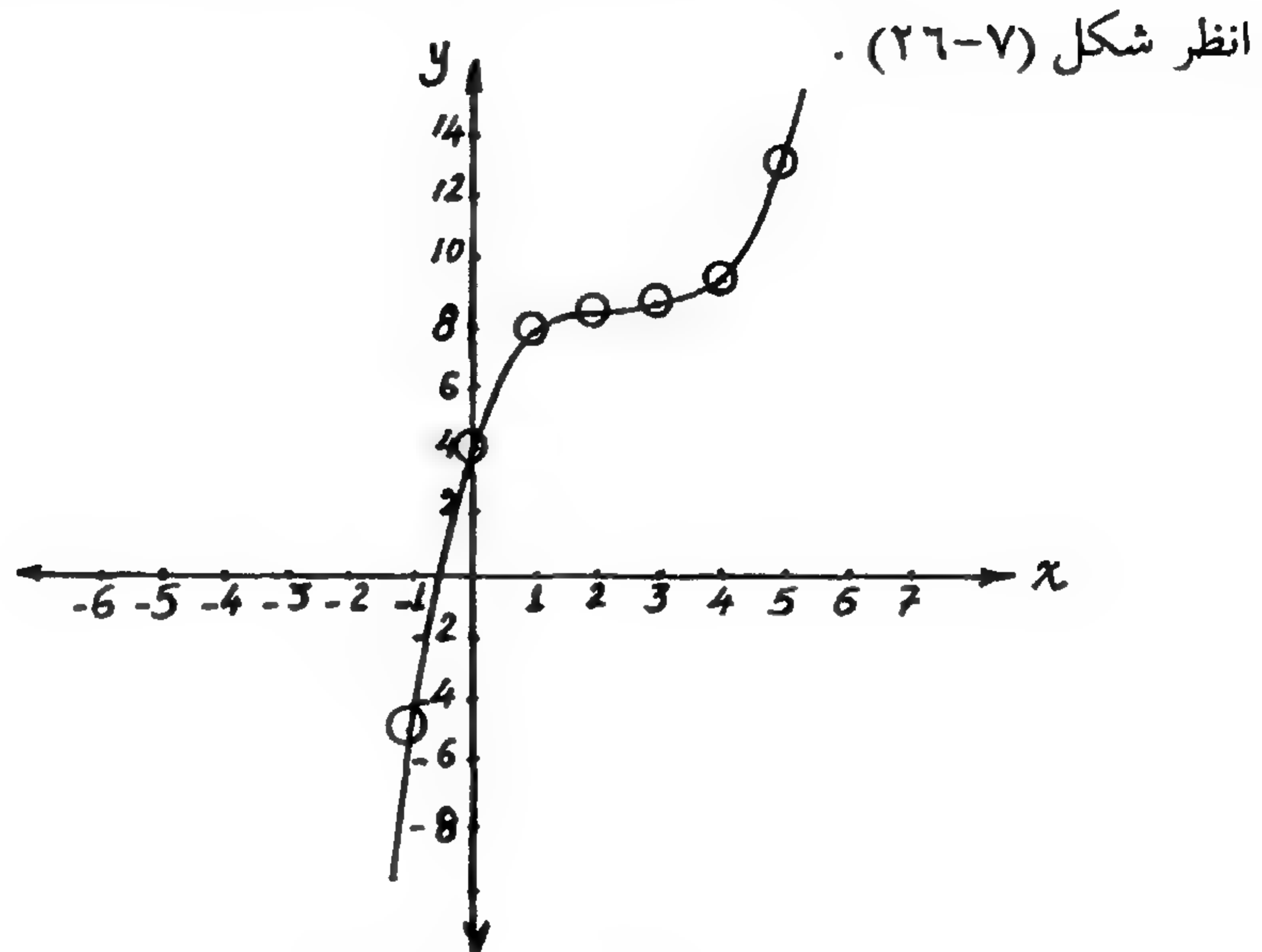
$$\therefore y(2) = \frac{(2)^3}{3} - \frac{5(2)^2}{2} + 6(2) + 4$$

$$= \frac{8}{3} - 10 + 12 + 4 = 8\frac{2}{3}$$

$$y(3) = \frac{(3)^3}{3} - \frac{5(3)^2}{2} - 6(3) + 4$$

$$= 8\frac{1}{2}$$

∴ للدالة نهاية عظمى عند $\left(2, 8\frac{2}{3}\right)$ ونهاية صغرى عند $\left(3, 8\frac{1}{2}\right)$



شكل (٧-٢٦)

(٩) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x} + x$ ، فأوجد القيم العظمى والصغرى وحدد الفترات

التي تتزايد فيها $f(x)$ أو تتناقص ثم ارسم المنحنى

الحل :-

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + 1 = \frac{-1 + x^2}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\therefore (x-1)(x+1) = 0$$

∴ $x = -1, x = 1$ ، هي النقط الحرجة

ولتحديد ماهية هذه النقط ، نعلم أن الدالة تزيد عندما $f'(x) > 0$ وتتناقص عندما $f'(x) < 0$ وأن نقط النهاية العظمى أو الصغرى ، تظهر عند النقط التى فيها :
 $f'(x)$ تغير إشارتها

ولذلك ، دعنا نرى $f'(x)$ فى الفترات المحددة الموضحة بالجدول التالى :

$x < -1$	$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$
	$+ve$
$0 > x > -1$	$-ve$
$1 > x > 0$	$-ve$
$x > 1$	$+ve$

مما يدعونا إلى استنتاج وجود نهاية عظمى عند $x = -1$ لأن $f'(x)$ تغير إشارتها من + إلى - عند هذه القيمة (حولها)

كما توجد نهاية صغرى عند $x = 1$ لأن $f'(x)$ تغير إشارتها من - إلى +

وكذلك تتزايد الدالة عند $x < -1$ وعند $x > +1$

وتتناقص عندما $0 > x > -1$ وعندما $1 > x > 0$

ويمكن الحصول على نفس النتائج بإيجاد تفاضل $f'(x)$ أى نوجد $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

فعندما $x = 1$: -

$$\therefore f''(x) = \frac{2}{1} = +ve$$

مما يعنى نهاية صغرى

وعندما $x = -1$: -

$$f''(x) = \frac{2}{(-1)^3} = -ve$$

مما يعنى نهاية عظمى

وبالتعويض بقيم x ، $(x = -1, +1)$ فى الدالة الأصلية .

نحصل على قيم y المناظرة

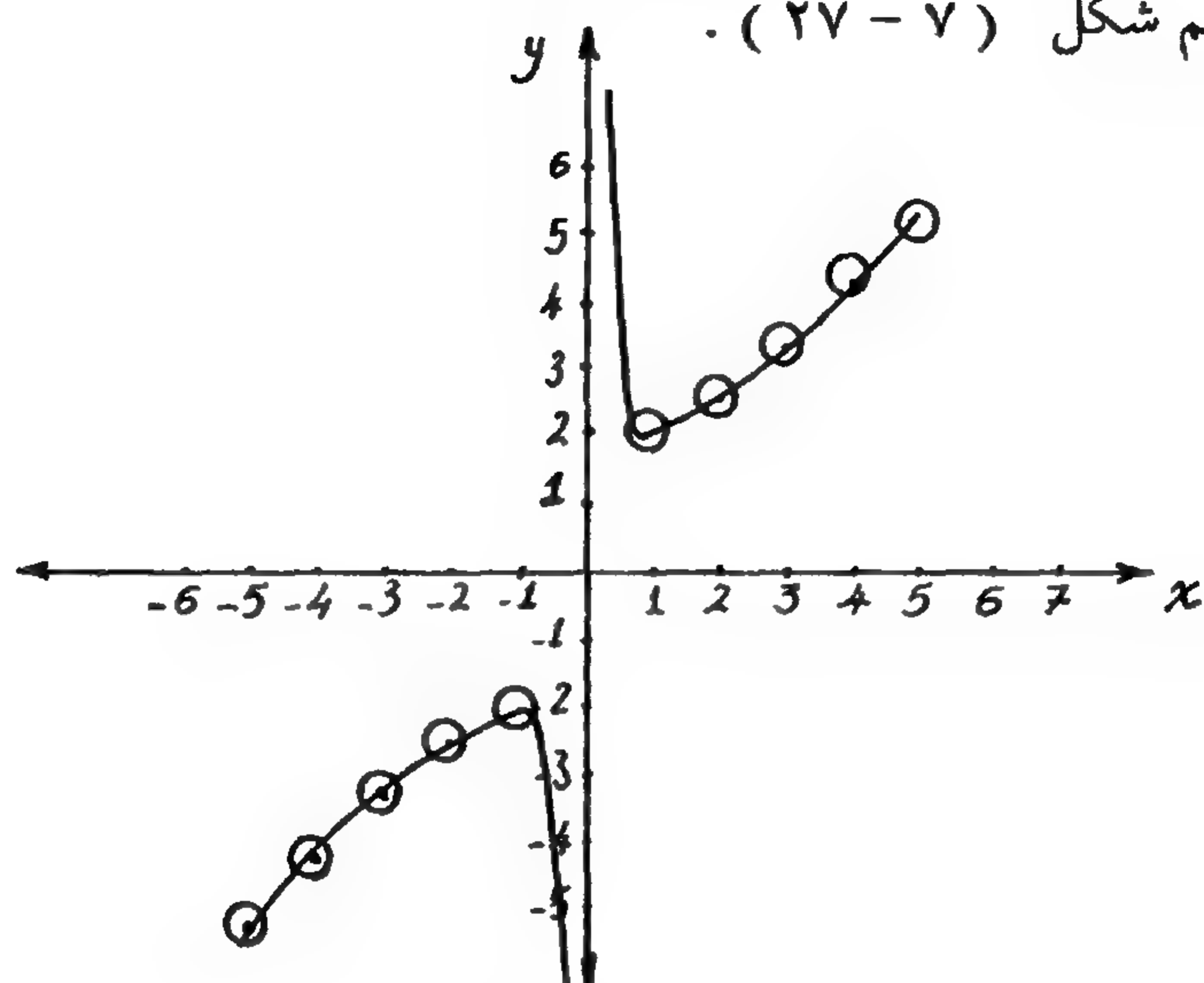
$$\therefore (-1, -2)$$

نقطة نهاية عظمى

$$, (1, 2)$$

نقطة نهاية صغرى

أنظر الرسم شكل (٧ - ٢٧)



شكل (٧ - ٢٧)

(١٠) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة :-

$$y = 3x^3 - 9x^2 - 27x + 15$$

الحل :-

$$y' = 9x^2 - 18x - 27$$

$$= 9(x^2 - 2x - 3)$$

$$= 9(x+1)(x-3)$$

وبوضع $y' = 0$

$$\therefore (x+1)(x-3) = 0$$

$\therefore x = -1$ ، $x = 3$ هي القيم الحرجة لهذه الدالة .

ولتحديد ماهية هذه القيم (عظمى أم صغرى) ، نوجد y'' :-

$$y'' = 18x - 18 = 18(x-1)$$

فعندما $x = -1$:-

$$y'' = -36 = -ve \quad \text{سالبة}$$

∴ عند $x = -1$: - توجد نهاية عظمى

وعندما $x = 3$: -

$$y'' = 54 - 18 = 36 = +ve \quad \text{موجبة}$$

∴ عند $x = 3$ توجد نهاية صغرى

وبالتعويض بقيم x هذه نوجد قيم y المناظرة من الدالة الأصلية : -

$$y_{\max} = 3(-1)^3 - 9(-1)^2 - 27(-1) + 15 = 30$$

$$y_{\min} = 3(3)^3 - 9(3)^2 - 27(3) + 15 = -66$$

(١١) إحسب القيم العظمى والصغرى للدالة :

$$f(x) = x^3 - x$$

في الفترة من $x = -1$ إلى $x = 2$

الحل :-

$$y' = 3x^2 - 1$$

ثم نضع $y' = 0$

$$\therefore 3x^2 - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

ثم نوجد قيم الدالة y عند قيم x هذه .

$$\therefore f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

وبحساب قيم $f(x)$ عند حدود الفترة

$$\therefore f(-1) = 0$$

$$f(2) = 6$$

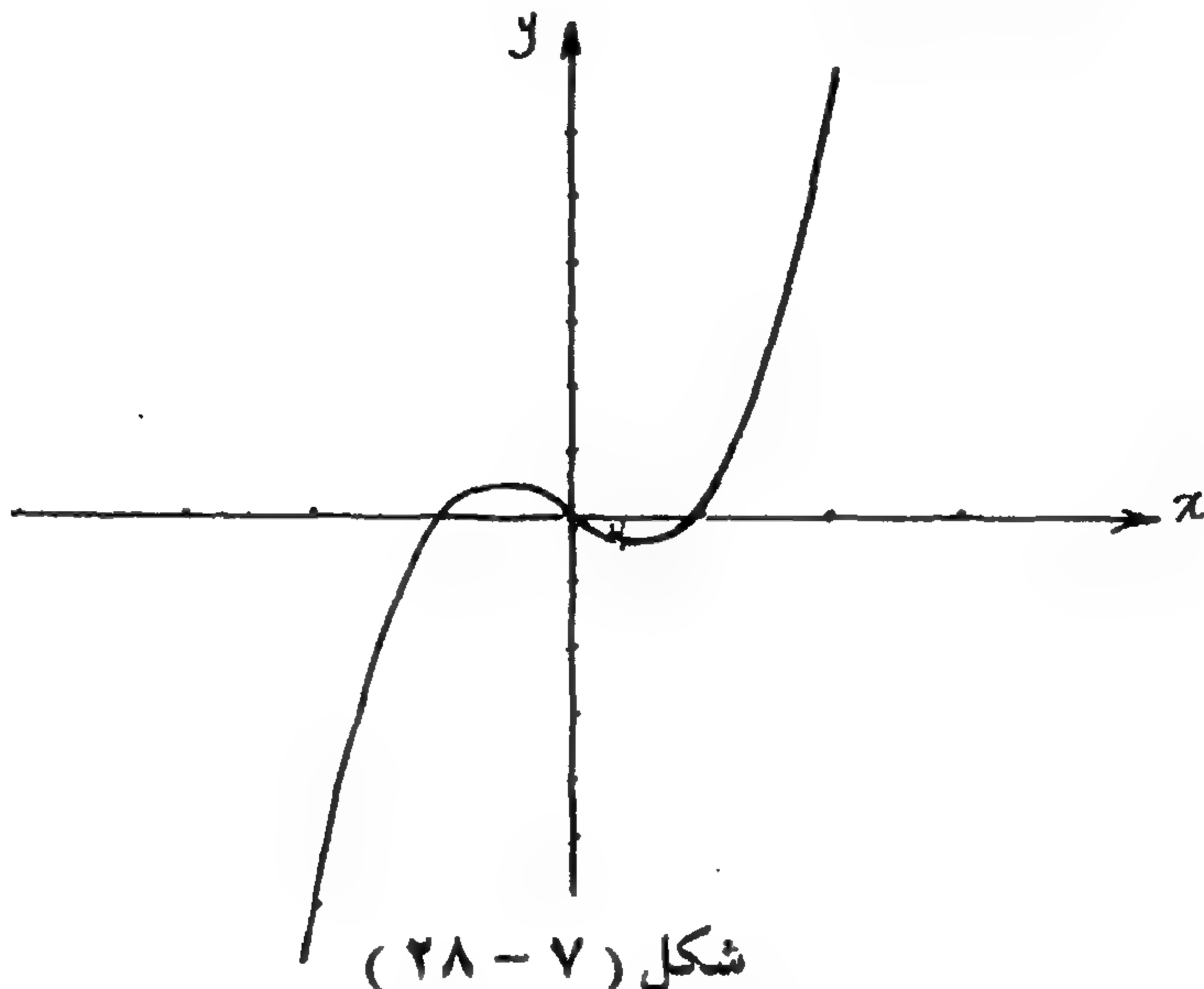
∴ النقطة (2) وهي نهاية المدى ، تعتبر أقصى نهاية للدالة .

∴ أقصى قيم لـ f في الفترة $(-1, 2)$: -

هى $\frac{-2}{3\sqrt{3}}, 6$

والنقطة $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ ليست النهاية العظمى المطلقة ، إلا أنها العظمى النسبية فى

هذه الفترة relative maximum ، انظر الرسم شكل (٧ - ٢٨)



(١٢) أوجد نقط النهاية العظمى والصغرى والانقلاب للدالة وارسمها : -

$$y = \sin x + \cos x$$

الحل :-

$$y' = \cos x - \sin x$$

$$y' = 0 \quad \text{ثم نضع}$$

$$\therefore \cos x - \sin x = 0$$

$$\therefore \cos x = \sin x$$

$$\therefore \tan x = 1$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

كما وأنه فى الربع الثالث من الإحداثيات الكرتيزية ، نجد أن كلاً من $\cos x$ ، $\sin x$

تكون سالبة وبالتالي فإنهما يتساويان كذلك فى الربع الثالث أى عندما $x = \pi + \frac{\pi}{4}$

$$\therefore x = 180 + 45 = 225^\circ = \frac{5\pi}{4}$$

ولما كان هذا المنحنى له دورة كاملة كل 2π ويتكرر بعدها فإذا أضفنا $2\pi n$ لهذا

الرقم : $\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ ، حيث $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

فسوف نجد عدد لا نهائى من القيم الحرجة ولهذا فإن النقط الحرجة هي :

$$\frac{\pi}{4}, 2\pi n, \frac{5\pi}{4}, 2\pi n, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

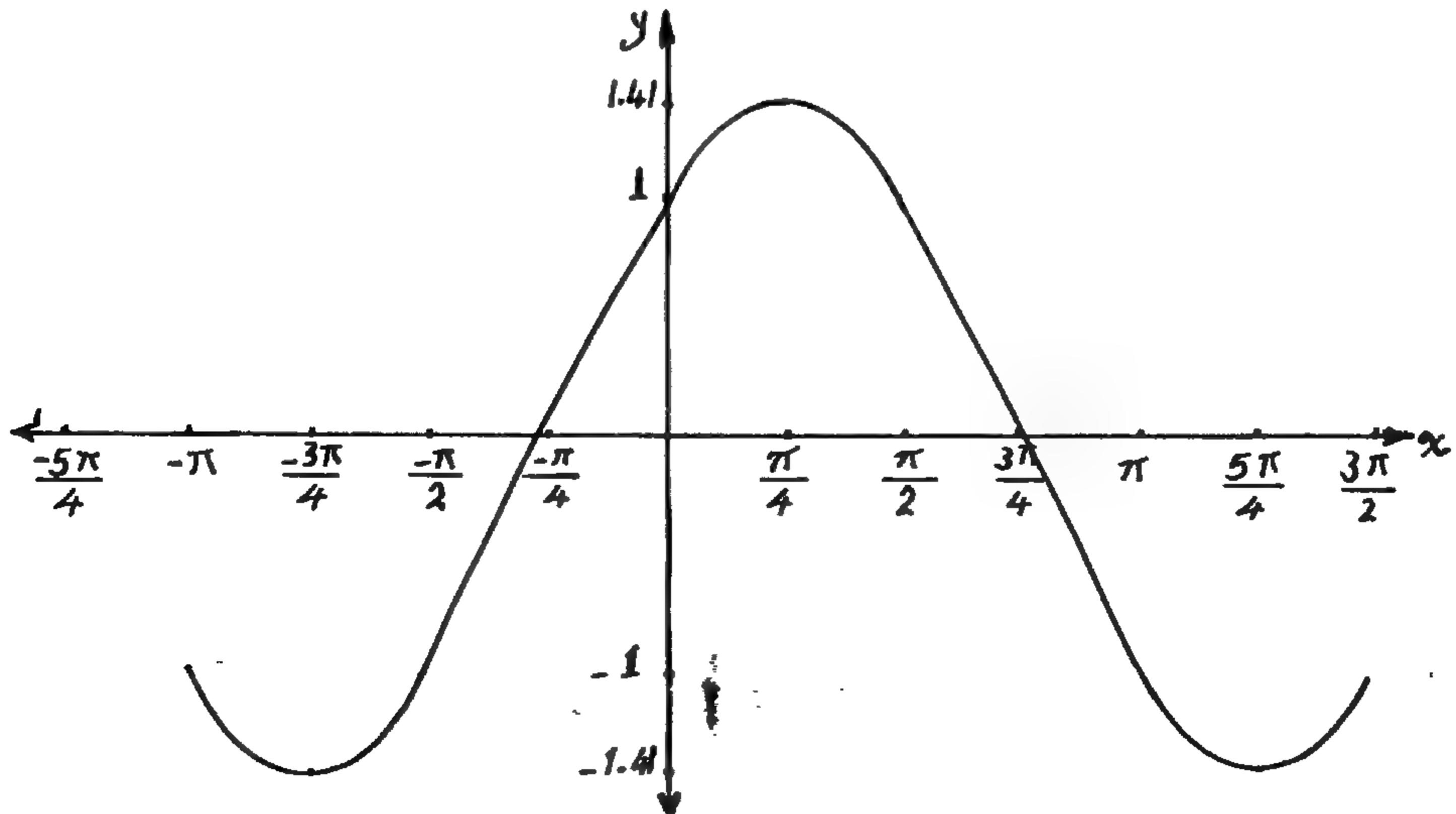
إلا أننا سنقتصر فى دراسة الدالة فى المدى :

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

وسوف نستخدم طريقة المشتقة الأولى لتحديد ماهية النقط الحرجة ولابد من تجربة قيم

أكبر قليلاً أو أقل قليلاً من كل من هذه القيم الحرجة ثم نسطر الجدول التالى :

		$\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$	
$x < \frac{\pi}{4}$	$x = 0$	$+1$	$+$
$\frac{5\pi}{4} > x > \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{2}$	-1	$-$
$x > \frac{5\pi}{4}$	$x = 2\pi$	$+1$	$+$



شكل (٧ - ٢٩)

الباب الثامن

تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

Applied problems in maxima and minima

٨-١ : - عام : - إن أول خطوة فى حل المسائل من هذا النوع هو معرفة أى من المتغيرات ، مطلوب حساب قيمته العظمى أو الصغرى .

أى معرفة المتغير التابع y ، ثم معرفة المتغير المستقل x ثم نكتب معادلة فيما بين y , x وأى متغيرات أخرى فى المسألة يجب ملاحظاتها بالتعويض بحيث يبقى لنا المتغير المستقل x فقط والمتغير التابع y .

ثم نفاضل y بالنسبة إلى x ثم نساوى y' بالصفر لإيجاد قيم x الحرجة . وفى النهاية نحسب أيا من قيم x الحرجة هى نهاية عظمى أم صغرى .

(١) إذا كانت سرعة جسم بالقدم / ثانية تُعطى بالعلاقة :-

$$V(t) = t^2 - 4t + 5 , \quad t \geq 0$$

حيث t الزمن بالثوانى .

فأوجد الزمن اللازم لكى تُصبح السرعة عظمى نسبية أو صغرى نسبية .

الحل :-

نوجد $V'(t)$ ونساويها بالصفر ونحل المعادلة لإيجاد قيم t الحرجة .

$$V'(t) = 2t - 4 = 2(t - 2)$$

وعندما $V'(t) = 0$ فإن $t = 2$ وهى القيمة الحرجة للزمن

ولمعرفة ما إذا كانت $t = 2$ هى قيمة عظمى أم صغرى ، نختبر $V'(t)$

عندما $0 \leq t < 2$ وعندما $t = 2$

وسوف نلاحظ أن $V'(t) < 0$ لقيم $0 \leq t < 2$

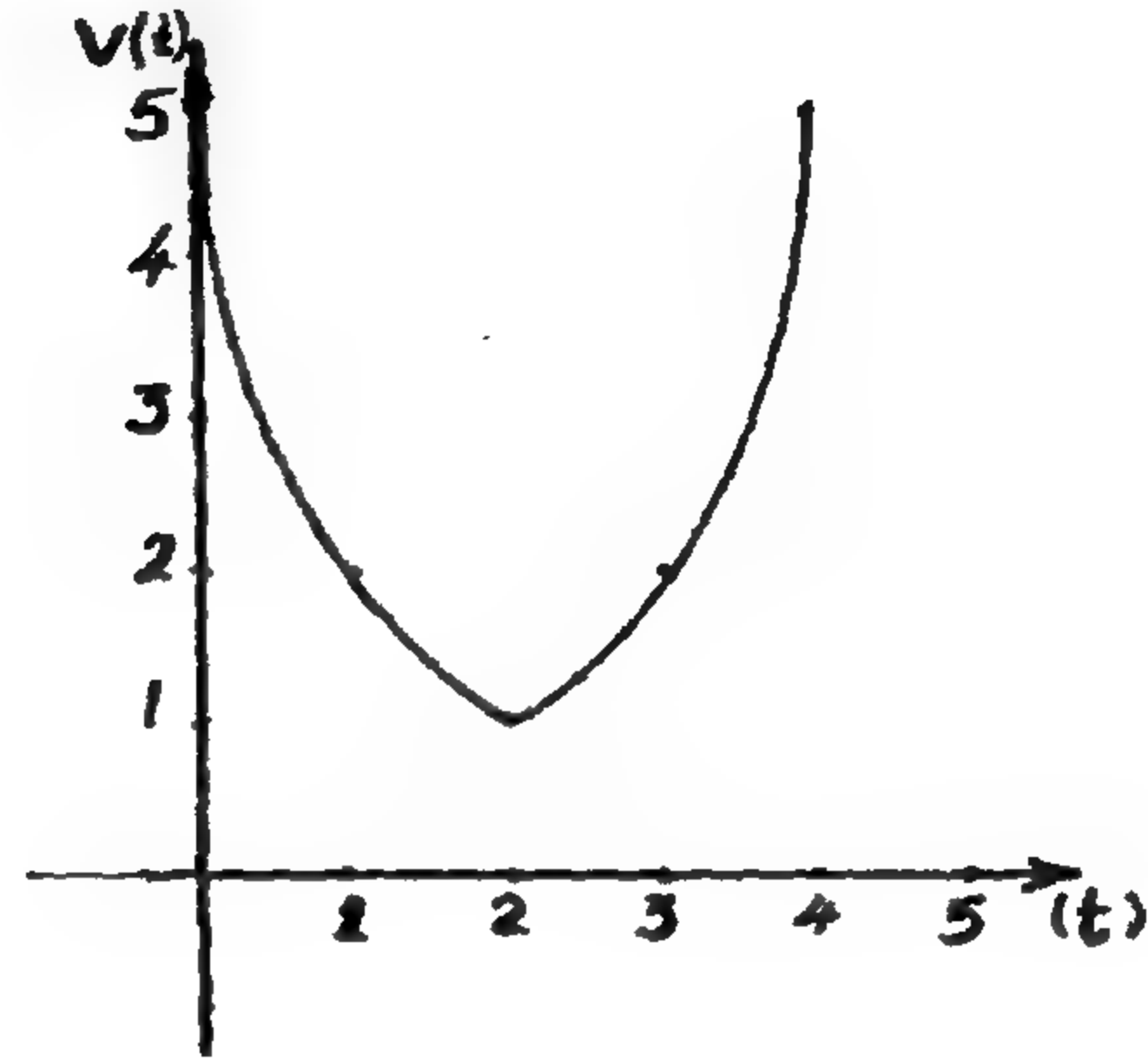
، $V'(t) > 0$ لقيم $t > 2$

مما يعنى أن V لها نهاية صغرى نسبية عندما $t = 2$ ، $V(2) = 1 \text{ ft/s}$ ،

والآن ، لنختبر نقطة النهاية أى $t = 0$ وسوف نجد أن $V(0) = 5$

وسوف نجد كذلك أن $V'(0) = -4$ وهي ذات قيمة سالبة وبالتالي فإن V ، دالة تناقصية عند $t = 0$.

ولذلك ، ففي الفترة $t \geq 0$ فإن $V(0)$ تساوي 5 ft/s وهي قيمة عظمى ، أنظر الرسم شكل (٨-١) .



شكل (٨-١)

(٢) كيف يمكنك التعبير عن رقم معين ، كمجموع رقمين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحل :-

لنعتبر : أى رقم معين $a =$

أحد جزئيه $x =$

$\therefore (a - x)$ هي الجزء الآخر من الرقم المعين .

وحاصل ضرب رقميه المكونين لجزئيه يساوى :-

$$x(a - x) = xa - x^2 = y$$

ولكى يكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن نوجد y' ونساويها بالصفر

$$y' = a - 2x = 0$$

$$\therefore x = \frac{a}{2}$$

ولمعرفة ما إذا كانت $x = \frac{a}{2}$ قيمة عظمى أم لا ، سنأخذ قيمة أقل من $\frac{a}{2}$ ولتكن $\frac{a}{4}$ ،
ونأخذ قيمة أخرى أكبر من $\frac{a}{2}$ ولتكن $\frac{3a}{4}$ ثم نحسب قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند $x = \frac{a}{4}, \frac{3a}{4}$:
فإذا كان هنالك تغير في الإشارة من (+) إلى (-) ، تكون $x = \frac{a}{2}$ قيمة عظمى :-

$$\frac{dy}{dx} \left(at \ x = \frac{a}{2} \right) = a - \frac{2a}{4} = \frac{a}{2} (+ve)$$

$$\frac{dy}{dx} \left(at \ x = \frac{3a}{4} \right) = a - \frac{6a}{4} = -\frac{a}{2} (-ve)$$

وعليه فإن $x = \frac{a}{2}$ هي فعلاً قيمة عظمى وعليه فإن الرقم المعطى يُقسم إلى جزئين تماماً
فيكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

(٣) إذا اعتبرنا الرقم 100 كمجموع جزئين ، فإوجد قيمة كل من جزئيه بحيث
يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحل :-

لنعتبر x أحد جزئى الرقم 100

$$\therefore \text{الجزء الآخر} = 100 - x$$

والآن حاصل ضرب الجزئين $p =$:-

$$p = x(100 - x) = 100x - x^2$$

نوجد p' ونساويها بالصفر

$$\therefore p' = 100 - 2x = 0$$

$$\therefore 2x = 100$$

$$\therefore x = 50$$

وهي القيمة الحرجة الوحيدة .

ومثل المتبع في المسألة السابقة نتأكد بطريقة y' من أن $x = 50$ هي نهاية عظمى ،

وعليه فإن حاصل ضرب جزئى الرقم 100 ، يكون أقصى ما يمكن عندما يكون كل

من جزئيه متساويين وهو هنا 50 ، $50 + 50 = 100$ ، $50 \times 50 = 2500$

(٤) اوجد العدد الذى يزيد عن مربعه بأكبر قيمة ممكنة .

الحل :-

نكتب أولاً المعادلة التى تعبر عن الفرق بين العدد ومربعه وليكن العدد x وليكن الفرق هو f .

$$\therefore f = x - x^2$$

ثم نوجد f' ونساويها بالصفر ونحل المعادلة للحصول على قيم x الحرجة .

$$\therefore f' = 1 - 2x = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

ولتحديد ما إذا كانت هذه القيمة عظمى أم لا نوجد المشتقة الثانية .

$$\therefore f'' = -2 \text{ (-ve)}$$

مما يعنى أن المشتقة الثانية دائماً سالبة

وهذا يعنى أن $x = \frac{1}{2}$ هى قيمة عظمى

\therefore فالعدد الذى يزيد عن مربعه بأكبر قدر ممكن هو $\frac{1}{2}$ ،

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(٥) ما هما العددان الموجبان اللذان مجموعهما = 20 وحاصل ضربيهما أكبر ما يمكن .

الحل :-

ليكن أحد العددين x \therefore فالعدد الآخر :- $20 - x$

وحاصل ضربيهما p

$$p = x(20 - x)$$

$$= 20x - x^2 \quad , \quad x > 0 \quad , \quad 20 - x > 0$$

أى $0 < x < 20$

$$\therefore \frac{dp}{dx} = 20 - 2x$$

$$= 2(10 - x) = 0$$

$$\therefore x = 10$$

وعند $x = 10$ توجد قيمة حرجة وللتأكد من أنها عظمى ننظر إلى $\frac{dy}{dx}$ عندما

$$x < 10 \text{ وعندما } x > 10$$

فإذا كان هنالك تغير في الإشارة من (+) إلى (-) تكون $x = 10$ نهاية عظمى وسوف نجد أن :-

$$\frac{dp}{dx} > 0 (+ve) \quad x < 10 \quad \text{عندما}$$

$$\frac{dp}{dx} < 0 (-ve) \quad x > 10 \quad \text{عندما}$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad x = 10 \quad \text{عندما}$$

وعليه فإن $x = 10$ تمثل نهاية عظمى ويمكن الحصول على نفس النتيجة إذا ما استخدمنا طريقة المشتقة الثانية .

$$\frac{d^2p}{dx^2} = -2 \quad (-ve)$$

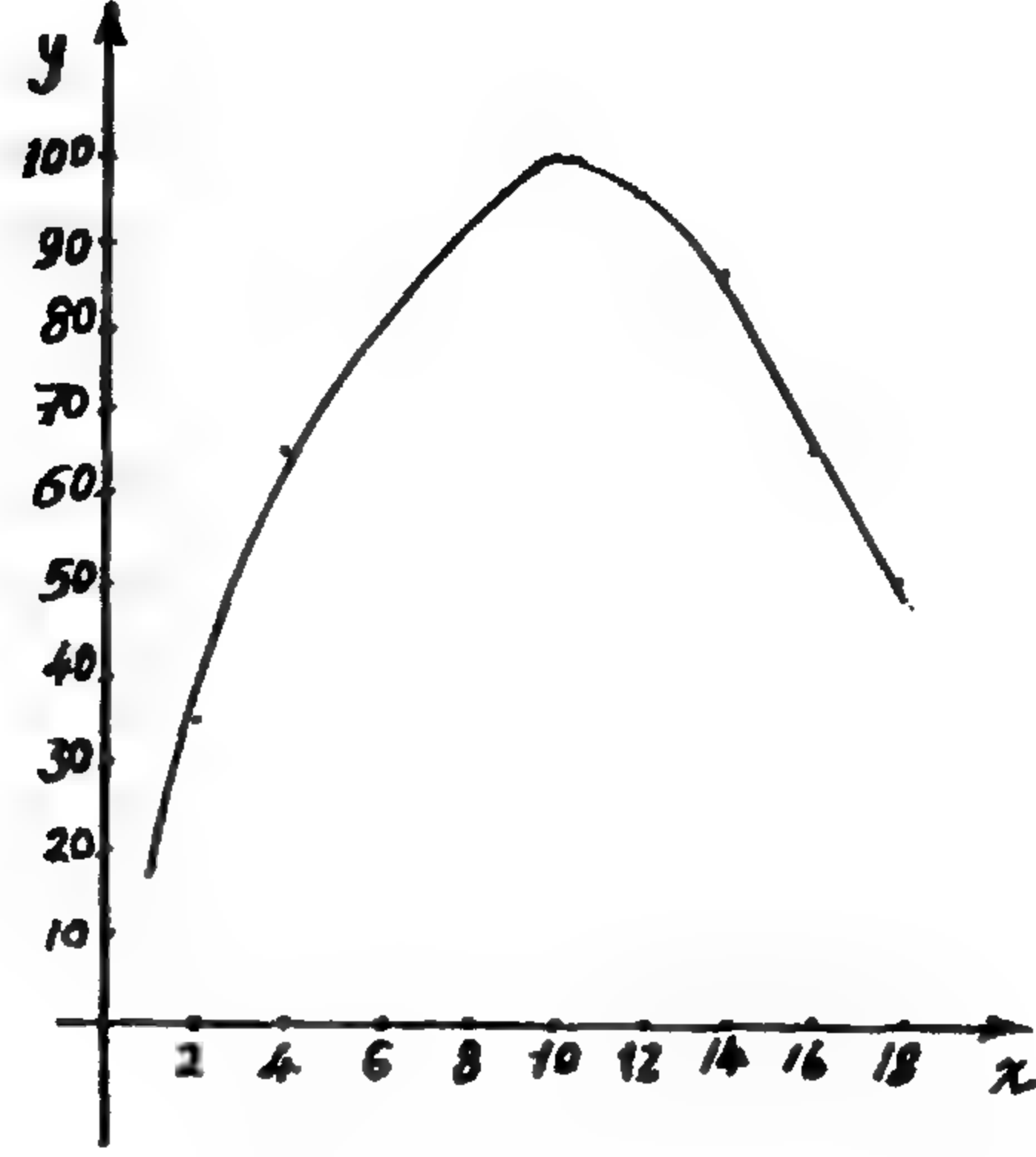
وهي سالبة دائماً مما يعنى وجود نهاية عظمى عند $x = 10$

وإذا نظرنا إلى الرسم شكل (٨-٢) سنجد أنه مقعر للأسفل عند كل نقطة عليه وللمنحنى قيمة عظمى عندما $x = 10$

وبذلك فإن العددين اللذان مجموعهما = 20 وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن هما 10 , 10 وحاصل ضربهما = 100

ملحوظة :- يمكن التأكد حسابياً من ذلك بتجربة أى عددين كالتالى :-

$2 + 18 = 20$,	$2 \times 18 = 36$
$4 + 16 = 20$,	$4 \times 16 = 64$
$6 + 14 = 20$,	$6 \times 14 = 84$
$7 + 13 = 20$,	$7 \times 13 = 91$
$8 + 12 = 20$,	$8 \times 12 = 96$
$9 + 11 = 20$,	$9 \times 11 = 99$
$10 + 10 = 20$,	$10 \times 10 = 100$



شكل (٨-٢)

(٦) قُسم العدد 72 إلى جزئين بحيث يكون حاصل ضرب أحدهما في مكعب الآخر، أكبر ما يمكن ، فما هما العددان .

الحل :-

لتكن y هي أحد الجزئين

\therefore الجزء الآخر $= (72 - y)$

وحاصل ضربهما p :-

$$\begin{aligned} p &= (72 - y) \times y^3 \\ &= 72y^3 - y^4 \end{aligned}$$

بعد ذلك نوجد $\frac{dy}{dx}$ ونساويها بالصفر

$$\therefore 216y^2 - 4y^3 = 0$$

$$\therefore 4y^2 (54 - y) = 0$$

$$\therefore y = 0$$

$$y = 54$$

وهي القيمة الحرجة لـ y

وواضح أن $y=0$ لا تعنى شيئاً هنا لأنه إذا كان أحد الجزئين صفراً فالجزء الآخر $= (72-0) = 72$ وحاصل ضربهما $= 0$ ولا يساوى قيمة عظمى .
أما إذا وضعنا $y=54$

فتوجد $\frac{d^2p}{dy^2}$ لمعرفة ما إذا كانت قيمة y هذه تحقق نهاية عظمى أم لا ،

$$\frac{d^2p}{dy^2} = 432y - 12y^2$$

وبالتعويض بقيمة $y=54$ سنجد أن :-

$$\frac{d^2p}{dy^2} = -11664 = (-ve)$$

وعليه فإنه عندما يكون أحد الجزئين $= 54$ ويكون الجزء الآخر مساوياً $18 (72-54)$ فإنه توجد نهاية عظمى .

(٧) ما هما العددان الموجبان اللذان مجموعهما $= 100$ ومربع أحدهما مضروباً في ضعف مكعب الآخر ، أقصى ما يمكن

الحل :-

نفرض أن أحد العددين هو x

∴ العدد الآخر يكون $(100-x)$

والآن نكتب المعادلة كالتالى :-

$$p = x^2 \times 2[(100-x)^3]$$

$$\begin{aligned} p' &= 4x(100-x)^3 - 6x^2(100-x)^2 \\ &= 2x(100-x)^2 [2(100-x) - 3x] \\ &= 2x(100-x)^2 [200 - 5x] \end{aligned}$$

وبوضع $p' = 0$

$$\therefore 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

$$, (100-x)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad (100-x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 100$$

$$, 200 - 5x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 40$$

∴ قيم x الحرجة هي 0 , 100 , 40

ولما كانت :-

$$p(0) = 0 , \quad p(100) = 0$$

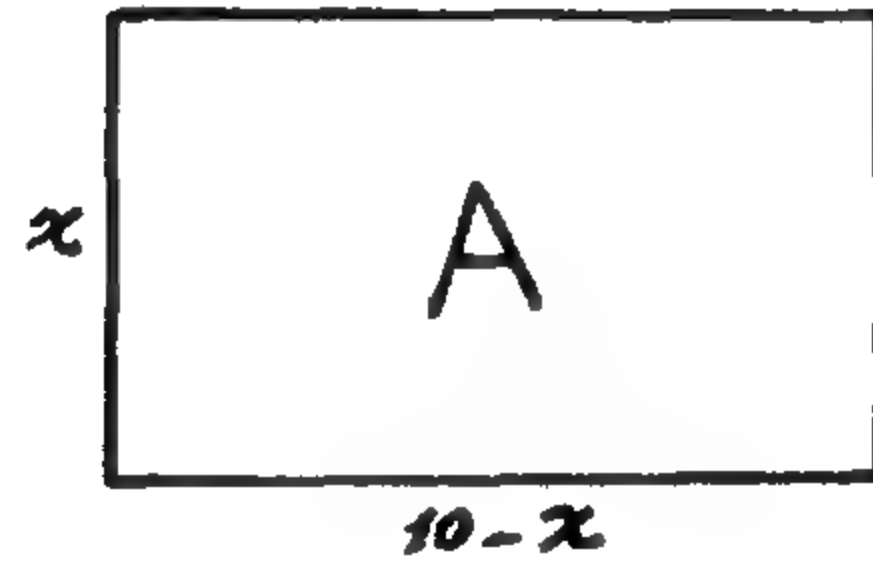
$$p(40) = 2(40)^2 [(100 - 40)^3] \\ = 3200 [60^3] > 0$$

∴ فقيمة $x = 40$ هي التي تحقق الشرط اللازم وعليه يكون الرقمان هما 40 , 60

(٨) قطعة سلك طولها 20 متر يراد تشكيلها بحيث تكون ذات شكل مستطيل فما هي أبعاد هذا المستطيل بحيث يحيط بأكبر مساحة ممكنة .

الحل :-

أنظر الرسم شكل (٨-٣) .



شكل (٨-٣)

إذا اعتبرنا أن عرض المستطيل $x =$

فيكون طوله

$$\frac{20 - 2x}{2} = (10 - x)$$

، مساحة المستطيل $A = x(10 - x)$

$$\frac{dA}{dx} = 10 - 2x$$

وبوضع $A' = 0$

$$\therefore 2(5 - x) = 0$$

$$\therefore x = 5$$

ولمعرفة ما إذا كانت $x=5$ تحقق نهاية عظمى أم لا ، نختار قيمة أكبر من x قليلاً
ولتكن 6 وقيمة أقل قليلاً ولتكن 4 ونثبت أن A' تغير إشارتها موجب إلى سالب ،
 $A'(4)=2$ ، $A'(6)=-2$

$\therefore x=5$ هي بالتأكيد القيمة التي تحقق الشرط اللازم (أكبر مساحة)

وعليه تكون أبعاد المستطيل 5 ، $(10-5)=5$

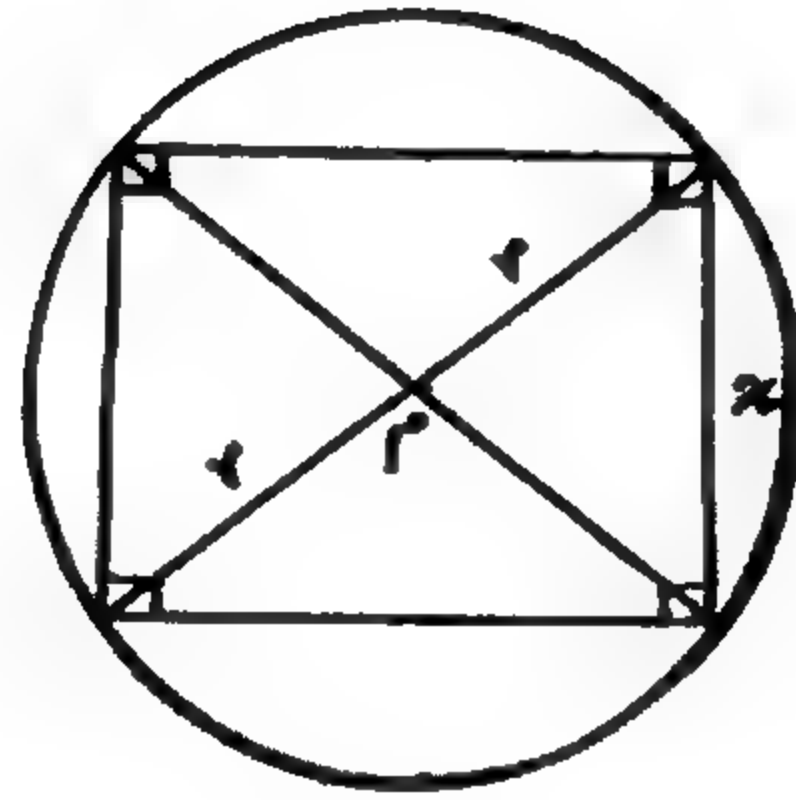
أى أن طوله = عرضه أى أنه يلزم أن يكون الشكل على هيئة مربع طول ضلعه $5m$.

ويمكن إثبات أن $x=5$ هي نهاية عظمى إذا ما أوجدنا A'' فسنجد أنها سالبة مما يؤكد الإجابة السابق الحصول عليها .

(٩) ما هي أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها r

الحل :-

أنظر الرسم شكل (٨-٤) .



شكل (٨-٤)

من الرسم يتضح أن قطر المستطيل $= 2r$

، طول ضلع المستطيل (العرض) $= x$

\therefore طول المستطيل $= \sqrt{(2r)^2 - x^2}$

$$\sqrt{4r^2 - x^2} =$$

ومساحة المستطيل = الطول \times العرض $= A$

$$\therefore A = x\sqrt{4r^2 - x^2}$$

$$A' = x \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{(4r^2 - x^2)} + \sqrt{(4r^2 - x^2)} \cdot 1 = 0$$

$$\therefore A' = x \times \frac{1}{2} (4r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \times -2x + (4r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

وبالإختصار :-

$$\therefore \frac{4r^2 - 2x^2}{(4r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

ولما كان المقام $(4r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ لا يمكن أن يساوى الصفر لأنه يمثل طول المستطيل ،
لذلك فإن البسط لابد وأن يساوى الصفر :-

$$\therefore 4r^2 - 2x^2 = 0$$

$$\therefore 4r^2 = 2x^2$$

$$\therefore x^2 = 2r^2$$

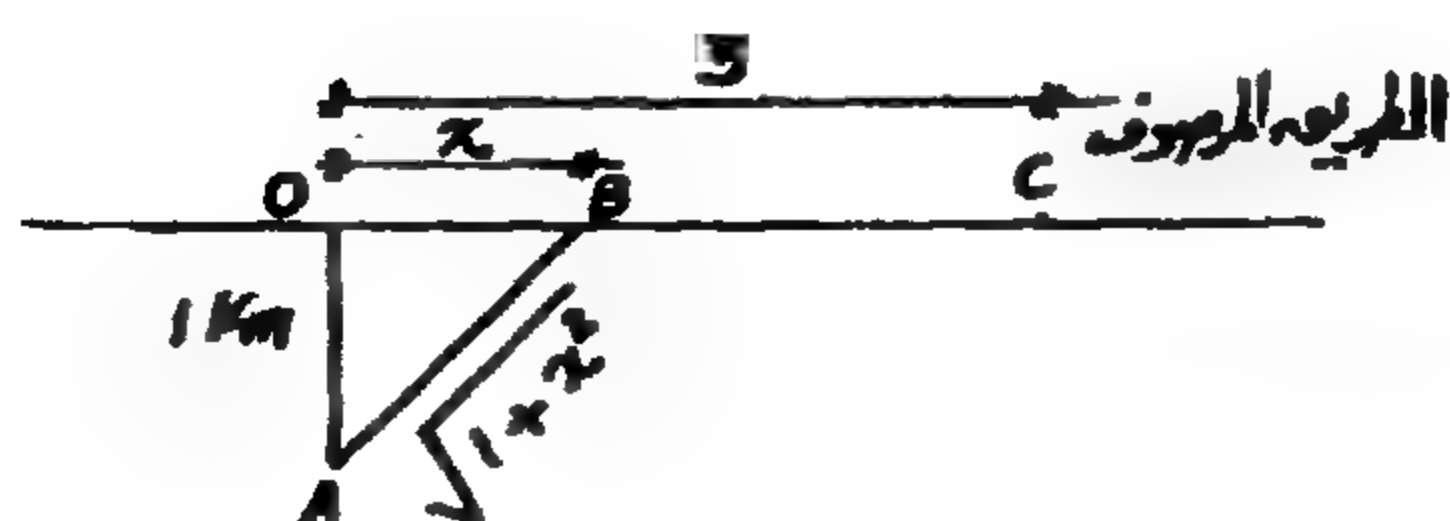
$$\therefore x = r\sqrt{2}$$

وعليه يكون طول المستطيل :-

$$(4r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = [4r^2 - (r\sqrt{2})^2]^{\frac{1}{2}} = [4r^2 - 2r^2]^{\frac{1}{2}} = [2r^2]^{\frac{1}{2}} = r\sqrt{2}$$

أى أن طول المستطيل = عرضه = $r\sqrt{2}$ = نصف قطر الدائرة مضروباً فى $\sqrt{2}$
وواضح أنه لابد أن يكون مربعاً طول ضلعه = $r\sqrt{2}$.

(١٠) دراجة عند "A" وعلى بعد 1 km من أقرب نقطة لها على طريق مرصوف
"O" ، أنظر الرسم شكل (٨-٥)



شكل (٨-٥)

يريد قائدها أن يتجه إلى "C" على الطريق المرصوف على بعد 3 km من نقطة "O" فإذا كانت سرعته على الطريق غير المرصوف "AO" تعادل 10 km/h في حين أنها تبلغ 20 km/h على الطريق "CO" المرصوف .
فعند أى نقطة "B" على الطريق المرصوف يجب أن يتجه قائد الدراجة حتى يصل إلى "C" في أقل زمن ممكن .

الحل :-

من الشكل ،

$$AO = 1 \text{ km}$$

$$, OB = x \text{ km}$$

$$, AB = \sqrt{1+x^2} \text{ km}$$

$$, BC = 3 - x \text{ km}$$

وعلى الراكب أن يتجه بالدراجة من A إلى B " طريق غير مرصوف أيضاً " ثم من B إلى C عبر طريق مرصوف .

والزمن اللازم لذلك = المسافة ÷ السرعة

$$T = \frac{\sqrt{1+x^2}}{10} + \frac{(3-x)}{20}$$

ولإيجاد قيمة x التي تكون عندها T نهاية صغرى ، نفاضل T بالنسبة إلى x ونساويها بالصفر .

$$\begin{aligned} \therefore T' &= \frac{1}{10} \times \frac{1 \times 2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{20} \\ &= \frac{x}{10\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{20} \\ &= \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{20\sqrt{1+x^2}} = 0 \end{aligned}$$

ولما كان المقام موجب دائماً وأكبر من الصفر ، لذلك فالبسط يساوى الصفر

$$\therefore 2x - \sqrt{1+x^2} = 0$$

$$\therefore \sqrt{1+x^2} = 2x$$

$$\therefore 1+x^2 = 4x^2$$

$$\therefore x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

والقيمة السالبة مرفوضة لأنه ليس لها معنى فى هذا النوع من المسائل وعليه فإن قيمة x

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

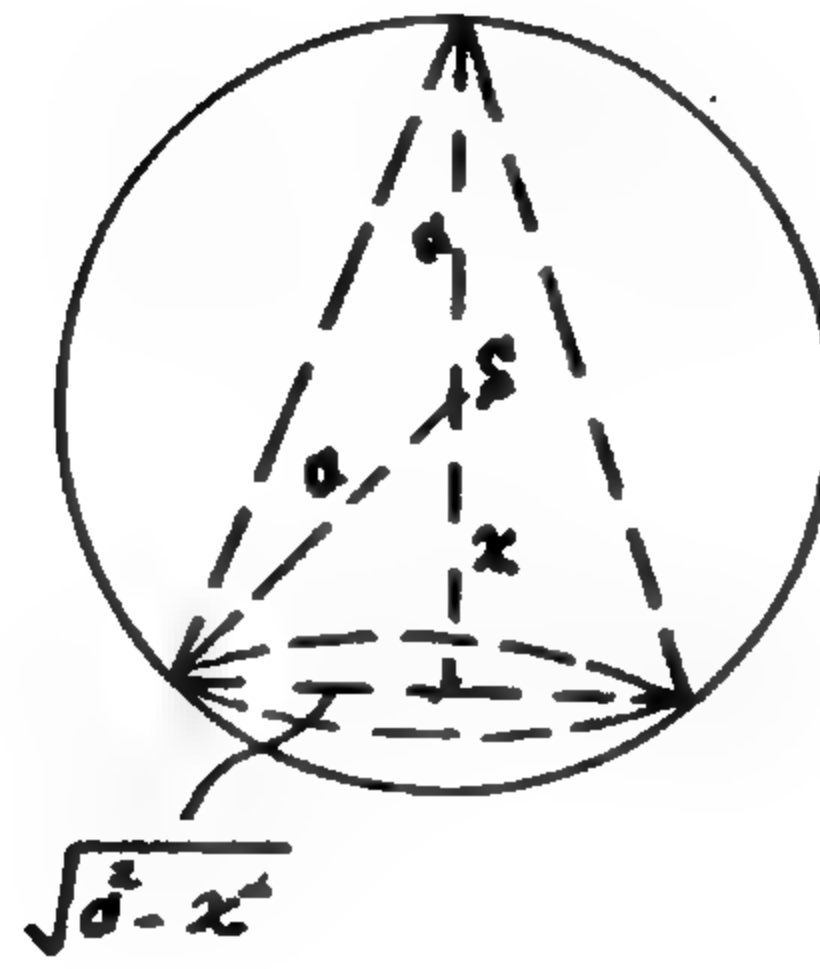
وبذلك فإن على قائد الدراجة أن يسير فى اتجاه AB بحيث يقطع OC عند نقطة B

$$\text{على بعد } 0.58 \text{ km} \cong \frac{1}{\sqrt{3}} = OB = x$$

(١١) أوجد أبعاد أكبر مخروط دائرى قائم يمكن وضعه فى كرة نصف قطرها (a)

الحل :-

كما هو موضح بالشكل (٨-٦) .



شكل (٨-٦)

نفترض أن x هى المسافة من مركز الكرة s إلى مركز قاعدة المخروط o والتي يبلغ

نصف قطر قاعدتها :- $\sqrt{a^2 - x^2}$

وأن ارتفاع المخروط $a + x$

، \therefore حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة \times الارتفاع \therefore -

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

حيث r تمثل نصف قطر قاعدة المخروط $(\sqrt{a^2 - x^2})$

، h = ارتفاع المخروط .

$$\therefore V = \frac{\pi}{3} (\sqrt{a^2 - x^2})^2 \cdot (a + x)$$

$$\begin{aligned} \therefore V &= \frac{\pi}{3} [a^2 - x^2 - 2x(a + x)] \\ &= \frac{\pi}{3} (a + x)(a - 3x) \end{aligned}$$

وبوضع $V' = 0$

$$\therefore \frac{\pi}{3} (a + x)(a - 3x) = 0$$

$$\therefore x_1 = -a, \quad x_2 = \frac{a}{3}$$

والإجابة $x_1 = -a$ غير ذات معنى لأنه لا توجد مسافة سالبة .

ولمعرفة ما إذا كانت $x = \frac{a}{3}$ تحقق أقصى حجم ممكن من عدمه نوجد V'' \therefore

$$\therefore V'' = \frac{-2}{3} (a + 3x) = (-ve) \quad \text{أى سالبة .}$$

وهى سالبة دائماً لجميع قيم x الموجبة ، a الموجبة كذلك وعليه فإنه عندما تكون

$x = \frac{a}{3}$ أى عندما تكون x مساوية لـ $\frac{1}{6}$ قطر الكرة يكون حجم المخروط أكبر

ما يمكن ويساوى :

$$V = \frac{\pi}{3} (a^2 - x^2) \cdot (a + x)$$

$$V = \frac{\pi}{3} \left(a^2 - \frac{a^2}{9} \right) \cdot \left(a + \frac{a}{3} \right) = \frac{32}{81} \pi a^3$$

(١٢) غلاية إسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى وذات حجم ثابت قدره V فإذا كان

سطح قاعدة الغلاية يتكلف ضعف السطح الأسطوانى .

فأوجد نسبة الارتفاع إلى نصف القطر بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن .

الحل :-

نعتبر :-

r = نصف القطر

h = ارتفاع الغلاية

$2k$ = تكلفة وحدة المساحة من سطح القاعدة

k = تكلفة وحدة المساحة للسطح الأسطواني

c = التكلفة الكلية

$$c = 2k \pi r^2 + 2k \pi r h$$

ثم نختزل المتغيرات في الطرف الأيمن لتُصبح واحداً فقط وهو (r)

$$\therefore V = \pi r^2 h \quad , \quad \therefore h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$\therefore c = 2k \pi r^2 + 2k \frac{V}{r}$$

وبتفاضل c بالنسبة إلى r :-

$$\therefore c' = 4k \pi r - \frac{2kV}{r^2} \quad (V = \text{ثابت})$$

وبوضع $V = \pi r^2 h$ مرة ثانية ،

$$\therefore c' = 4k \pi r - 2k \pi h = 2k \pi (2r - h)$$

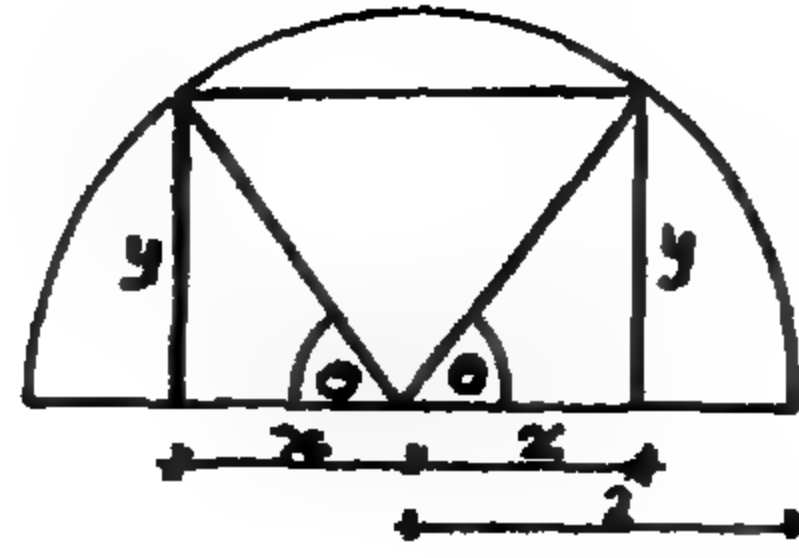
وبوضع $c' = 0$:-

$$\therefore 2r - h = 0 \quad \therefore h = 2r$$

وبذلك فإنه عندما يصبح الارتفاع ضعف نصف القطر (القطر) فإن التكلفة تكون أقل ما يمكن .

(١٣) في الشكل (٧-٨) ، نصف دائرة قطرها = 4 ، مطلوب أن نرسم بها مستطيل بحيث يكون ذو أكبر مساحة ممكنة ، فما هي أبعاده ؟

الحل :-



شكل [٧ - ٨]

المساحة (من الشكل)

$$A = 2x \cdot y$$

$$, x = 2 \cos \theta$$

$$, y = 2 \sin \theta \therefore A = 2 \cdot x \cdot y = 2 \cdot 2 \cos \theta \cdot 2 \sin \theta = 8 \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$\therefore A = 4 \sin 2\theta$$

وسوف نوجد قيمة θ المناظرة لأكبر مساحة للمستطيل وذلك بإيجاد A' بالنسبة لـ θ ومساواتها بالصفر ثم نوجد قيم θ :

$$A' = \frac{dA}{d\theta} = 4 \times \cos 2\theta \times 2 = 8 \cos 2\theta$$

$$, A' = 8 \cos 2\theta = 0$$

$$\therefore \cos 2\theta = 0 \quad \therefore 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

ثم نوجد A'' لمعرفة ما إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{4}$ تحقق أقصى مساحة أم لا :-

$$A'' = 8 \times -\sin 2\theta \times 2 = -16 \sin 2\theta$$

$$(-16) = A'' = -ve \text{ نجد أن } 2\theta = \frac{\pi}{2} \text{ أو } \theta = \frac{\pi}{4}$$

\therefore عند $\theta = \frac{\pi}{4}$ تكون هنالك نهاية عظمى .

والمساحة $A =$

$$A = 4 \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \text{ units}$$

(١٤) أوجد أبعاد المستطيل الذي مساحته A وحدة مربعة وطول قطره أقصى ما يمكن .

الحل :-

أنظر الرسم شكل (٨-٨)

إذا اعتبرنا عرض المستطيل $x =$

وإذا اعتبرنا طول المستطيل $y =$

وإذا اعتبرنا قطر المستطيل $z =$

$$\therefore A = xy \quad \therefore y = \frac{A}{x}$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore z^2 = x^2 + \frac{A^2}{x^2}$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x

$$\therefore 2z \frac{dz}{dx} = 2x - \frac{2A^2}{x^3}$$

وبوضع $\frac{dz}{dx} = 0$ \therefore الطرف الأيسر = صفر

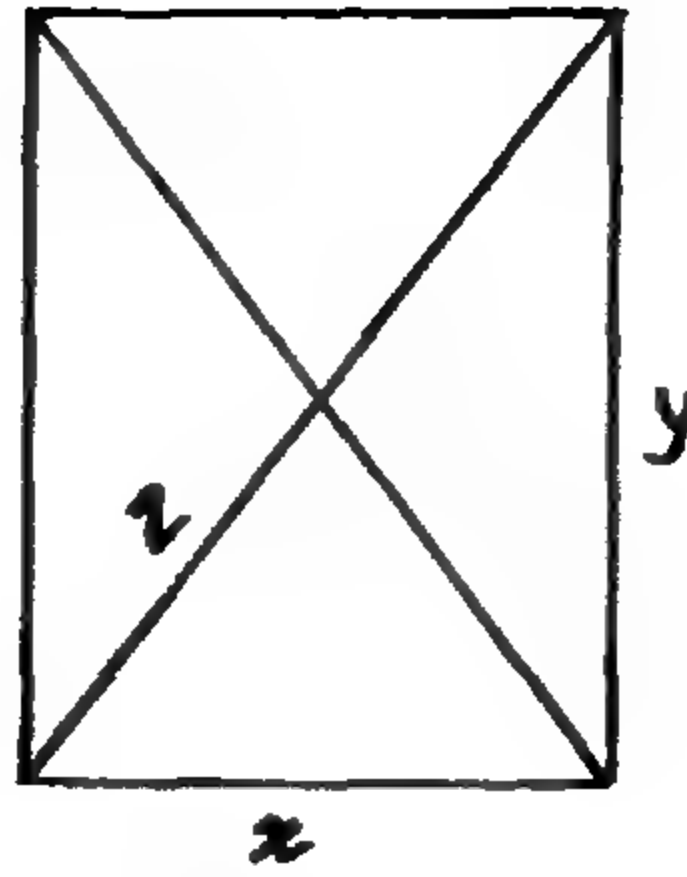
$$\therefore 2x - \frac{2A^2}{x^3} = 0$$

$$\therefore x^4 = A^2$$

$$\therefore x^2 = A = xy$$

$$\therefore x = y$$

وعليه فإن المستطيل يكون مربع .



شكل (٨-٨)

(١٥) أوجد عددين موجبين مجموعهما 24 وبحيث يكون :

أ - حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

ب- مجموع مكعبيهما أصغر ما يمكن

الحل :-

أولاً : نفرض أن العددين هما (x) , $(24 - x)$

نفرض أن حاصل ضربهما $y =$

$$\therefore y = x(24 - x) = 24x - x^2$$

$$, \quad y' = 24 - 2x = 2(12 - x)$$

$$\text{بوضع } y' = 0$$

$$\therefore 12 - x = 0 \quad \therefore x = 12$$

وهذه النقطة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة .

ثم نوجد قيم الدالة y عند النقطة الحرجة وعند طرفي الفترة أي عند : $12, 0, 24$

$$\therefore y_{(12)} = 24 \times 12 - (12)^2 = 288 - 144 = 144$$

$$, \quad y(0) = 0$$

$$, \quad y_{(24)} = 24 \times 24 - (24)^2 = 0 \quad \text{also}$$

$$y = 144$$

وعليه فإن أكبر قيمة لحاصل الضرب هي :

عندما $x=12$

أى عندما يكون العددان 12 , 12

ثانياً :- كما سبق فإن فرضنا أن العددين هما x , $24-x$ ومجموع مكعبيهما $y =$

$$\therefore y = (24-x)^3 + x^3$$

$$، \quad y' = 3x^2 + 3(24-x)^2 \times -1$$

$$= 3x^2 - 3(576 - 48x + x^2)$$

$$= 3x^2 - 1728 + 144x - 3x^2$$

$$= 144x - 1728 = 144(x-12)$$

وبوضع $y' = 0$

$$\therefore 144(x-12) = 0$$

$$\therefore x = 12$$

وهى النقطة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة .

وكما سبق فى أولاً ، نوجد قيم الدالة y عند 12,0,24

$$\therefore y_{(12)} = (24-12)^3 + 12^3 = 1728 + 1728 = 3456$$

$$، y_{(0)} = (24)^3 + 0 = 13824$$

$$، y_{(24)} = 0 + 24^3 = 13824$$

وواضح أن أصغر قيمة لمجموع المكعبين هى 3456 ونحصل عليها عندما $x=12$ أى

عندما يكون العددان هما 12 , 12

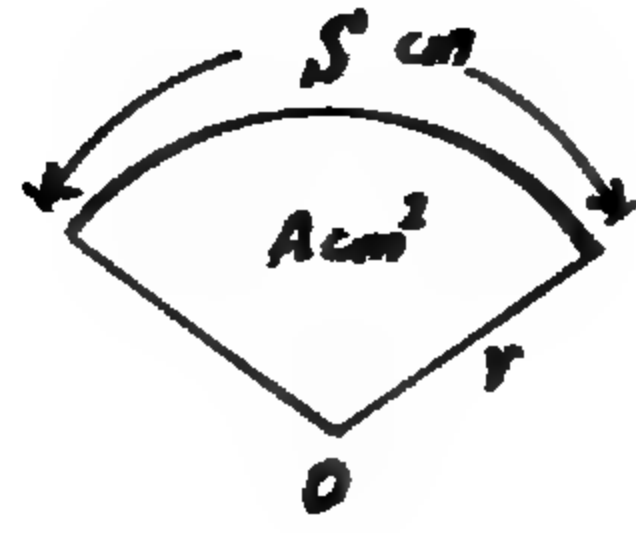
كما أن أكبر قيمة لمجموع المكعبين تكون هى 13824 (أحد العددين صفر) .

(١٦) قطاع دائرى طول محيطه $= 64 \text{ cm}$. أوجد طول نصف قطر دائرته عندما

تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن .

الحل :-

أنظر الرسم شكل (٨ - ٩) .



شكل (٨ - ٩)

نفترض أن نصف قطر دائرة القطاع r ومركزه O

، طول قوسه $S \text{ cm}$ ومساحته $A \text{ cm}^2$

$$A = \frac{1}{2} S \cdot r \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore S + 2r = 64 \quad \because \text{محيط القطاع} = 64 \text{ cm}$$

$$\therefore S = 64 - 2r \quad \dots\dots\dots (2)$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) عن قيمة S من المعادلة (2) :-

$$\therefore A = \frac{1}{2} r(64 - 2r)$$

$$= 32r - r^2$$

$$\therefore \frac{dA}{dr} = A' = 32 - 2r = 2(16 - r)$$

وبوضع $A' = 0$ للحصول على القيم الحرجة

$$\therefore 2(16 - r) = 0 \quad \therefore r = 16$$

$\therefore r = 16$ هى النقطة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة

وبإيجاد A''

$$\therefore A'' = -2 = -ve$$

أى أنه عند $r = 16$ توجد نهاية عظمى لمساحة القطاع وتساوى 256 cm^2

أو بطريقة أخرى نوجد قيم الدالة A عند النقطة الحرجة $r=16$ وعند حدود الفترة r وهي $[0,32]$

$$A_{(16)} = 32 \times 16 - (16)^2$$

$$= 512 - 256 = 256 \text{ cm}^2$$

$$A_{(0)} = 0$$

$$A_{(32)} = 32 \times 32 - (32)^2 = 0$$

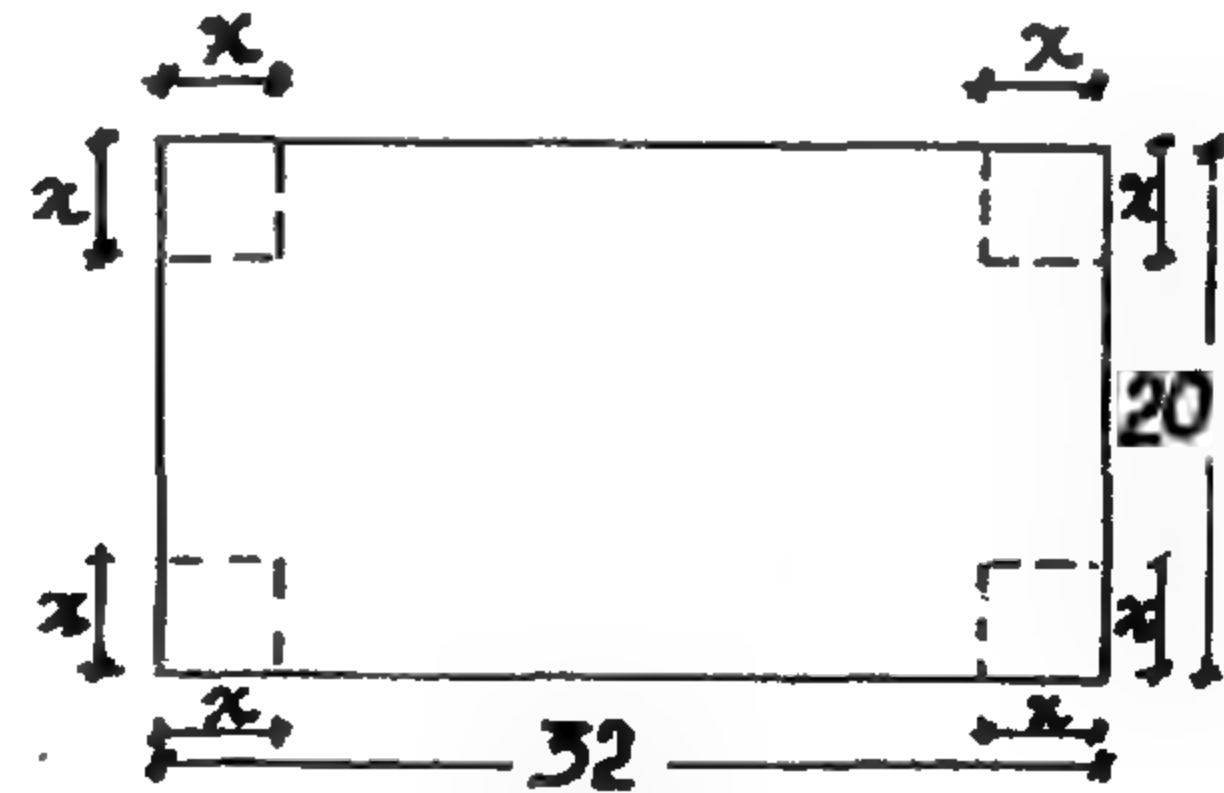
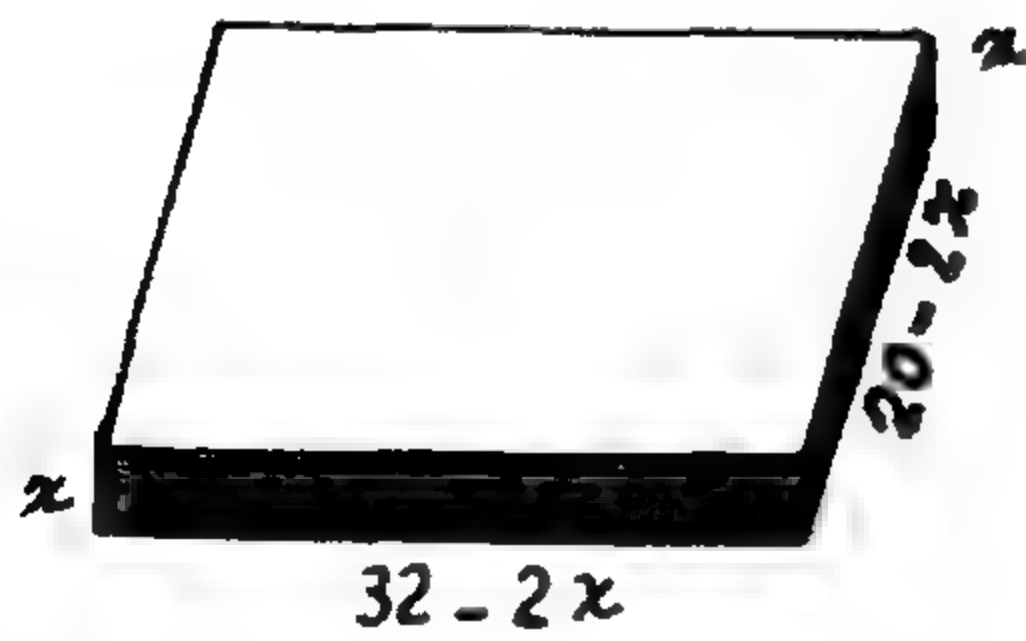
∴ أكبر قيمة لمساحة سطح القطاع : -

$$A = 256 \text{ cm}^2$$

وذلك عندما $S=32 \text{ cm}, r=16 \text{ cm}$

(١٧) قطعة صفيح معدنية على شكل مستطيل أبعاده $20,32 \text{ cm}$ ، قطعت من أركانها الأربعة ، أربعة مربعات متساوية المساحة ثم تم ثني الحواف لتكون صندوق على شكل متوازي مستطيلات مفتوح من الأعلى والمطلوب حساب طول ضلع المربع المقطوع من الأجناب وبحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن .

الحل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١٠) .



شكل (٨ - ١٠)

نفترض أن طول ضلع المربع الصغير المقطوع من الأجناب = $x \text{ cm}$ ،

$$\begin{aligned}
V \text{ cm}^3 &= \text{حجم الصندوق} \\
x \text{ cm} &= \text{وإرتفاع الصندوق} \\
(32-2x), (20-2x) &= \text{أبعاد قاعدتيه} \\
V &= \text{مساحة القاعدة} \times \text{الإرتفاع} \\
\therefore V &= (20-2x)(32-2x) \times x \quad \dots\dots\dots (1)
\end{aligned}$$

وطرفى الفترة المحصورة فيها x هى $[0,10]$

ثم نوجد $V' = \frac{dV}{dx}$ ونساويها بالصفر للحصول على قيم x الحرجة

$$\begin{aligned}
\therefore V &= 4x^3 - 104x^2 + 640x \\
\therefore V' &= 12x^2 - 208x + 640 \\
&= 4(3x^2 - 52x + 160)
\end{aligned}$$

وبوضع $V' = 0$

$$\begin{aligned}
\therefore (3x^2 - 52x + 160) &= 0 \\
\therefore (3x - 40)(x - 4) &= 0 \\
\therefore x &= 4
\end{aligned}$$

والجواب الآخر مرفوض لأن $x = \frac{40}{3}$ لا تقع بداخل الفترة $[0,10]$

\therefore هنالك قيمة حرجة وحيدة عندما $x = 4$ وهى فى الفترة $[0,10]$

وبإيجاد قيم V عند $4,0,10$

$$\begin{aligned}
\therefore V_{(4)} &= 4(4)^3 - 104(4)^2 + 640(4) \\
&= 256 - 1664 + 2560 \\
&= 1152 \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{(0)} &= 0, \quad V_{(10)} = 4(10)^3 - 104(10)^2 + 640(10) \\
&= 4000 - 10400 + 6400 = 0
\end{aligned}$$

\therefore أكبر قيمة للحجم عند $(x=4)$ 1152 cm^3

ويمكننا بإيجاد V'' إثبات أن $x = 4$ تحقق نهاية عظمى ،

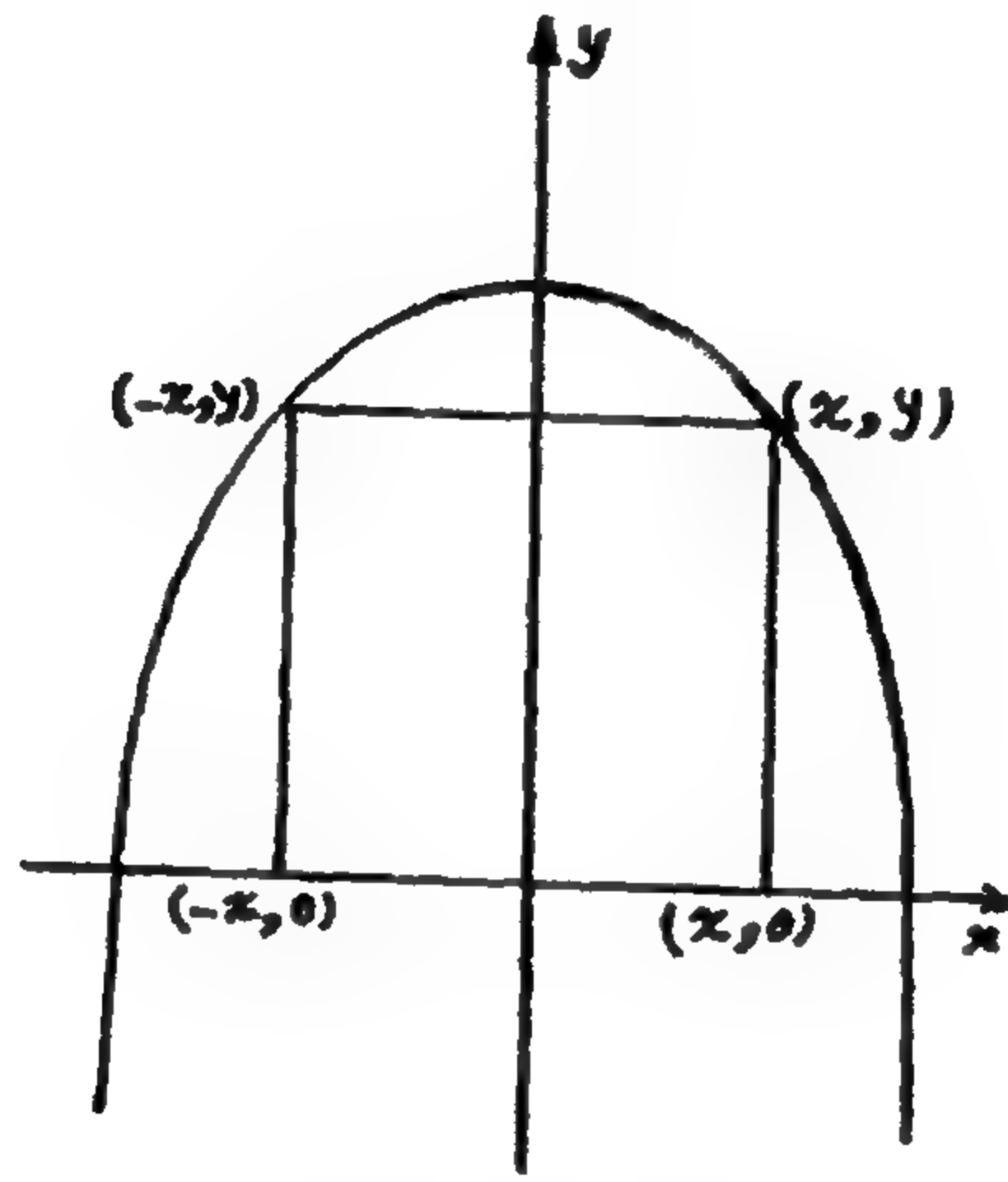
$$V'' = 24x - 208$$

$$= 24 \times 4 - 208 = 96 - 208 = -112 \text{ (-ve)}$$

وهى سالبة مما يؤكد وجود نهاية عظمى للحجم عند $x = 4$

(١٨) مستطيل يقع رأسان من رؤسه على المحور الأفقى xOx وفى جهتيه بينما يقع الرأسان الآخران على محيط قطع مكافئ معادلته $y = 9 - x^2$ ، أوجد أبعاد أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يحقق الشرط المطلوب (أكبر مساحة) .

الحل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١١) .



شكل (٨ - ١١)

واضح أن القطع المكافئ متماثل حول محور الصادات OY كما وأن قيمة y لا تتغير

سواء كانت x موجبة أم سالبة

وعليه فإنه إذا كانت إحداثيات أحد الرؤوس الواقعة على المنحنى هي (x, y) فإن

إحداثيات الرأس الأخرى هي $(-x, y)$

وعليه فإن إحداثيات الرؤوس الأربعة هي :-

$(-x, 0)$, $(x, 0)$, $(-x, y)$, (x, y)

كما هو موضح بالشكل .

ومساحة المستطيل $A =$ فرضاً ، ويجب أن نعبر عنها بدلالة x فقط أو y فقط ثم نحسب قيمة x أو y عندما : -

$$\frac{dA}{dx} = 0 \quad \text{or} \quad \text{when} \quad \frac{dA}{dy} = 0$$

$$\therefore A = 2x \cdot y = 2x(9 - x^2) = 2(9x - x^3) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore \frac{dA}{dx} = 2(9 - 3x^2)$$

وعندما $A' = 0$

$$\therefore 9 - 3x^2 = 0 \quad \therefore x^2 = 3 \quad \therefore x = \pm\sqrt{3}$$

ثم نوجد A'' عند قيمتي x

$$, A'' = -12x$$

وسنجد أن $A'' < 0$ عند $x = +\sqrt{3}$ ، أى نهاية عظمى .

وبالتعويض فى المعادلة (1) عن قيمة x للحصول على أكبر مساحة : -

$$\therefore A = 2(9\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) = 12\sqrt{3} \quad \text{وحدة مربعة}$$

$$\text{وبعداه هما } x = \sqrt{3} , 6$$

$$\text{as: } y = 9 - (\sqrt{3})^2 = 6$$

(١٩) حقل مستطيل الشكل يقع على ضفة نهر يراد إحاطته بسور من جميع الجوانب باستثناء الجانب الواقع على النهر . فإذا كانت تكلفة السور 10 جنيهاً لكل متر طولى لجانبه المتعامدين على النهر ، بينما يتكلف المتر الطولى للسور الواقع على الضلع الموازى للنهر من الجهة الأخرى 15 جنيهاً .
فما هى أبعاد قطعة الأرض التى تحقق أكبر مساحة ممكنة وتكلفة تبلغ 22500 جنيهاً .

الحل :- لتكن $x \text{ mt}$ هي عرض قطعة الأرض
 ، لتكن $y \text{ mt}$ هي طول قطعة الأرض الموازية للنهر
 ، مساحة الحقل بالتر المربع هي A

$$\therefore A = x \cdot y (m^2) \quad \dots\dots\dots (1)$$

وتكلفة السور لعرض المستطيل $= 10x$ جنيهاً

\therefore تكلفة السور لكل من عرضي المستطيل $= 20x$ جنيهاً

وبالمثل تكون تكلفة السور للضلع الثالث للمستطيل (الطول) $= 15y$ جنيهاً .

$$\therefore 20x + 15y = 22500 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ويجب هنا أن نعبر عن A بدلالة متغير واحد سواء x أو y حيث نوجد قيمة y

بدلالة x من (2) ونعوض بها في (1)

ومن المعادلة (2) :-

$$15y = 22500 - 20x \quad \therefore y = 1500 - \frac{4}{3}x$$

وبالتعويض بقيمة y هذه في المعادلة (1)

$$\begin{aligned} \therefore A &= x \left(1500 - \frac{4}{3}x \right) \\ &= 1500x - \frac{4}{3}x^2 \end{aligned}$$

ثم نوجد A' ونساويها بالصفر للحصول على القيم الحرجة .

$$\therefore A' = 1500 - \frac{8}{3}x = 0$$

$$\therefore \frac{8}{3}x = 1500 \quad \therefore x = \frac{4500}{8} = 562.5 \text{ mt}$$

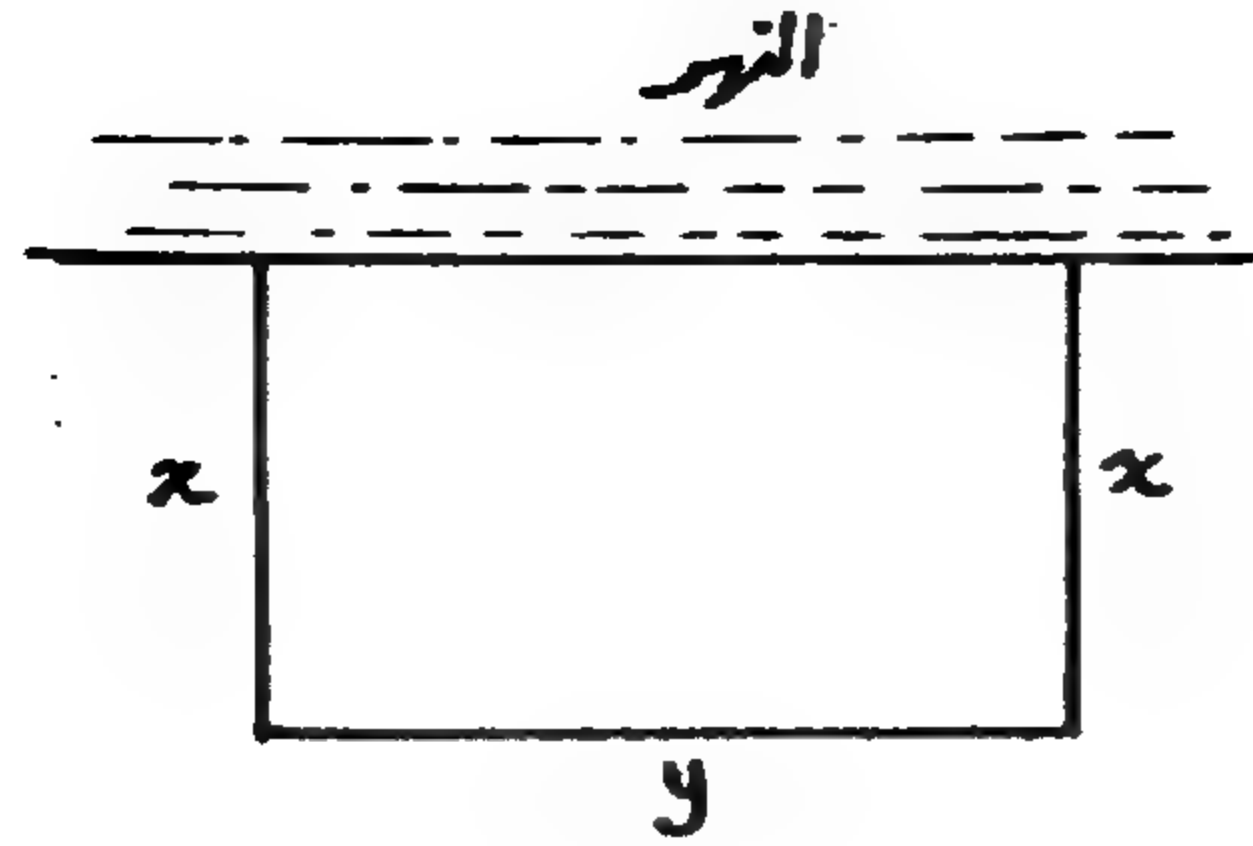
ثم نوجد قيمة y بالتعويض عن قيمة x هذه :

$$y = 1500 - \frac{4}{3} \times 562.5 = 750 \text{ mt.}$$

وعليه فإن المساحة العظمى التي تحقق الشرط المذكور (تكلفة = 22500) :-

$$A = x \cdot y = 562.5 \times 750 = 421875 \text{ m}^2 \cong 4.22 \text{ km}^2$$

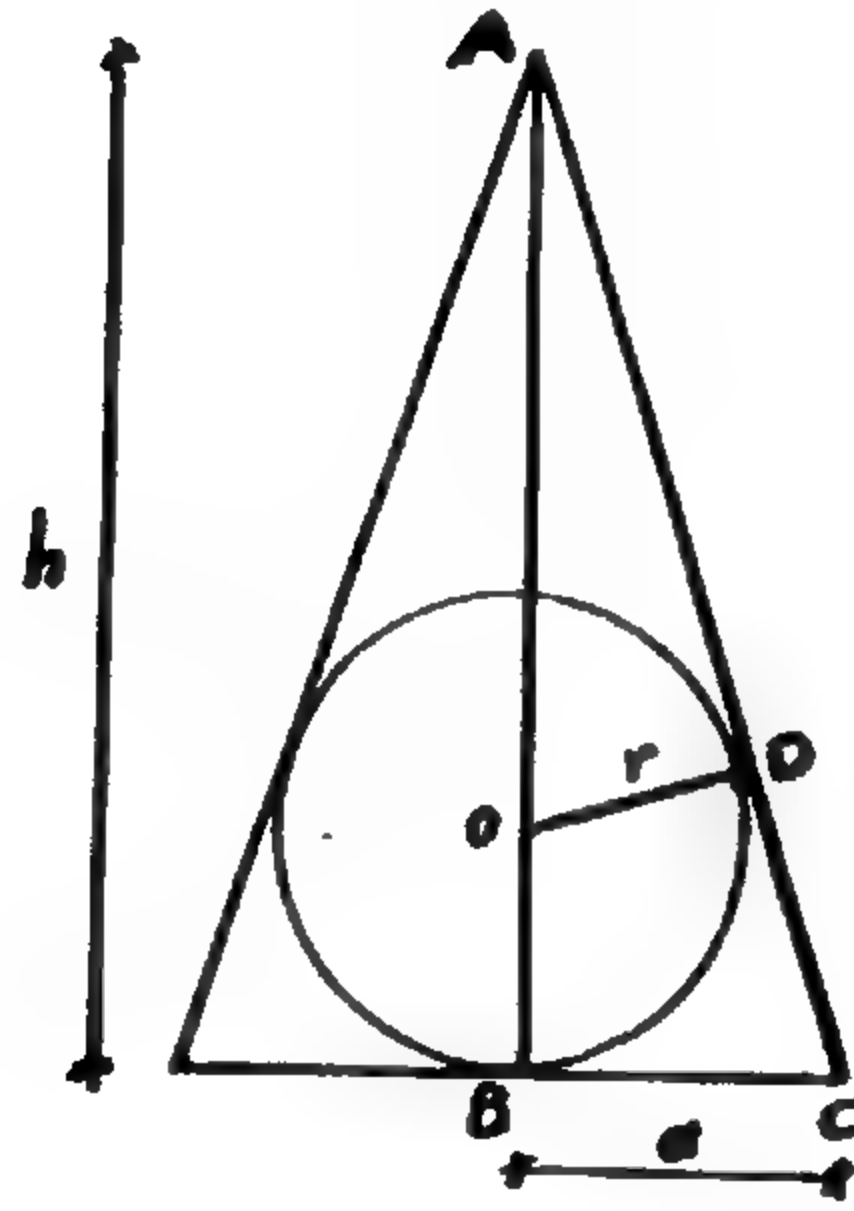
وبطول = 750 mt وعرض = 562.5 mt



شكل (٨ - ١٢)

(٢٠) المطلوب حساب أبعاد مخروط دائري قائم يحتوى بداخله كرة نصف قطرها r بحيث يكون حجمه أقل ما يمكن .

الحل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١٣) .



شكل (٨ - ١٣)

حجم المخروط = V

$$V = \frac{1}{3} \pi a^2 h \quad (1) \dots\dots\dots$$

وللتعبير عن الحجم بدلالة متغير واحد ، فإنه يلزم إيجاد علاقة بين كل من h, a :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DO} \quad \text{ولدينا :}$$

$$i.e. \frac{\sqrt{h^2 + a^2}}{a} = \frac{h-r}{r} \quad \dots\dots\dots (2)$$

وبتربيع كل من الطرفين

$$\therefore \frac{h^2 + a^2}{a^2} = \frac{h^2 - 2hr + r^2}{r^2}$$

$$\therefore r^2(h^2 + a^2) = a^2(h^2 - 2hr + r^2) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\therefore a^2 = \frac{r^2 h}{h-2r} \quad \dots\dots\dots (4)$$

وبالتعويض عن قيمة (a^2) فى المعادلة (1)

$$\therefore V = \frac{1}{3} \frac{\pi h^2 r^2}{(h-2r)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ولإيجاد أبعاد المخروط يلزم إيجاد V' بالنسبة إلى h

$$\therefore V' = \frac{dv}{dh} = \frac{\pi r^2 h}{3} \left[\frac{h-4r}{(h-2r)^2} \right] \quad \dots\dots\dots (6)$$

وبوضع $V' = 0$ ، نحصل على :

$$h=0 \quad , \quad h=4r$$

وكل من الدالة (V) وتفاضلها V' تكون لا نهائية عندما $h=2r$ [انظر المعادلتين 5،6]

ولذلك فإنه لا يمكننا أخذ القيمة $h=2r$ ، كما لا يمكننا اعتبار القيمة $h=0$ لأنها غير ذات معنى . والقيمة الحرجة الوحيدة المقبولة هي $h=4r$

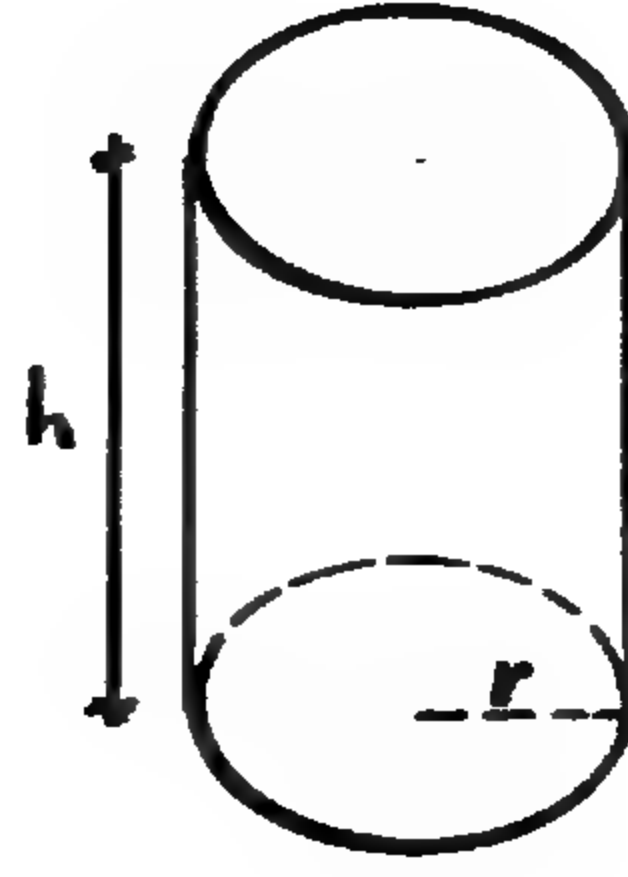
فإذا ما عوضنا بها فى $\frac{dV}{dh}$ سنجد أنها سالبة عندما $h < 4r$ وموجبة عندما $h > 4r$

وعليه فإن $h=4r$ تجعل الحجم أصغر ما يمكن ،

وعليه تكون أبعاد المخروط هي $h=4a$ ، $a=r\sqrt{2}$

(٢١) احسب أبعاد علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى وذات حجم محدد بحيث يتم صنعها بأقل كمية معدن .

الحل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١٤) .



شكل (٨ - ١٤)

يجب أن نلاحظ في هذه المسألة أن الحجم ثابت بينما مساحة السطح أقل ما يمكن .

ولنعتبر الحجم $V =$

، مساحة السطح $A =$

، نصف قطر القاعدة $r =$

، الارتفاع $h =$

$$\therefore A = \pi r^2 + 2\pi rh \quad \dots\dots\dots (1)$$

في حين أن كلاً من h, r تربطهما العلاقة :

$$V = \pi r^2 h = \text{constant} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ومن الأسهل هنا أن نختزل h :

$$\therefore h = \frac{V}{\pi r^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

وبالتعويض في المعادلة (1) عن قيمة h من (3)

$$\therefore A = \pi r^2 + \frac{2V}{r} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ولما كان المطلوب أن تكون A نهاية صغرى ، لذلك نوجد $\frac{dA}{dr}$ ونساويها بالصفر

$$\therefore \frac{dA}{dr} = 2\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

ونحل المعادلة لإيجاد قيم r الحرجة .

$$\therefore \frac{dA}{dr} = 2\pi r - \frac{2}{r^2} \times \pi r^2 h$$

وبالتعويض عن قيمة V من (2) :

$$= 2\pi r - 2\pi h = 2\pi (r - h)$$

$$\frac{dA}{dr} = 0 \quad \text{وبوضع} \quad \therefore (r-h) = 0 \quad \therefore r = h$$

وهي القيمة الحرجة لـ r .

ولمعرفة ما إذا كانت قيمة r هذه تحقق نهاية صغرى للمساحة أم لا ، نستخدم طريقة المشتقة الأولى $\frac{dA}{dr}$ ونوجد قيمتها عندما $r < h$ وعندما $r > h$.

وسوف نجد أنه عندما $r < h$ فإن $\frac{dA}{dr}$ تكون سالبة بينما عندما $r > h$ فإن $\frac{dA}{dr}$ تكون موجبة .

وعليه فإن $\frac{dA}{dr}$ تغير إشارتها من سالب إلى موجب .

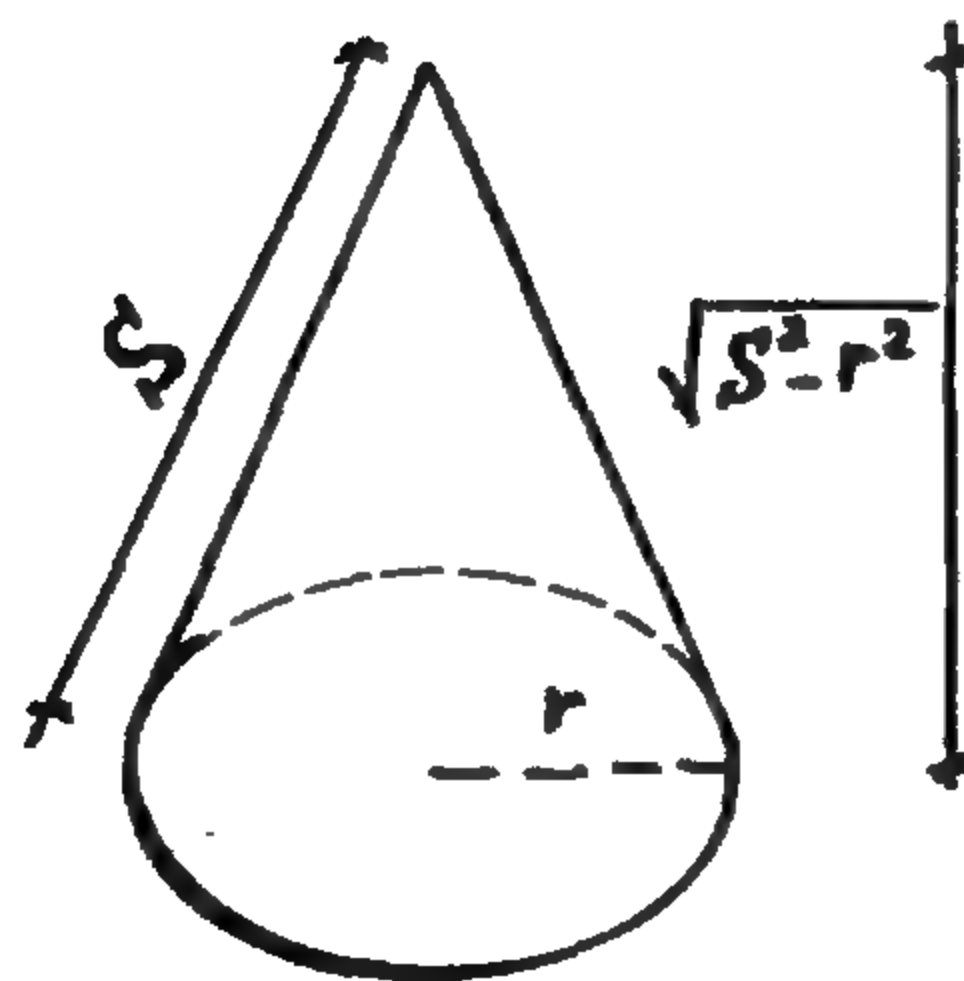
تحقق النهاية الصغرى $\therefore r = h$

\therefore تكون مساحة السطح أصغر ما يمكن عند ثبوت الحجم عندما يكون ارتفاع الاسطوانة مساوياً لنصف قطرها .

(٢٢) احسب نصف قطر فتحة وعاء مخروطي مفتوح من جهة القاعدة معلوم طول راسمه بحيث يكون ذو أكبر حجم ممكن .

الحل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١٥) .

حجم المخروط = $\frac{1}{3} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$.



شكل (٨ - ١٥)

$$\therefore V = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{S^2 - r^2}$$

وفى هذه المسألة مطلوب أن تكون V ذات أكبر حجم ممكن .

ويلزم إيجاد $\frac{dV}{dr}$ ثم نساويها بالصفر ونوجد قيم r الحرجة .

$$\therefore \frac{dV}{dr} = \left[\frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{1}{2} (S^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2r) \right] + \left[(S^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2\pi r}{3} \right]$$

$$\therefore \frac{dV}{dr} = -\frac{\pi r^3}{3(S^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2\pi r}{3} (S^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\therefore \frac{2\pi r (S^2 - r^2) - \pi r^3}{3(S^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\therefore 2\pi r (S^2 - r^2) - \pi r^3 = 0$$

$$\therefore 2\pi r S^2 - 3\pi r^3 = 0$$

$$\therefore 2\pi S^2 = 3\pi r^2$$

$$\therefore r = \pm S \sqrt{\frac{2}{3}}$$

وبالطبع فإن القيمة السالبة مرفوضة .

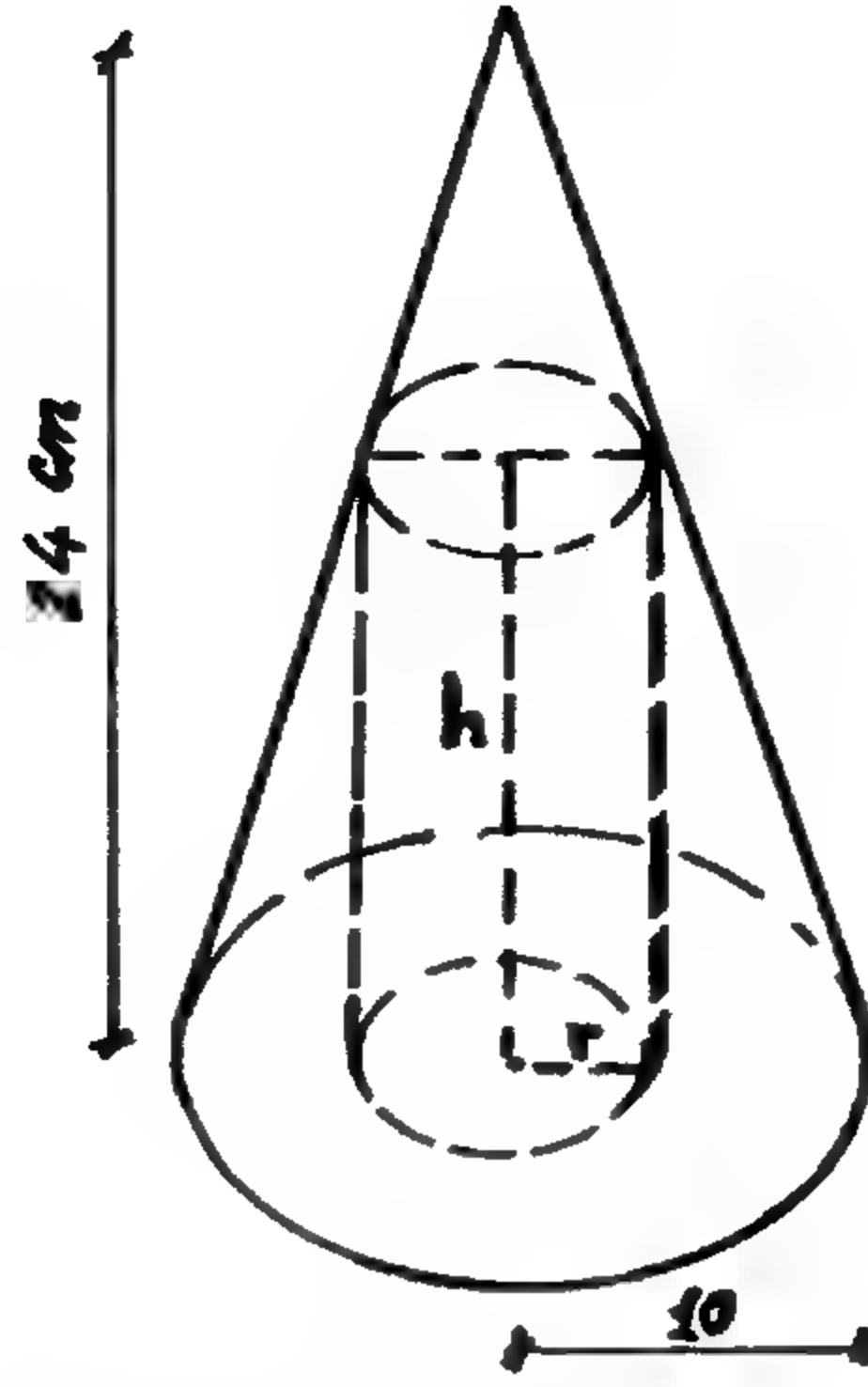
وعليه فإن $r = S \sqrt{\frac{2}{3}}$ تحقق أكبر حجم .

(٢٣) أوجد أبعاد أكبر إسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها بداخل مخروط دائري

قائم نصف قطر قاعدته 10 cm وإرتفاعه 24 cm

الحل :-

انظر الرسم شكل (٨ - ١٦) .



شكل (٨ - ١٦)

لنعتبر : نصف قطر قاعدة الاسطوانة $r \text{ cm}$

، ارتفاع الاسطوانة $h \text{ cm}$

، حجم الاسطوانة $V \text{ cm}^3$

ويوضح الشكل (a) الاسطوانة بداخل المخروط بينما يوضح الشكل (b) مقطع طولي في اتجاه محور المخروط والاسطوانة .

ويمكن تمثيل العلاقة بين كل من الحجم V ، r ، h كالتالى

$$V = \pi r^2 h \quad \dots\dots\dots (1)$$

ويجب البحث عن معادلة أخرى تجمع بين كل من r ، h حتى يُصبح لدينا معادلتين فى كل من r ، h حتى يمكننا أن نستعيز عن أحدهما بدلالة الآخر وبذلك نحصل على معادلة بين V ، r فقط أو V ، h فقط .

ومن الشكل (b) نجد أن : -

$$\frac{24-h}{r} = \frac{24}{10}$$

$$\therefore 240 - 10h = 24r$$

$$\therefore h = \frac{240 - 24r}{10} \quad \dots\dots\dots (2)$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) عن قيمة h من (2)

$$\therefore V = \frac{\pi r^2(240-24r)}{10} = \frac{\pi}{10}(240r^2 - 24r^3) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$, \frac{dV}{dr} = V' = \frac{\pi}{10}(480r - 72r^2) = 0$$

$$\therefore 24r(20-3r) = 0$$

$$\therefore r = 0 \quad , \quad r = \frac{20}{3}$$

ثم نوجد قيم الدالة V عند القيم الحرجة لـ r وعند طرفى الفترة $[0, 10]$

$$, V_{(0)} = 0$$

$$, V_{\left(\frac{20}{3}\right)} \cong 1185 \pi \text{ cm}^3$$

$$, V_{(10)} = 0$$

وعليه فإن أقصى قيمة للحجم تكون عندما $r = \frac{20}{3}$

وتكون h مساوية لـ :

$$h = \frac{240 - 24 \times \frac{20}{3}}{10} = \frac{240 - 160}{10} = 8 \text{ cm}.$$

وعليه فإن حجم أكبر إسطوانة يمكن وضعها داخل المخروط المعطى هو :

$$1185 \text{ cm}^3 .$$

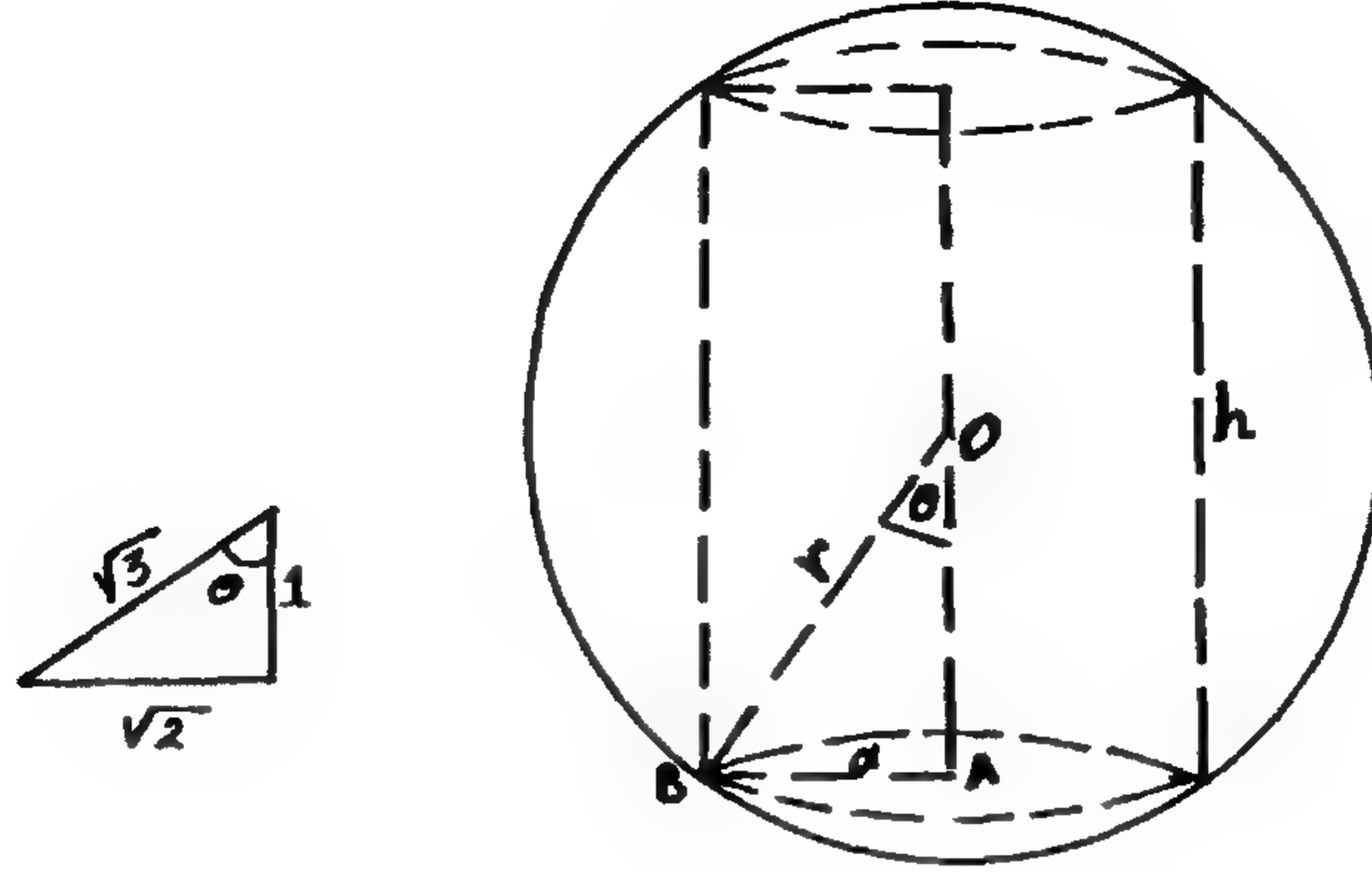
وهي تتحقق بنصف قطر قاعدة $= \frac{20}{3}$ وارتفاع $= 8 \text{ cm}$

(٢٤) ما هو أكبر حجم لاسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة نصف

قطرها $= r$.

الحل :-

انظر الرسم شكل (٨ - ١٧) .



شكل (٨ - ١٧)

لتكن زاوية θ هي الزاوية BOA عند مركز الكرة بين نصف القطر BO ونصف الإرتفاع OA

ومن المثلث القائم الزاوية OAB :

$$a = r \sin \theta, \quad h = 2r \cos \theta$$

$$V = \pi a^2 h = \pi \cdot r^2 \sin^2 \theta \cdot 2r \cos \theta$$

$$= 2\pi r^3 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \quad \text{وحيث أن :}$$

$$\therefore V = 2\pi r^3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= 2\pi r^3 (\cos \theta - \cos^3 \theta)$$

ثم نوجد $\frac{dV}{d\theta}$ ونساويها بالصفر ونحل المعادلة لإيجاد قيم θ الحرجة

$$\therefore \frac{dV}{d\theta} = -2\pi r^3 \sin \theta (1 - 3\cos^2 \theta)$$

فإذا ما وضعنا هذا المقدار = صفر فإنه إما :-

$$\sin \theta = 0 \quad \text{or} \quad (1 - 3\cos^2 \theta) = 0$$

، $\sin \theta = 0$ عندما : $\pi, 0 = \theta$ والحالتين مرفوضتين لأن ذلك غير منطقي

إما إذا كانت :-

$$1 - 3\cos^2 \theta = 0 \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وهى الزاوية التى تعطى أكبر حجم .

ومن الشكل (b) نجد أن :

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

ثم نوجد قيم a, h كما يلى :

$$a = r \sin \theta = \frac{r}{3} \sqrt{6}$$

$$h = 2r \cos \theta = 2r \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{3} \sqrt{3}$$

وبالتعويض مرة ثانية فى معادلة الحجم V

$$V = \pi a^2 h = \frac{\pi r^2}{9} (6) \cdot \frac{2}{3} r \sqrt{3} = \pi r^3 \frac{4}{9} \sqrt{3}$$

(٢٥) إذا كان مجموع حجمى كرة ومكعب ، ثابت ، فبين أن مجموع مساحة

سطحيهما تكون أكبر ما يمكن عندما يكون قطر الكرة مساوياً لطول ضلع المكعب

الحل :-

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \text{حجم الكرة}$$

$$S^3 = \text{حجم المكعب}$$

$$4\pi r^2 = \text{مساحة سطح الكرة}$$

$$6S^2 = \text{مساحة سطح المكعب}$$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 + S^3 = k = \text{ثابت} = \text{والحجم الكلى}$$

والمطلوب هو أن يكون الحجم الكلى ، نهاية عظمى .

إلا أن معادلة الحجم الكلى ، تحتوى على متغيرين وهما r, s .

والمطلوب هو معادلة في متغير واحد .

$$\therefore \frac{4}{3} \pi r^3 + S^3 = k$$

$$\therefore \frac{4}{3} \pi r^3 = k - S^3 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore r^3 = \frac{3(k - S^3)}{4\pi}$$

$$\therefore r = \left[\frac{3(k - S^3)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{3}}$$

، مساحة السطح الكلى :-

$$y = 4\pi r^2 + 6S^2$$

وبالتعويض في هذه المعادلة عن قيمة r :-

$$\therefore y = 4\pi \left[\frac{3(k - S^3)}{4\pi} \right]^{\frac{2}{3}} + 6S^2$$

$$= (4\pi)^{\frac{1}{3}} \cdot (3)^{\frac{2}{3}} \cdot (k - S^3)^{\frac{2}{3}} + 6S^2$$

ولجعل y نهاية عظمى ، نوجد $\frac{dy}{ds}$ ونساويها بالصفر ثم نوجد قيم S الحرجة :-

$$\frac{dy}{ds} = (4\pi)^{\frac{1}{3}} \cdot (3)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3} (k - S^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-3S^2) + 12S$$

$$= \frac{(3)^{\frac{2}{3}} \times (4\pi)^{\frac{1}{3}} \times (-6S^2)}{3 (k - S^3)^{\frac{1}{3}}} + 12S$$

وعمساواة $\frac{dy}{ds}$ بالصفر :-

$$\therefore \frac{(3)^{\frac{2}{3}} \times (4\pi)^{\frac{1}{3}} (-6S^2) + 12S \left[3(k - S^3)^{\frac{1}{3}} \right]}{3(k - S^3)^{\frac{1}{3}}} = 0$$

$$\therefore (3)^{\frac{2}{3}} \times (4\pi)^{\frac{1}{3}} \times (-6S^2) = 36 S (k - S^3)^{\frac{1}{3}}$$

وبتكعيب كل من الطرفين :-

$$\therefore 3^2 \times (4\pi) \times (-6)^3 S^6 = (-36)^3 (S)^3 (k - S^3)$$

$$\therefore 36\pi (-216) S^6 = -46656 S^3 (k - S^3)$$

$$\therefore -7776\pi S^6 = -46656 S^3 (k - S^3)$$

$$\therefore k - S^3 = \frac{\pi S^6}{6S^3} = \frac{\pi}{6} S^3 \quad \dots\dots\dots (2)$$

وهنا لن نقوم بحل المعادلة في S ولكن نعوّض من (1) في المعادلة (2)

$$\therefore \frac{\pi}{6} S^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\therefore S^3 = 8r^3$$

$$\therefore S = 2r$$

وعليه فإن مساحة السطح الكلية تكون أكبر ما يمكن عندما يكون القطر $(2r)$ للكرة مساوياً لطول ضلع المكعب S .

(٢٦) يراد عمل خزان سعة 4 م^3 ، بقاعدة مربعة وبأجناب رأسية متعامدة على القاعدة، فما هو أنسب شكل اقتصادي (أقل مساحة)، لتحقيق ذلك.

الحل :- لتكن :-

x = طول أحد ضلعي القاعدة

h = ارتفاع الصندوق

V = حجم الصندوق (الخزان)

A = المساحة الكلية للخزان

$$, V = hx^2 = 4 \text{ م}^3$$

$$\therefore h = \frac{4}{x^2} \text{ م}$$

$, x^2$ = مساحة القاعدة

hx = مساحة كل وجه من أوجه الخزان

$$A = x^2 + 4hx = x^2 + \frac{16}{x}$$

والمطلوب هو أن تكون A' نهاية صغرى "لأقل تكلفة"، نوجد A' ونساويها بالصفر لإيجاد قيم x الحرجة :-

$$A' = 2x - \frac{16}{x^2} = 0$$

$$\therefore 2x = \frac{16}{x^2} \quad \therefore x^3 = 8 \quad \therefore x = 2$$

وعندما $x < 2$ نجد أن $A' < 0$ وعندما $x > 2$ نجد أن $A' > 0$ وعليه فإن $x = 2$ تحقق الشرط المطلوب والمساحة =

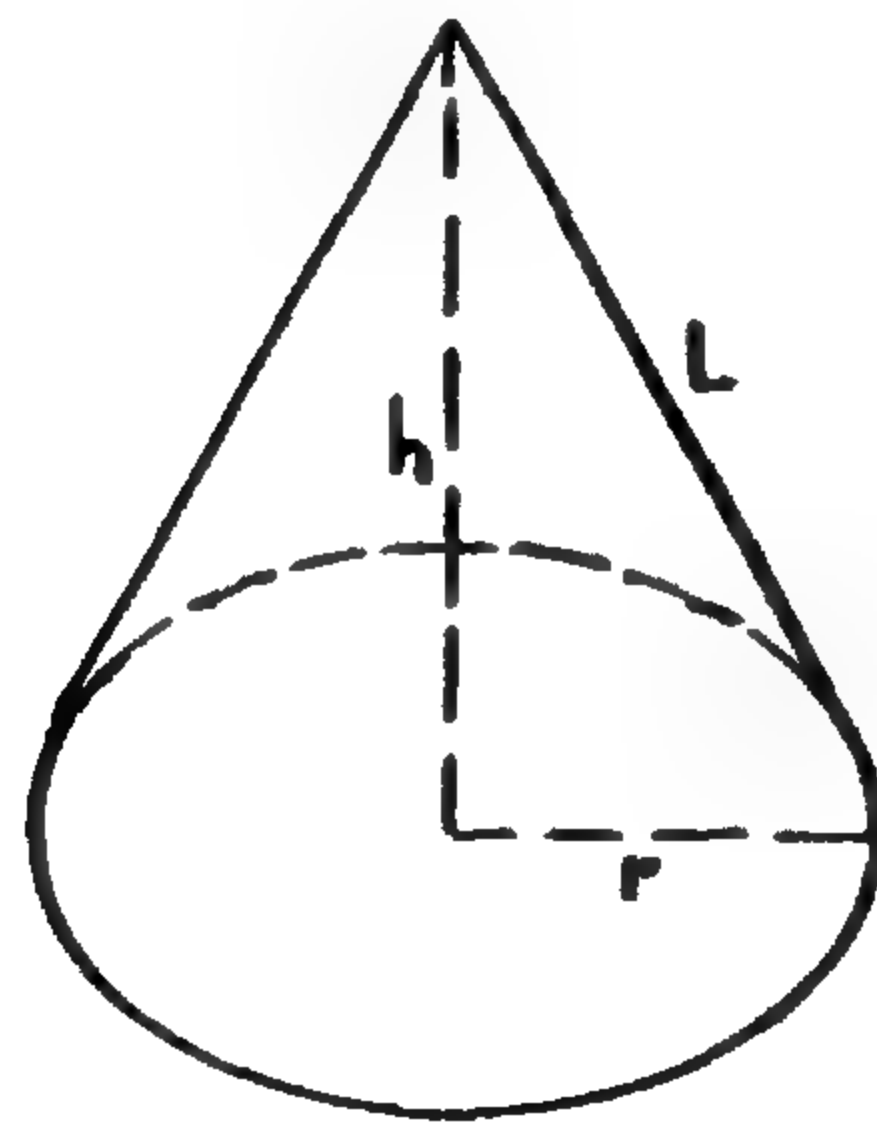
$$A = x^2 + 4hx = x^2 + \frac{16}{x} = 4 + \frac{16}{2} = 12 \text{ m}^2$$

وعليه فإن الأبعاد المناسبة هي :

$$x = 2 \text{ m} , h = 1 \text{ m}$$

(٢٧) يراد تصنيع وعاء مخروط الشكل بأقل تكلفة خامات ممكنة ، بحيث يسع حجماً يعادل 150 لتراً ، فما هي أبعاد هذا المخروط الدائري القائم التي تحقق هذا الشرط .

الحل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١٨) .



شكل (٨ - ١٨)

نفترض أن نصف قطر قاعدة المخروط الدائرية $r =$ ، إرتفاعه $h =$

$L =$ ، طول الحرف الجانبي (الراسم)

$V =$ ، حجم المخروط

$A =$ ، المساحة الجانبية للمخروط

$$\therefore A = \pi rL$$

$$, V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 150$$

$$\therefore h^2 + r^2 = L^2$$

ومن هندسة الشكل :

وباعتبار r هو المتغير المستقل في العلاقات السابقة : -

$$\therefore \dot{A} = \pi r\dot{L} + \pi L \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$, \dot{V} = \frac{1}{3}\pi r^2\dot{h} + \frac{2}{3}\pi rh = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$, 2h\dot{h} + 2r = 2L\dot{L} \quad \dots\dots\dots (3)$$

والمطلوب في المعادلة (1) أن نجعل A أقل ما يمكن ومن المعادلة (3) : -

$$\therefore \dot{L} = \frac{r+h\dot{h}}{L} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ومن المعادلة الثانية (2)

$$\therefore \dot{h} = \frac{-2h}{r} \quad \dots\dots\dots (5)$$

وبالتعويض من (5) في (4)

$$\therefore \dot{L} = \frac{r+h\left(\frac{-2h}{r}\right)}{r}$$

$$\therefore \dot{L} = \frac{r^2 - 2h^2}{rL}$$

$$\therefore \dot{A} = \pi r\left(\frac{r^2 - 2h^2}{rL}\right) + \pi L = 0$$

$$\therefore \frac{r^2 - 2h^2}{L} + L = 0$$

$$\therefore r^2 - 2h^2 + L^2 = 0$$

$$\therefore L^2 = r^2 + h^2 \quad \therefore h = \pm r\sqrt{2}$$

وسوف نعتبر قيمة h الموجبة فقط ،

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \times r\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\pi r^3}{3} = 150$$

$$\therefore r^3 = \left(\frac{450}{\sqrt{2}\pi} \right) \quad \therefore r = \left(\frac{450}{\frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$h = \sqrt{2}r = \sqrt{2} \left(\frac{450}{\frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}} \right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{450}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{900}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$L = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{450}{\sqrt{2}\pi} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{900}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}}}$$

(٢٨) قطعة أرض على شكل مثلث قائم الزاوية أبعاده 36,64,100 mt كما بشكل

(٨-١٩) ويراد حساب أكبر مستطيل يمكن صنعه بداخل هذه الأرض ، بحيث

يكون أحد رؤوس المستطيل على الوتر .

الحل :-



شكل (٨ - ١٩)

لتكن أبعاد المستطيل هي x, y كما بالشكل ومساحته $A, A = xy$ ، وللتعبير عن A بدلالة متغير واحد فقط (أياً من x أو y) ، يجب أن نبحث عن علاقة أخرى تجمع بين كل من y و x ومنها يمكننا إيجاد قيمة متغير بدلالة الآخر ومن هندسة الشكل (التشابه) ، نجد أن :-

$$\frac{x}{36} = \frac{64-y}{64}$$

$$\therefore 16(x) = 9(64-y) = 576-9y$$

$$\therefore 9y = 576-16x$$

$$\therefore y = \frac{576-16x}{9}$$

$$\therefore A = xy = \frac{1}{9}(576x-16x^2) = \frac{16}{9}(36x-x^2)$$

$$, 0 \leq x \leq 36$$

$$\therefore \frac{dA}{dx} = A' = 64 - \frac{32}{9}x = 0$$

$$\therefore \frac{32}{9}x = 64$$

$$\therefore x = \frac{9 \times 64}{32} = 18$$

وهي تحقق أكبر مساحة وذلك لأنه باستخدام طريقة المشتقة الثانية : -

$$A'' = \frac{-32}{9} < 0 \text{ -ve أى سالبة}$$

$$\therefore x = 18$$

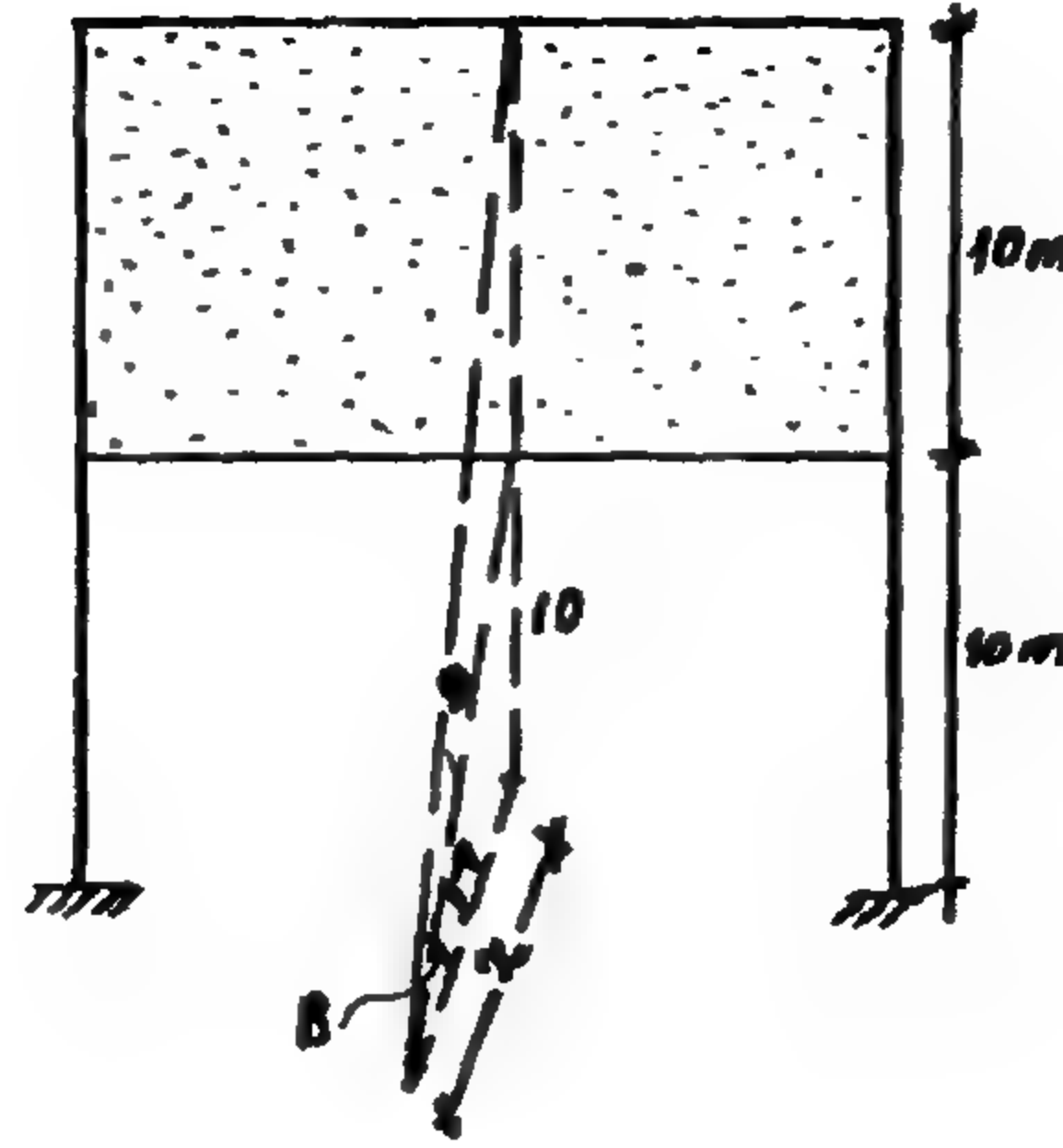
$$\therefore y = \frac{576-16(18)}{9} = \frac{576-288}{9} = \frac{288}{9} = 32 \text{ m.}$$

والمساحة $A =$

$$A = x.y = 18 \times 32 = 576 \text{ m}^2$$

(٢٩) لوحة إعلانات ودعاية ارتفاعها 10 m وترتفع قاعدتها السفلية عن الأرض بمقدار 10 m كذلك ، والمطلوب تحديد نقطة على الخط الأفقى في مقابلة اللوحة (على الأرض) بحيث تكون عندها زاوية الرؤية أكبر ما يمكن

الحل :- انظر الرسم شكل (٨ - ٢٠) .



شكل (٨ - ٢٠)

لتكن θ هي الزاوية المطلوبة (زاوية الرؤية) .

$$\therefore \tan B = \frac{10+10}{x} = \frac{20}{x}$$

$$, \tan A = \frac{10}{x}, \tan \theta = \tan(B-A)$$

$$\because \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(B-A) = \frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B \tan A}$$

$$= \frac{\frac{20}{x} - \frac{10}{x}}{1 + \frac{20}{x} \times \frac{10}{x}} = \frac{\frac{10}{x}}{1 + \frac{200}{x^2}} = \frac{\frac{10}{x}}{\left(\frac{x^2 + 200}{x^2} \right)}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{10x}{(x^2 + 200)}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \tan \theta = \frac{d}{dx} \frac{10x}{(x^2 + 200)}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{V} \right) = \frac{V \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \frac{10x}{(x^2 + 200)} = \frac{(x^2 + 200) \times 10 - 10x \times 2x}{(x^2 + 200)^2}$$

$$= \frac{2000 - 10x^2}{(x^2 + 200)^2}$$

وبوضع $\frac{d}{dx} \tan \theta$ تساوى الصفر

$$\therefore \frac{2000 - 10x^2}{(x^2 + 200)^2} = 0$$

$$\therefore 2000 - 10x^2 = 0 \quad \therefore x^2 = 200$$

$$\therefore x = \pm 10\sqrt{2}$$

والإجابة السالبة مرفوضة

$$\therefore x = 10\sqrt{2} = 14.14 \text{ mt.}$$

وهى المسافة الواجب أن يقف المشاهد عندها بحيث تكون زاوية الرؤية أكبر ما يمكن .

(٣٠) يُعلق مصباح كهربائي فوق مركز منضدة دائرية ، فعلى أى ارتفاع يجب

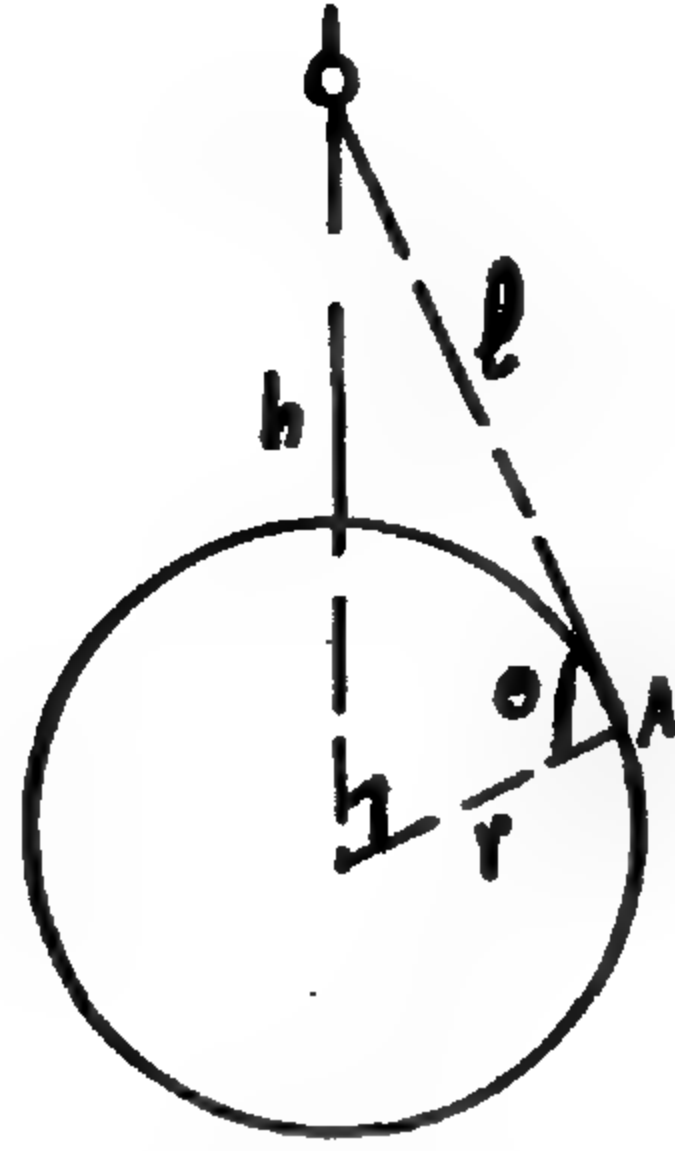
تثبيت هذا المصباح بحيث نحصل على أسطح إضاءة عند حواف المنضدة .

علماً بأن قوة الإضاءة (I) عند المصباح تتناسب مع جيب الزاوية التى يصنعها

الشعاع الضوئى مع حافة المنضدة مقسوماً على مربع المسافة من مركز الضوء للحا

(اعتبر مصدر الضوء ، نقطة وليس جسماً) .

الحل :- انظر الرسم شكل (٨ - ٢١) .



شكل (٨ - ٢١)

من المعطيات في المسألة :-

$$I \propto \frac{\sin \theta}{L^2} = k \frac{\sin \theta}{L^2} = A \text{ قوة الإضاءة عند}$$

$$, L = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$, \sin \theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

$$\therefore I = k \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{(h^2 + r^2)} = k \frac{h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

وللحصول على أقصى إضاءة I نوجد $\frac{dI}{dh}$ ونساويها بالصفر للحصول على قيم h

المرجوة .

$$\therefore \frac{dI}{dh} = k \left[\frac{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \times 1 - h \times \frac{3}{2} \times (h^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \times 2h}{(h^2 + r^2)^3} \right]$$

$$= k \left[\frac{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} - 3h^2 (h^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}{(h^2 + r^2)^3} \right]$$

$$= \frac{k(h^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} [(h^2 + r^2) - 3h^2]}{(h^2 + r^2)^3} = k \frac{(r^2 - 2h^2)}{(h^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}$$

وبوضع $\frac{dI}{dh} = 0$ ، فإن المقام لا يساوى أبداً الصفر

وبوضع البسط = الصفر

$$\therefore r^2 - 2h^2 = 0$$

$$\therefore h^2 = \frac{r^2}{2} \quad \therefore h = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

وللتأكد من أن قيمة h هذه تعطي أقصى إضاءة ، نستخدم طريقة المشتقة الثانية : -

$$\therefore \frac{d^2 I}{dh^2} = k \left[\frac{(h^2 + r^2)^{\frac{5}{2}} \times (-4h) - (r^2 - 2h^2)^{\frac{5}{2}} (h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} (2h)}{\left[(h^2 + r^2)^{\frac{5}{2}} \right]^2} \right]$$

وبأخذ $k(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}$ والاختصار :

$$\therefore \frac{d^2 I}{dh^2} = \frac{k(6h^3 - 9hr^2)}{(h^2 + r^2)^{\frac{7}{2}}}$$

وبالتعويض عن $h = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ في $\frac{d^2 I}{dh^2}$ نحصل على قيمة سالبة .

وعليه فإن الارتفاع المناسب للحصول على أقوى إضاءة عند حافة المنضدة عندما تكون

$$h = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

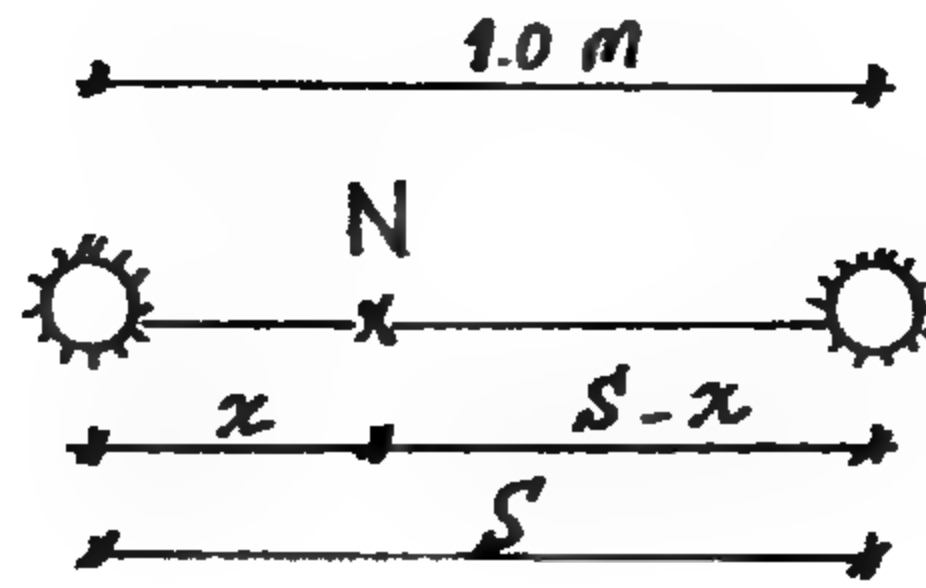
(٣١) مصباحان صغيران شدتهما a, b يبعدان عن بعضهما بمقدار 1 متر فإذا

كانت شدة الإضاءة عند أى نقطة والناجمة من مصدر ضوئى تتناسب مباشرة مع

شدة المصدر وعكسياً مع مربع المسافة من المصدر .

فاوجد مكان النقطة ذات الأقل إضاءة على الخط الواصل بين مصدرى الضوء .

الحل :- انظر الرسم شكل (٨ - ٢٢) .



شكل (٨ - ٢٢)

للتبسيط سنعتبر المصباحان في صورة نقطة ضوئية ولتكن A هي مصدر الضوء ذو الشدة a ، B هي المصدر ذو الشدة b ، N نقطة على AB ، x بعد النقطة N عن A ، (S-x) بعد النقطة N عن B حيث S بُعد النقطتان A, B

ومن تعريف شدة الإضاءة عند نقطة ، فإن شدة الإضاءة عند نقطة A تساوى $\frac{ka}{x^2}$

وعند B تساوى $\frac{kb}{(S-x)^2}$ حيث k ثابت التناسب

فإذا اعتبرنا أن I هي شدة الإضاءة عند N

$$\therefore I = \frac{ka}{x^2} + \frac{kb}{(S-x)^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ومن الواضح أن قيمة I عند أى نقطة تزيد كلما اقتربنا من المصدر الضوئى وتقل كلما بعدنا عنه .

وعليه فإنه عندما تكون N قريبة من أى من المصدرين ، فإنها فى ذات الوقت ستكون بعيدة عن المصدر الآخر وعندما تكون (N) قريبة من A فإن أحد الكسرين سيكون صغيراً (لكبر المقام) فى المعادلة (1) بينما الكسر الآخر يكون كبيراً وحيث أن I تتناقص بالبعد عن أى من المصدرين ، لذلك فإننا نتوقع أن يكون هنالك نقطة ذات أقل إضاءة على الخط AB ولإيجاد النهاية الصغرى للإضاءة (مكانها) فإنه يلزم إيجاد $\frac{dI}{dx}$ ثم نساويها بالصفر ونحل للحصول على قيم x الحرجة .

$$\therefore \frac{dI}{dx} = k \left(\frac{-2a}{x^3} + \frac{2b}{(S-x)^3} \right) = 0$$

$$\therefore \frac{b}{(S-x)^3} = \frac{a}{x^3}$$

$$\therefore bx^3 = a(S-x)^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{b}(x) = \sqrt[3]{a}(S-x)$$

$$\therefore \sqrt[3]{b}(x) + \sqrt[3]{a}(x) = \sqrt[3]{a}(S)$$

$$\therefore x(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a}(S)$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt[3]{a} S}{\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}}$$

$$S-x = S - \frac{\sqrt[3]{a} S}{\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}} = \frac{S \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$$

والآن يمكننا إيجاد النسبة بين $(S-x)$, (x)

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} & : \frac{S \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} \\ & = S \sqrt[3]{a} : S \sqrt[3]{b} \end{aligned}$$

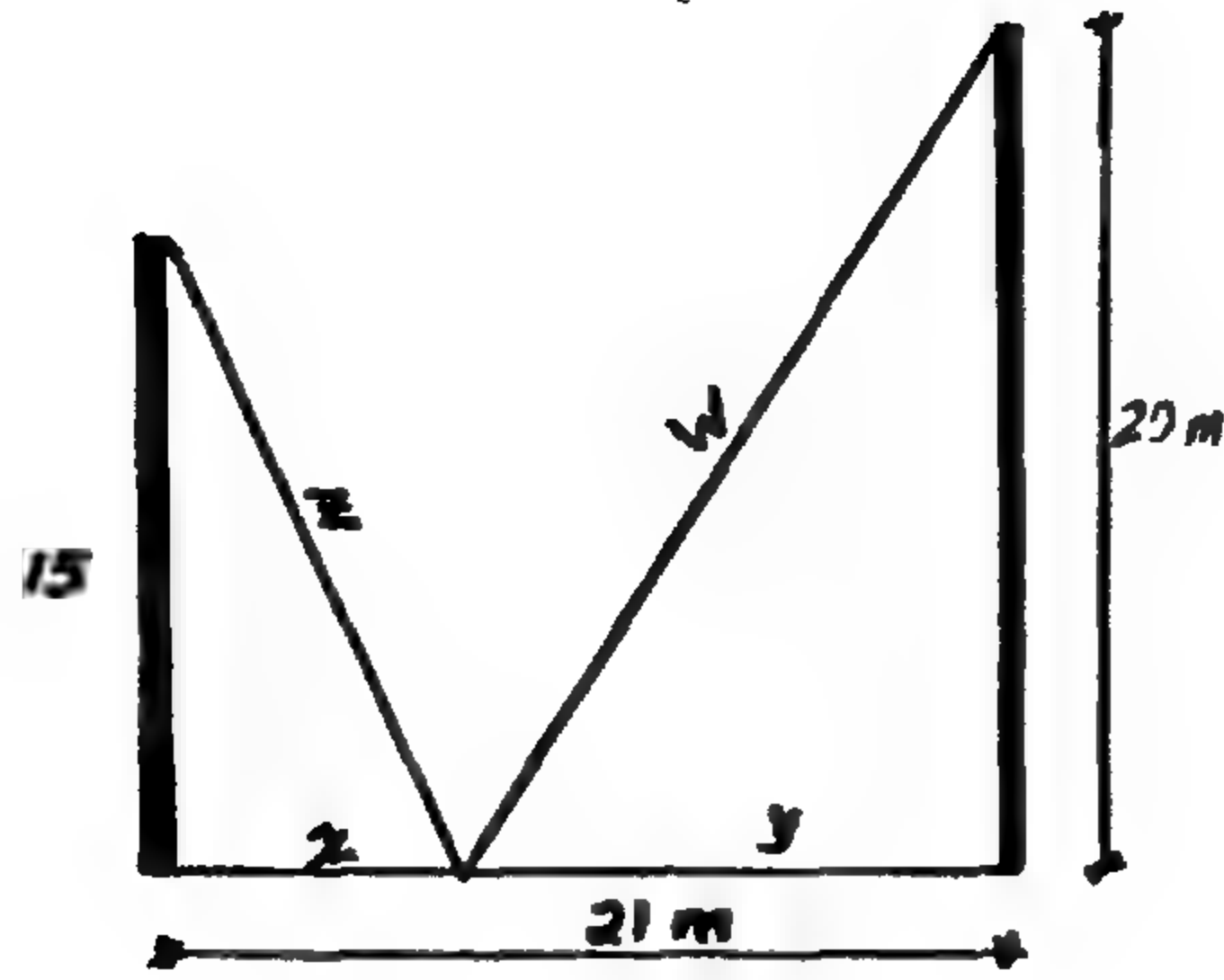
∴ النسبة التي تحقق أقل إضاءة عند N هي :-

$$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} .$$

(٣٢) قضيبان موضوعان رأسياً فوق الأرض وارتفاعهما 15 , 20 m يراد تثبيتهما جيداً بسلك يتصل بقمة كل منهما وبوتد من الأسفل يقع بين القضيبين ، وعلى الأرض حدد المكان المناسب الذي يجب تثبيت التود به بالنسبة لأحد القضيبين ، علماً بأن القضيبين يبعدان 21 m عن بعضهما وبحيث تكون كمية السلك اللازمة أقل ما يمكن .

الحل :-

أنظر الرسم شكل (٨-٢٣) .



شكل [٢٣ - ٨]

نفترض أن الطول الكلى للسلك $L =$

والمطلوب أن تكون L أقل ما يمكن

$$\therefore L = Z + W, \quad x + y = 21 \text{ m}$$

$$, \quad x^2 + (15)^2 = Z^2, \quad y^2 + (20)^2 = W^2$$

والمطلوب الآن أن تكون L دالة في أحد المتغيرات ولا يهم هنا اختيار المتغير سواء كان

Z أو W أو Y أو x .

وليكن المتغير المستقل هو x

$$\therefore L = L(x), \quad Z = Z(x), \quad W = W(x), \quad Y = Y(x)$$

$$, \therefore L = Z + W$$

$$\therefore \dot{L} = \dot{Z} + \dot{W}$$

وبتفاضل كل من الدوال السابقة بالنسبة إلى x -:

$$\therefore 1 + \dot{y} = 0, \quad 2x = 2z\dot{z}$$

$$, \quad 2y\dot{y} = 2w\dot{w}$$

ومن هنا

$$\therefore \dot{Z} = \frac{2x}{2z} = \frac{x}{z}$$

$$, \quad \dot{W} = \frac{2y\dot{y}}{2w} = \frac{y\dot{y}}{w}$$

، حيث أن $1 + y' = 0$

$$\therefore y' = -1 \quad \therefore W' = \frac{-y}{w}$$

وبالتعويض فى المعادلة :-

$$\dot{L} = \dot{z} + \dot{w}$$

$$\therefore \dot{L} = \frac{x}{z} - \frac{y}{w}$$

وبوضع $\dot{L} = 0$:-

$$\therefore \frac{x}{z} = \frac{y}{w} \quad \text{or} \quad \frac{x}{y} = \frac{z}{w}$$

$$\because y = 21 - x$$

$$, \quad z = \sqrt{x^2 + 225}$$

$$, \quad w = \sqrt{y^2 + 400}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{z}{w} \quad i.e. \quad \frac{x}{21-x} = \frac{\sqrt{x^2 + 225}}{\sqrt{y^2 + 400}}$$

$$\therefore \frac{x^2}{(21-x)^2} = \frac{x^2 + 225}{y^2 + 400} = \frac{x^2 + 225}{(21-x)^2 + 400}$$

وبالاختصار :-

$$\therefore x^2 + 54x - 567 = 0$$

$$\therefore (x-9)(x+63) = 0$$

$$\therefore x = 9, -63$$

والإجابة السالبة مرفوضة حيث أنها عديمة المعنى .

وعليه فإن $x = 9$ هي القيمة الحرجة الوحيدة .

وللتأكد من أنها تحقق الشرط المطلوب (أقل طول سلك لازم)

، نوجد قيم \dot{L} حول $x = 9$ ونثبت أنها تتغير من سالبة إلى موجبة وحيث أن x تتغير

فى الفترة المحدودة $(0, 21)$

\therefore نوجد قيم \dot{L} عند حدى الفترة 0 وعند 21

$$\therefore \dot{L} = \frac{x}{z} - \frac{y}{w}$$

$$\therefore \dot{L} = 0 - \frac{21}{w} \quad \text{وهي سالبة .}$$

وعندما $x = 21$

$$\therefore \dot{L} = \frac{21}{z} - 0 \quad \text{وهي موجبة .}$$

$\therefore \dot{L}$ تغير إشارتها من سالب إلى موجب

\therefore فعندما يكون الورد على بعد $x = 9 \text{ m}$ من القضيب المنخفض (15 m) تكون كمية السلك أقل ما يمكن .

(٣٣) عند التخطيط لأحد المطاعم وُجد أنه إذا كان عدد المقاعد يكفي لعدد بين 40 , 80 شخصاً فإن الربح الأسبوعي يكون بما يعادل 8 جنيهات للمقعد أما إذا ازداد عدد المقاعد أكثر من 80 فإن الربح الأسبوعي لكل مقعد يتناقص بمقدار 4 قروش مضروبة في عدد المقاعد الزائدة عن 80 ،

فما هو عدد المقاعد المناسب لتحقيق أقصى ربح إسبوعي .

الحل :- نعتبر أن عدد المقاعد في المطعم x

، الربح الأسبوعي الكلي بالجنيه p

وواضح أن p تعتمد على x وهي عبارة عن حاصل ضرب x في ربح المقعد الواحد

وعندما $40 \leq x \leq 80$ فإن $p = 8x$

وعندما تزيد x عن 80 ($x > 80$) فإن ربح المقعد الواحد يساوي :

$$[8 - 0.04(x - 80)]$$

حيث $(x - 80)$ هي عدد المقاعد الزائدة عن 80

$$\therefore p = x [8 - 0.04(x - 80)]$$

$$= 11.2x - 0.04x^2$$

$$\therefore p(x) = \begin{cases} 8x & \text{if } 40 \leq x \leq 80 \\ 11.2x - 0.04x^2 & \text{if } 80 \leq x \leq 280 \end{cases}$$

وكيفية الحصول على الرقم 280 تأتي من ملاحظة أن :-

$$11.2x - 0.04x^2 = 0$$

عندما تكون $x = 280$ (بحل المعادلة)

وعندما تكون $x > 280$ فإن :

$$11.2x - 0.04x^2 < 0 \quad \text{تكون سالبة .}$$

وباعتبار قيمة x تنحصر فيما بين $[40, 280]$ وهي الفترة المغلقة

سنجد أن الدالة p متصلة عند $x = 80$ وذلك للآتي :-

$$p = 8x = 8 \times 80 = 640$$

$$p = (11.2x - 0.04x^2) = [11.2 \times 80 - 0.04 \times (80)^2] = 640$$

وهي نفس النتيجة

مما يدل على أن نهاية المقدار $p(x)$ عندما تؤول x إلى 80

$$\lim_{x \rightarrow 80} p(x) = 640$$

، $p(x)$ دالة متصلة في الفترة المغلقة $[40, 280]$

والمطلوب أن تكون $p(x)$ ذات أقصى قيمة لها لذلك نوجد p' ونساويها بالصفر

ونحل المعادلة للحصول على قيم x الحرجة .

وفي هذه المسألة يجب علينا أن نلاحظ p' عند حدود الفترة أي عند :

$$40, 80, 280$$

$$4 < x < 80 \quad \text{أى عندما}$$

$$x = 80 \quad \text{، عندما}$$

$$80 < x < 280 \quad \text{، عندما}$$

$$p'(x) = 8 \quad \text{فإن } 40 < x < 80 \quad \text{فعندما تكون}$$

$$p'(x) = 11.2 - 0.08x \quad \text{فإن } 80 < x < 280 \quad \text{وعندما تكون}$$

$$\text{كما أن } p'(80) = \text{صفر}$$

$$\text{وبوضع } p'(x) = 0$$

$$\therefore 11.2 - 0.08x = 0$$

$$\therefore x = \frac{11.2}{0.08} = 140$$

وعليه فإن القيم الحرجة لـ x هي 80 , 140

وبحساب قيم الدالة $p(x)$ عند النقطتين الحرجتين (80 , 140) وعند طرفى الفترة [40 , 280] سنجد الآتى :-

$$p(40) = 320$$

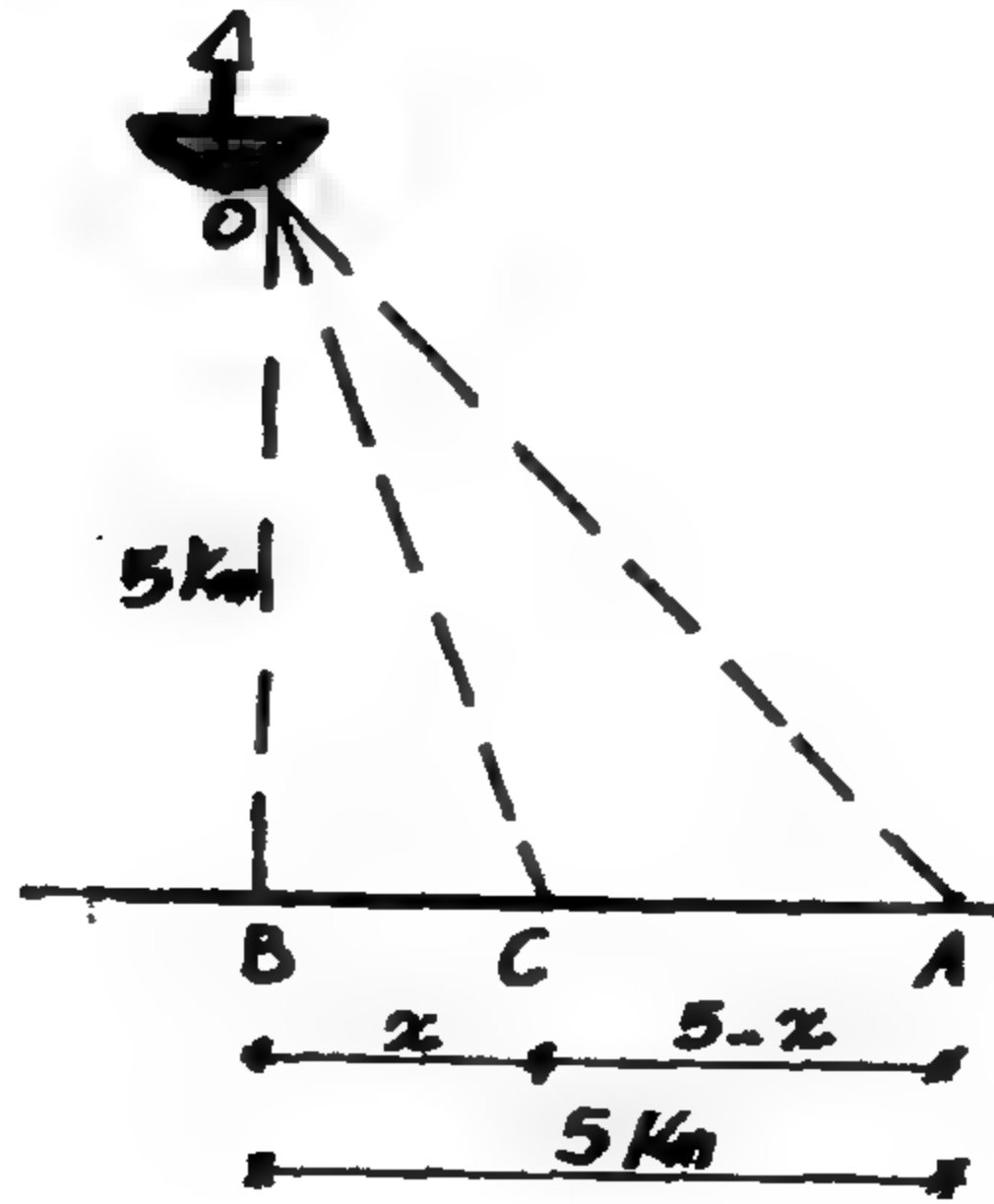
$$p(80) = 640$$

$$p(140) = 784$$

$$p(280) = 0$$

وعليه فإنه عندما يكون عدد المقاعد 140 مقعداً يتحقق أعلى عائد إسبوعى (p) وقدره 784 جنيهاً .

(٣٤) يبحر رجل فى زورق على بعد 5 كيلو متر من أقرب نقطة على الشاطئ المقابل له ، يريد أن يصل إلى نقطة على الشاطئ تبعد بمقدار 5 كيلو متر عن النقطة الأولى فى أقصر وقت ممكن فإذا كان بإمكانه أن يجدف بالزورق بسرعة 4 km/hr فى حين أنه يستطيع أن يجرى بسرعة 6 km/hr على رمال الشاطئ ، حدد فى أى نقطة على الشاطئ عليه أن يُبحر لها ويكمل باقى المسافة عدواً .
الحل :- أنظر الرسم شكل (٢٤-٨) .



شكل (٢٤-٨)

نعتبر امتداد الشاطئ هو BA وأن أقرب مسافة للقارب على الشاطئ هي B وأن القارب عند O على بعد 5 km وأن النقطة المراد أن يصل لها في النهاية هي A وأن C هي النقطة الواجب أن يُحر لها بالزورق وعلى بعد x من B، على بعد (5-x) من A ومسافة التجديف (الإبحار) هي OC بينما المسافة التي سيجريها بعد الهبوط من القارب عند C هي CA

ومن المثلث القائم الزاوية CBO يمكن إيجاد مسافة التجديف :-

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{x^2 + 25}$$

وتستغرق هذه المسافة منه زمناً قدره (باعتبار السرعة 4 km / hr) :-

$$T_1 = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} \quad \dots\dots\dots (1)$$

أما المسافة CA فيقطعها عدواً بسرعة 6 km / hr في زمن قدره :-

$$T_2 = \frac{(5-x)}{6} \quad \dots\dots\dots (2)$$

وبذلك يصبح الزمن الكلى للرحلة T :

$$T = T_1 + T_2 = \frac{\sqrt{(x^2 + 25)}}{4} + \frac{(5-x)}{6} \quad \dots\dots\dots (3)$$

وهي علاقة بين زمن الوصول من O إلى A عبر c ، بين المسافة x ولكي يكون الزمن أقل ما يمكن :-

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dT}{dx} &= \left[\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} (x^2 + 25)^{-\frac{1}{2}} \times 2x \right] + \left[\frac{1}{6} (-1) \right] \\ &= \frac{2x}{8(x^2 + 25)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \quad \text{وبوضع}$$

$$\therefore T' = \frac{dT}{dx} = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{1}{6} = 0$$

$$\therefore \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^2 + 25} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore 5x^2 = 100$$

$$\therefore x^2 = 20$$

$$\therefore x = \pm 2\sqrt{5}$$

$$\therefore x = +2\sqrt{5} = 4.472 \text{ km}$$

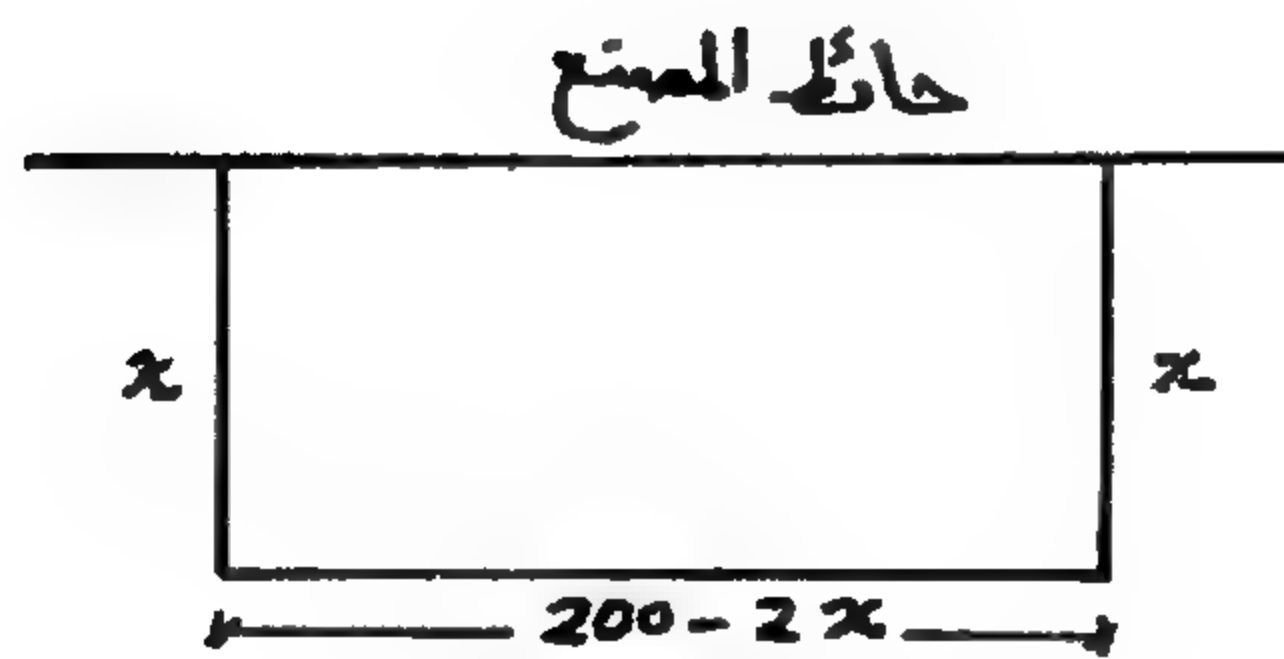
والقيمة السالبة مرفوضة

ويلاحظ أن القيمة السالبة لـ x تعنى أن عليه الإبحار إلى اليسار من نقطة 0 بمسافة 4.472 وهي بالطبع لا تحقق الزمن الأدنى

وبذلك فإن عليه أن يبحر لنقطة c بالقرب من نقطة A وتبعد عن A بمقدار (5 - 4.472) أي بمسافة تعادل 0.527 km

(٣٥) يمكن صنع سور طوله 200 m من الألواح الخشبية المتوفرة والمطلوب إحاطة فناء مستطيل الشكل بهذا السياج (السور) بحيث تكون مساحة الفناء أكبر ما يمكن مستخدمين عند ذلك جدار مصنع مجاور لقطعة الأرض (الفناء) بمثابة أحد أجناب الفناء .

الحل :- انظر الرسم شكل (٨ - ٢٥) .



هنا شكل (٨ - ٢٥)

نرمز لأحد أضلاع الفناء بالرمز x

عندئذ يكون الضلع الآخر للفناء مساوياً $200 - 2x$

ومساحته تكون $A = x(200 - 2x)$

$$\therefore A = -2x^2 + 200x$$

ولكى تكون A قيمة عظمى نوجد $\frac{dA}{dx}$ ونساويها بالصفر ونوجد قيم x الحرجة .

$$\therefore \frac{dA}{dx} = -4x + 200 = 0$$

$$\therefore 4x = 200 \quad \therefore x = 50 \text{ m .}$$

وبذلك فإن طول ضلع الفناء العمودى على جدار المصنع يجب أن يكون طوله 50 m

وبذلك فإن الضلع الموازى للجدار يكون طوله : -

$$200 - 2x = 200 - 2 \times 50 = 200 - 100 = 100 \text{ m .}$$

أى أن الفناء يكون على شكل مستطيل طوله 100 m وعرضه 50 m أو على

شكل نصف مربع طول ضلعه 100 m

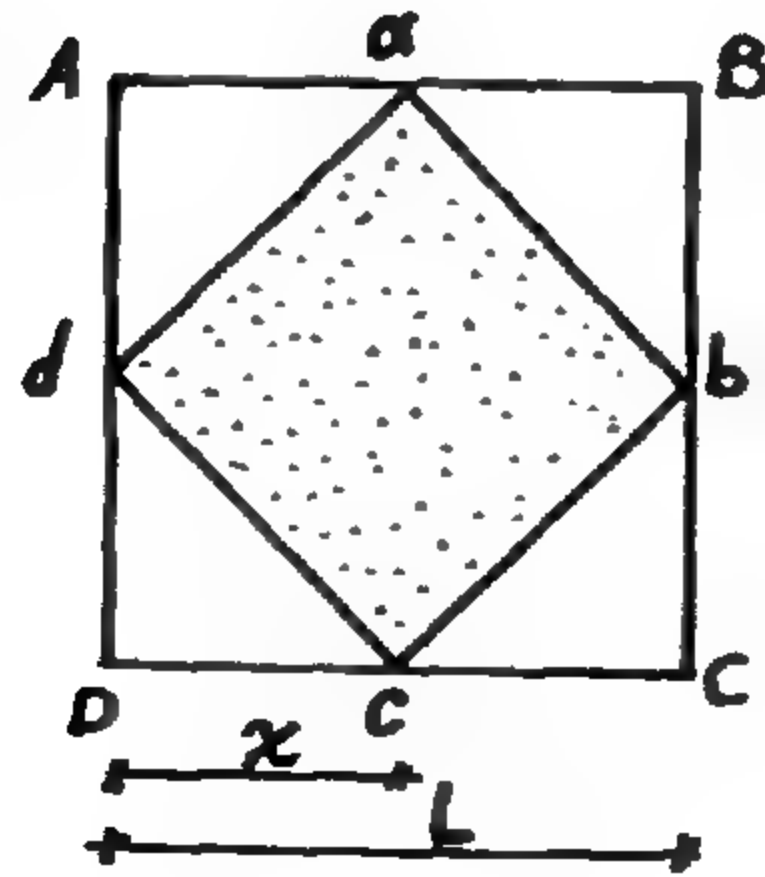
والمساحة حينئذ تبلغ : $A = -2(50)^2 + 200(50) = -5000 + 10000 = 5000 \text{ m}^2$

(٣٦) لدينا المربع $ABCD$ ؛ شكل (٨ - ٢٦) رُسمت ابتداء من رؤوسه الأجزاء

المتساوية Aa, Bb, Cc, Dd ووصلت النقط a, b, c, d بمستقيمات ، فعند أى

قيمة للمستقيم Aa يكون المربع $abcd$ أصغر ما يمكن ؟

الحل :-



شكل (٨ - ٢٦)

إذا اعتبرنا $Aa = x$

فإنه من الواضح أن $aB = L - x$ [حيث L طول ضلع المربع الخارجى]

ومن نظرية فيثاغورث :

$$\begin{aligned}\overline{ab}^2 &= x^2 + (L-x)^2 \\ &= 2x^2 - 2Lx + L^2\end{aligned}$$

ولكن مساحة المربع $abcd$ تساوى \overline{ab}^2 مما يعنى أن المساحة :

$$S = 2x^2 - 2Lx + L^2$$

وبتفاضل S بالنسبة إلى x نوجد S' ونساويها بالصفر

$$\therefore S' = 4x - 2L = 0$$

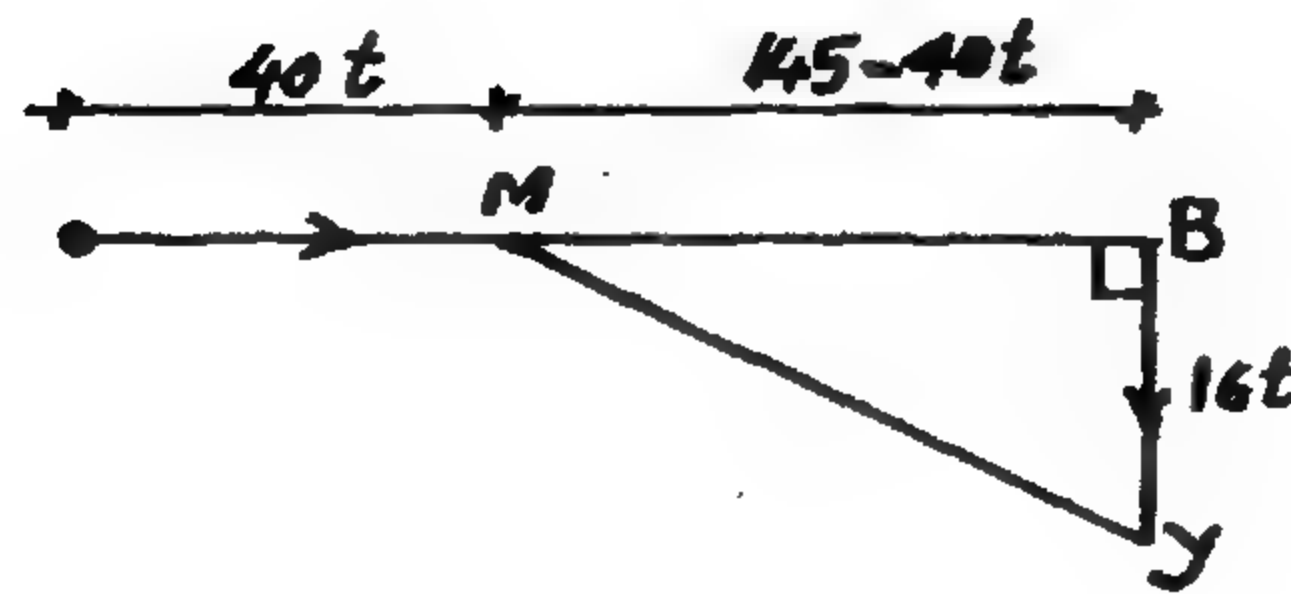
$$\therefore x = \frac{L}{2}$$

أى أنه لتحقيق الشرط اللازم فإنه يجب رسم النقاط a, b, c, d فى منتصفات أضلاع المربع الأساسى $ABCD$.

(٣٧) من النقطتين A, B تُبحر فى نفس الوقت فى الاتجاهين الميين على الرسم بسهمين ، سفينة ويخت وكانت سرعتاهما تساويان على الترتيب $V_y = 16 \text{ km/hr}$ ، $V_m = 40 \text{ km/hr}$.

فكم من الوقت ينقضى حتى يُصبح البعد بينهما أقصر ما يمكن باعتبار أن $AB = 145 \text{ km}$.

الحل :-



شكل (٨-٢٧)

نرمز بالحرفين M , y إلى وضعي اليخت والسفينة
حيث M (motorship) أى السفينة ، y أى اليخت (yacht) ونرمز بالرمز t إلى عدد
الساعات التى تمر بعد إبحارهما من النقطتين A , B وبذلك فإن :-

$$AM = 40 t \text{ km}$$

$$, BY = 16 t \text{ km}$$

ومن نظرية فيثاغورث :-

$$\therefore MY = \sqrt{BM^2 + BY^2} = \sqrt{(145 - 40 t)^2 + (16 t)^2}$$

$$MY = \sqrt{1856 t^2 - 11600 t + 21025}$$

والمطلوب هو جعل MY أصغر ما يمكن .

ولكى تكون MY أصغر ما يمكن يجب أن يكون ما تحت الجذر أصغر ما يمكن .

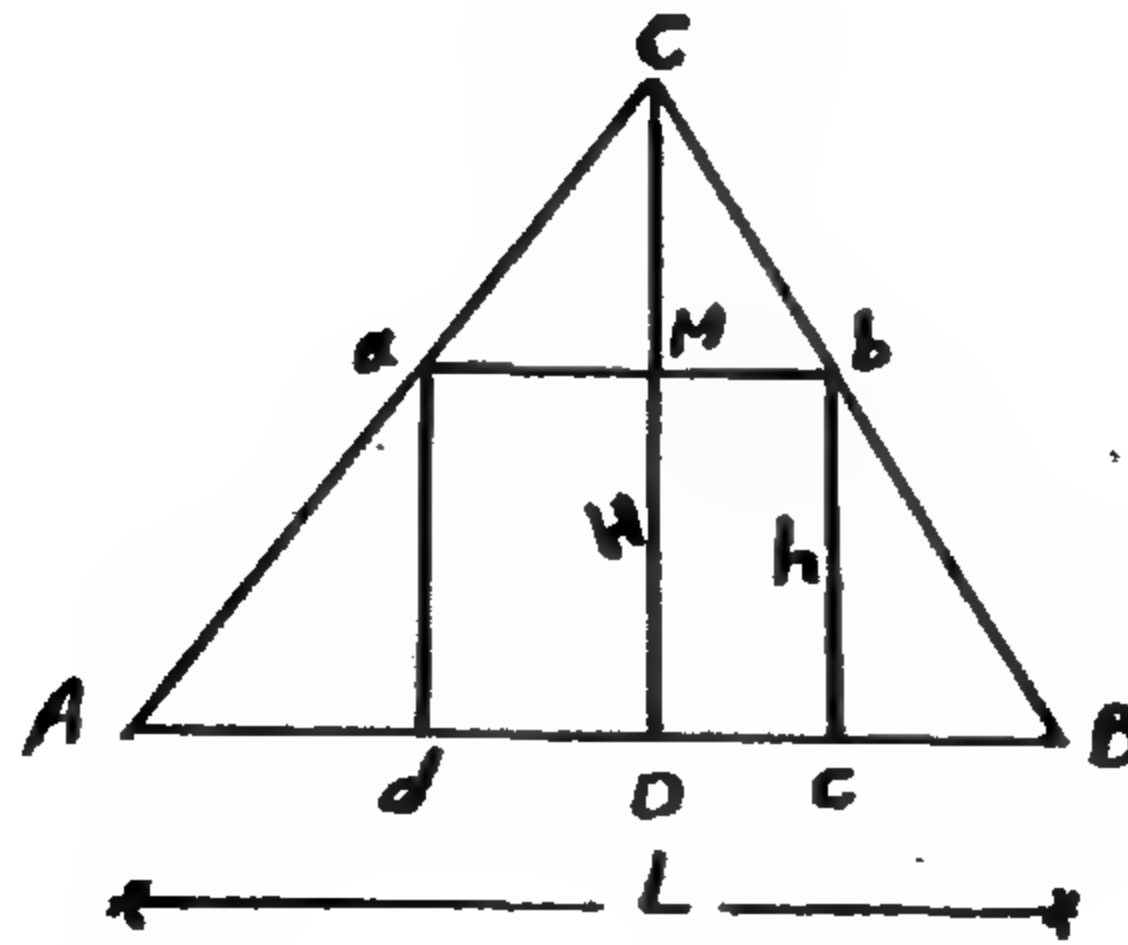
$$\therefore \frac{d}{dt}(1856 t^2 - 11600 t + 21025) = 3712 t - 11600 = 0$$

$$\therefore t = \frac{11600}{3712} = 3\frac{1}{8} = 3.125 \text{ hr}$$

(٣٨) فى المثلث ABC الموضح بشكل (٨-٢٨) ، مد المستقيم ab موازياً للقاعدة

AB بحيث تصبح مساحة المستطيل abcd أكبر ما يمكن

الحل :-



شكل (٨-٢٨)

نفترض أن :- $AB = L$

$$, ab = M$$

$$, bc = h$$

ونرمز بالحرف H إلى إرتفاع المثلث ABC وهو CD المقام على القاعدة AB
ومن تشابه المثلثين abc , ABC ينتج التناسب التالي :-

$$\frac{M}{L} = \frac{H-h}{H}$$

$$\therefore M = \frac{L}{H} (H-h)$$

، حيث أن مساحة المستطيل الداخلى $abcd$ تساوى :-

$$S = hM$$

$$\therefore S = \frac{L}{H} h (H-h) = Lh - \frac{L}{H} h^2$$

ثم نوجد $\frac{ds}{dh}$ أى S' ونساويها بالصفر للحصول على قيم h الحرجة :

$$\therefore S' = L - \frac{2Lh}{H} = 0$$

$$\therefore \frac{2Lh}{H} = L \quad \therefore 2h = H \quad \therefore h = \frac{H}{2}$$

وبالتالى فإن أقصى مساحة تكون عندما يكون ارتفاع المستطيل بما يعادل نصف ارتفاع المثلث .

ومما يؤكد صحة الإجابة أن المشتقة الثانية S'' سالبة

$$S' = 0 - \frac{2L}{H} = -2\frac{L}{H} < 0 (-ve) \text{ سالبة}$$

(٣٩) بستان من أشجار التفاح يحتوى على 30 شجرة تفاح فإذا كان إنتاج الشجرة الواحدة يعادل 400 تفاحة فى المتوسط فإذا أضفنا شجرة واحدة لهذا البستان فإن متوسط الإنتاج للشجرة الواحدة ينخفض بمعدل 10 تفاحات .
فكم عدد الشجرات اللازم لكى يكون المحصول أكبر ما يمكن .

الحل :-

انظر الرسم شكل (٨-٢٩).

إذا اعتبرنا أن عدد الأشجار الجديدة المزروعة في البستان $x =$ فإنه يكون هنالك $30 + x$ شجرة في البستان ويبلغ إنتاجها لكل شجرة $(400 - 10x)$ تفاحة .
وبذلك يكون إنتاج البستان كله Y يساوى :-

$$Y = (30 + x)(400 - 10x) \\ = -10x^2 + 100x + 12000$$

$$\frac{dy}{dx} = -20x + 100$$

$$\text{وبوضع } \frac{dy}{dx} = 0 :$$

$$\therefore -20x + 100 = 0$$

$$\therefore x = 5$$

وعلى ذلك فإن زرع 5 أشجار جديدة يعطى أكبر محصول ويصبح عدد الأشجار الكلى 35 شجرة وإنتاج كل منها يساوى $(400 - 5 \times 10)$ أى 350 تفاحة .
ويكون إنتاج التفاح الكلى من البستان يساوى :-

$$(35 \times 350) = 12250 \text{ appl}$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانياً كالتالى :-

$$\therefore Y = 12000 + 100x - 10x^2$$

$$\text{or } x^2 - 10x - 1200 = \frac{-Y}{10}$$

وبطريقة إكمال المربع (مربع كامل)

$$\therefore x^2 - 10x + 25 - 25 - 1200 = \frac{-Y}{10}$$

$$\therefore (x - 5)^2 - 1225 = \frac{-Y}{10}$$

ومن الأنسب لرسم هذا المنحنى هو تغيير المحاور بحيث تكون

$$Y = \frac{y}{10}, X = x - 5$$

$$\therefore 1225 - X^2 = Y$$

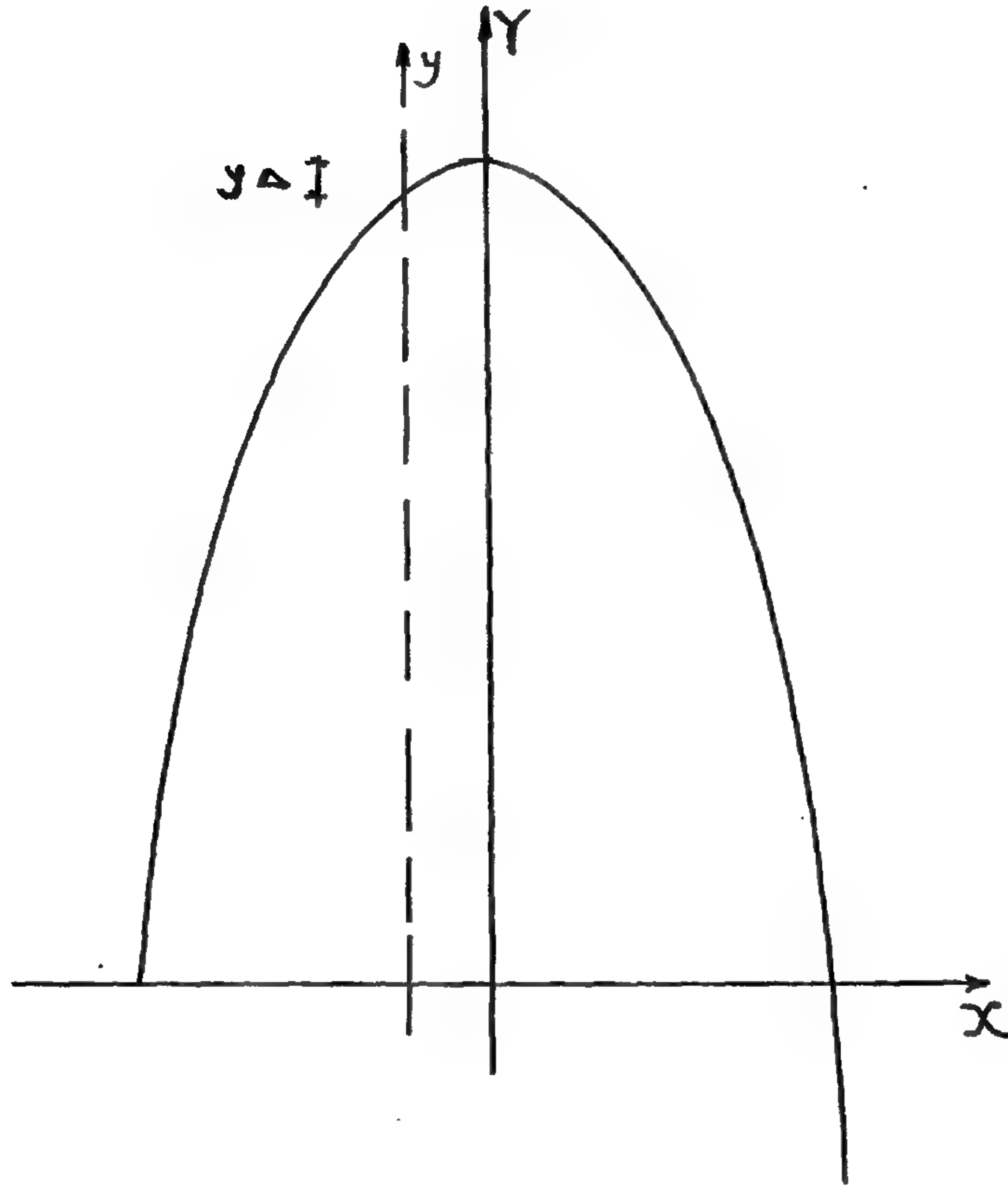
وهى تمثل معادلة قطع مكافئ Parabola وذلك بإزاحة محور OY بمقدار 5 وحدات
لليسار وبضرب كل y فى 10

وحيث أن إنتاج البستان الأصلي $30 \times 400 = 12000$

والإنتاج الجديد بزراعة 5 أشجار إضافية $12250 = 35 \times 350$

فإن الزيادة وقدرها 250 تفاحة تُمثل في الشكل بالرمز Δy

$$\Delta y = 250$$



شكل (٨-٢٩)

الباب التاسع

المعدلات الزمنية المرتبطة

Related Rates

٩-١ : عام

عملياً ، فإن الظواهر المختلفة لا تتأثر بعامل متغير واحد فقط ولكنها فى كثير من الحالات تتأثر بعدة عوامل مختلفة .

وعند تمثيل هذه الظاهرة بعلاقة فى صورة دالة فإن المتغير التابع فى هذه الدالة (الظاهرة) يكون دالة فى أكثر من متغير .

وقد درسنا فى الباب السابق الدوال ذات المتغير الواحد وهى فى الواقع مجرد تبسيط للواقع .

وعموماً فإنه يقصد بالمسائل المدرجة تحت هذا العنوان ، بتلك التى تحتوى على الأقل على متغيرين مرتبطين بالزمن ، أى أن كلاً من المتغيرين مرتبط بالزمن .

فإذا ما قمنا بمفاضلة هذه الدالة بالنسبة للزمن فإن الناتج يكون عبارة عن معادلة بين مشتقات هذه المتغيرات بالنسبة للزمن .

ويُطلق حينئذ على معدلات تغير الأزمنة لهذه المتغيرات بأنها مرتبطة .

فمن المعادلة التى تربط بين الظاهرة والمتغيرات المختلفة بها يمكننا إيجاد علاقة بين المعدلات الزمنية المختلفة لكل متغير ، بحيث أنه إذا علمنا أحد هذه المعدلات ، يمكن معرفة المعدل الثانى أو الآخر .

والأمثلة المحلولة التالية توضح هذا الموضوع بمزيد من التفسير مع بيان أهمية ذلك فى مختلف أوجه الحياة العملية خاصة الهندسية والفيزيائية منها .

٩-٢ : - أمثلة محلولة :-

(١) أوجد معدل تغير حجم كرة بالنسبة إلى نصف قطرها " عند تمددها " وذلك

باستخدام طريقة Δ - $process$ -

الحل :-

حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi r^3$ حيث r = نصف قطر الكرة

وحيث أن معدل التغير يمكن تعريفه كالتالي :-

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

لذلك ففي حالتنا هذه يكون معدل التغير كالتالي :-

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta r}, \quad \Delta v = f(r + \Delta r) - f(r)$$

$$, \because v = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad i.e \quad v = f(x) = v(r)$$

$$, f(r + \Delta r) = \frac{4}{3} \pi (r + \Delta r)^3$$

$$\therefore \Delta v = f(r + \Delta r) - f(r)$$

$$= \frac{4}{3} \pi (r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi [r^3 + 3r^2 \cdot \Delta r + 3r \cdot (\Delta r)^2 + (\Delta r)^3] - \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi [3r^2 \cdot \Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3]$$

$$\therefore \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{4\pi}{3} [3r^2 + 3r \Delta r + (\Delta r)^2]$$

$$, \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = 4\pi r^2$$

وهو معدل تغير حجم الكرة .

(٢) يزيد حجم كرة بمعدل ثابت يبلغ $24 \text{ cm}^3 / \text{sec}$ ، فاحسب نصف قطرها عندما

يكون معدل تغير نصف القطر بالنسبة للزمن مساوياً لثلاثة أضعاف نصف القطر ،

وذلك باستخدام طريقة Δ

الحل :-

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

حجم الكرة :-

ويمكننا إيجاد $\frac{dv}{dr}$ بدلالة r . وبتفاضل هذه المعادلة يمكن إيجاد $\frac{dv}{dt}$ بدلالة r ، $\frac{dr}{dt}$ وذلك لأن :-

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = 24$$

\therefore نقوم بحساب r عندما $\frac{dr}{dt} = 3r$ ،

وباستخدام طريقة Δ :-

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dr} &= \frac{f(r+\Delta r) - f(r)}{\Delta r} \\ &= \frac{\frac{4}{3}\pi (r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\Delta r} \\ &= \frac{\frac{4\pi}{3} [r^3 + 3r^2 \cdot \Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3] - \frac{4}{3}\pi r^3}{\Delta r} \\ &= \frac{4\pi r^2 \cdot \Delta r + 4\pi r \cdot (\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi (\Delta r)^3}{\Delta r} \\ &= 4\pi r^2 + 4\pi r \cdot \Delta r + \frac{4}{3}\pi (\Delta r)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} 4\pi r^2 + 4\pi r \cdot \Delta r + \frac{4}{3}\pi (\Delta r)^2 = 4\pi r^2$$

$$\therefore \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

وبالتعويض عن قيمة $\frac{dv}{dt} = 24$ ، عن قيمة $\frac{dr}{dt} = 3r$:

ثم نحل المعادلة في r :-

$$24 = 4\pi r^2 \cdot (3r) = 12\pi r^3$$

$$\therefore r^3 = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$$

(٣) يتم نفخ بالون ، وبزيادة نصف قطره ، يزداد حجمه فاوجد معدل زيادة الحجم

عندما $r = 5 \text{ mt}$ ، بطريقة Δ

الحل :-

نفترض أن حجم الكرة V

$$, V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

ومعدل تغير حجم البالون (الكرة) :-

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} , \quad \Delta v = f(r + \Delta r) - f(r)$$

$$, \quad f(r + \Delta r) = \frac{4}{3} \pi (r + \Delta r)^3$$

$$\therefore \Delta v = f(r + \Delta r) - f(r)$$

$$= \frac{4}{3} \pi (r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi \left[r^3 + 3r^2 \cdot \Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3 \right] - \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$, \quad \frac{\Delta v}{\Delta r} = 4\pi r^2 + 4\pi r \cdot \Delta r + \frac{4}{3} \pi (\Delta r)^2$$

$$, \quad \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} 4\pi r^2 + 4\pi r \cdot \Delta r + \frac{4}{3} \pi (\Delta r)^2 = 4\pi r^2$$

وهذا يمثل معدل زيادة الحجم أى $\left(\frac{dv}{dr} = 4\pi r^2 \right)$

وعندما يزداد الحجم ويصبح نصف القطر : $r = 5$

$$\therefore \frac{dv}{dr} = 4\pi r^2 = 100\pi \text{ m}^3$$

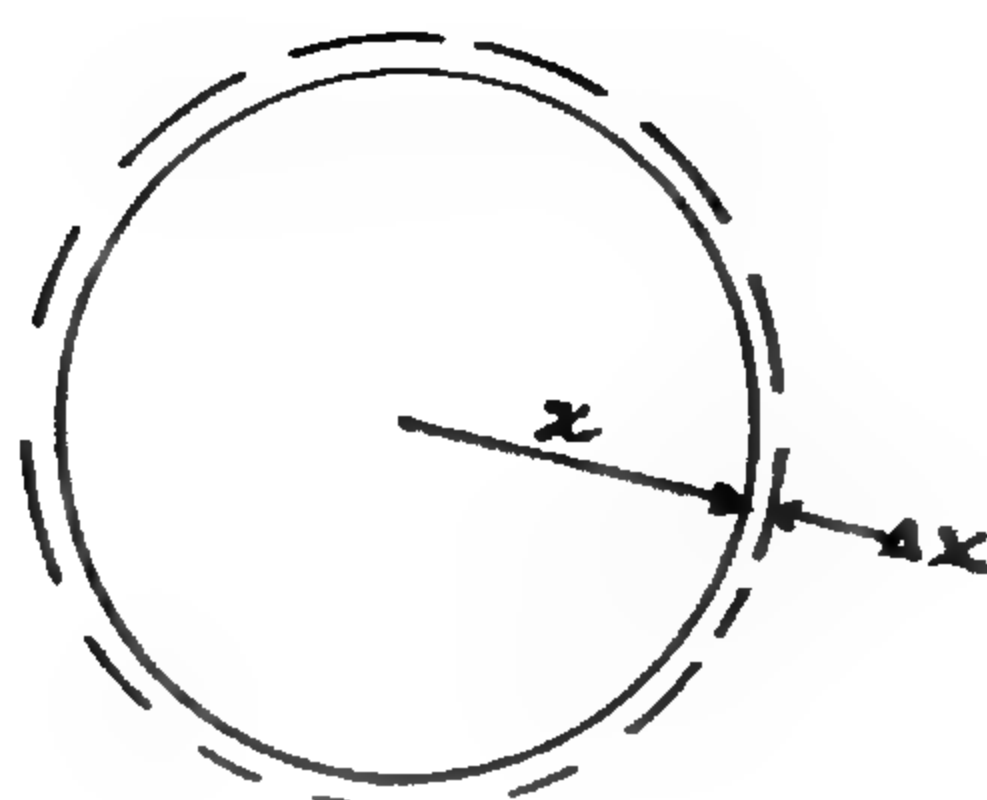
وذلك لكل متر تغير فى نصف القطر .

(٤) صفيحة معدنية دائرية الشكل عُرضت للحرارة فتمددت بانتظام بحيث يزداد

نصف قطرها بمعدل 0.025 cm/sec فكم يبلغ معدل زيادة المساحة عندما يكون

نصف القطر مساوياً 5 cm .

الحل :-
أنظر شكل (٩-١) .



شكل (٩-١)

نفرض أن x هو نصف قطر الصفيحة
، نفرض أن y هي مساحة الصفيحة :

$$\therefore y = \pi x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 2\pi x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0.025 \quad , \quad x = 5 \text{ cm} \text{ عندما}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 2\pi \times 5 \times 0.025 = 0.25\pi \text{ cm}^2 / \text{sec}$$

(٥) بالون كروي يتم نفخه بالهواء بمعدل $20 \text{ m}^3 / \text{min}$ وفي اللحظة التي كان عندها نصف القطر 15 m ، كم يبلغ معدل زيادة مساحة السطح .

الحل :-

ليكن نصف القطر r

ومساحة السطح $S = 4\pi r^2$

والحجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{ds}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

ومنها :-

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 8\pi r \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{2}{r} \cdot \frac{dv}{dt}$$

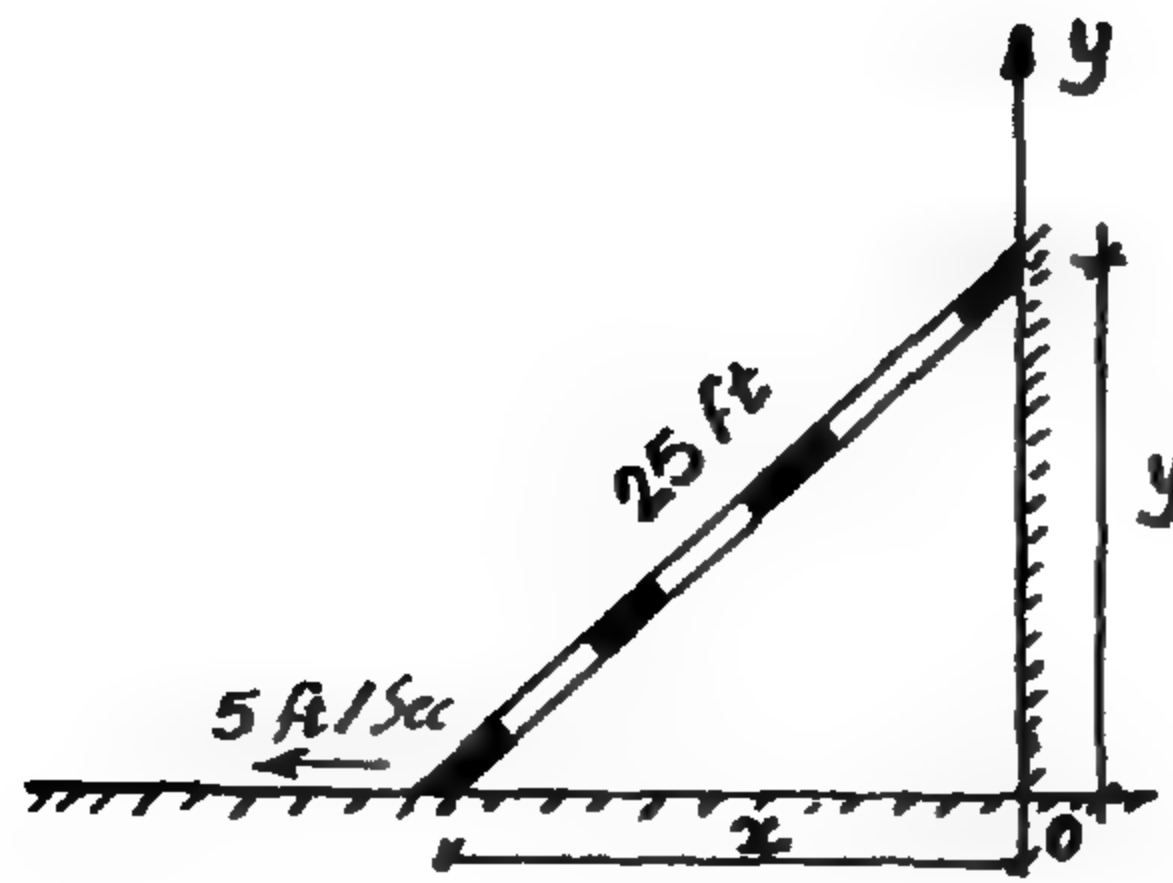
وبالتعويض عن $\frac{dv}{dt} = 20$ ، عن $r = 15$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{2}{15} \cdot 20 = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

(٦) يرتكز سلم طوله 25 ft من أعلى على حائط رأسى ومن أسفل على الأرض فإذا كانت أسفل نقطة بالسلم تنزلق بمعدل 5 ft/min فأوجد سرعة أعلى نقطة في السلم على الحائط الرأسى باستخدام طريقة الدالة الضمنية في عملية التفاضل .

الحل :-

أنظر الرسم شكل (٩-٢)



شكل (٩-٢)

من هندسة الشكل :-

$$x^2 + y^2 = 25^2$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (x^2) + \frac{d}{dx} (y^2) = \frac{d}{dx} (25)^2$$

$$\therefore 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \quad (\text{تفاضل ضمنى بالنسبة إلى } t)$$

$$\therefore V = \frac{dx}{dt} = 5$$

$$\therefore 2x \times 5 + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore 2y \frac{dy}{dt} = -10x$$

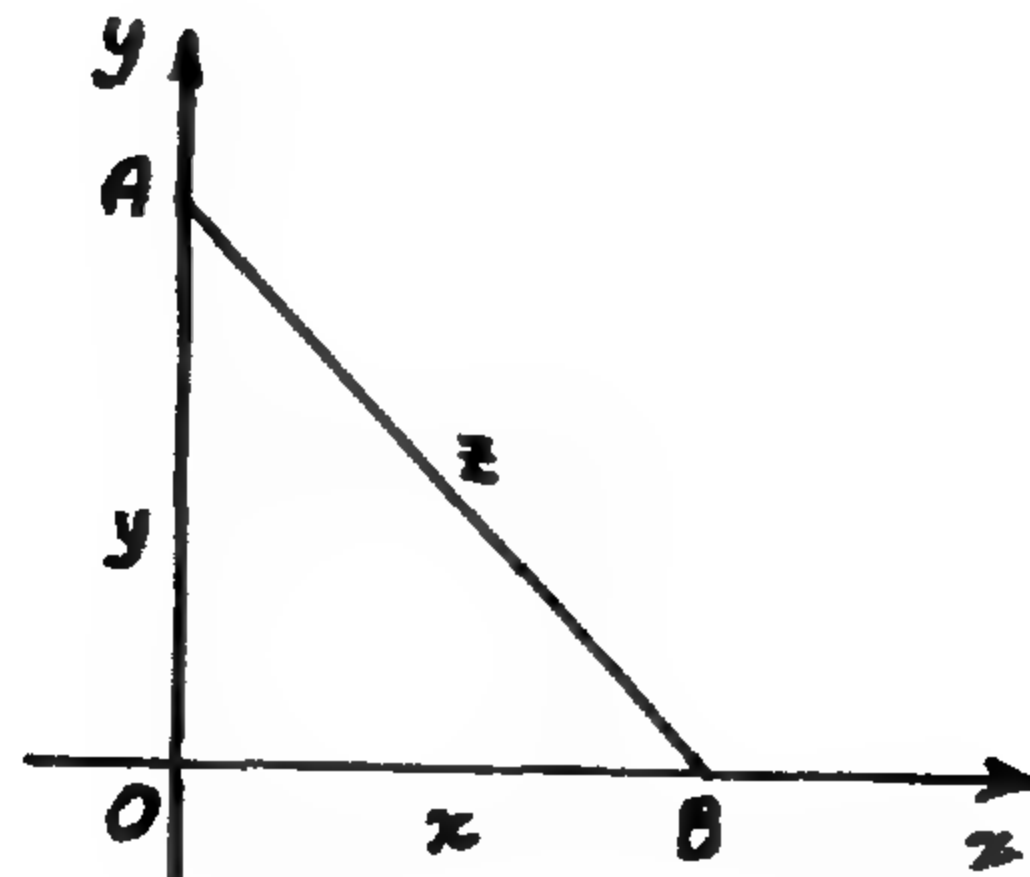
$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{10x}{2y} = -\frac{5x}{y}$$

وتعنى إشارة (-) ، أن قمة السلم تنزلق للأسفل على الحائط الرأسى فى اتجاه YOY'
(V) قاربان A , B بدأ كل منهما فى الإبحار من نفس النقطة متحركاً بعيداً عن
الآخر فى اتجاهين متعامدين فإذا كان القارب A يتحرك بمعدل 6 Km / h بينما
يتحرك القارب B بسرعة 8 Km / h .

فكم يبلغ معدل ابتعادهما بعد ساعتين من بدء التحرك .

الحل :-

أنظر الرسم شكل (٩-٣)



شكل (٩-٣)

إذا اعتبرنا أن y هي المسافة التي تحركها القارب A ،
 إذا اعتبرنا أن x هي المسافة التي تحركها القارب B ،
 فإن المسافة بينهما تُصبح مساوية Z :-

$$Z^2 = x^2 + y^2$$

وبأخذ مشتقة هذه الصيغة (Z^2) بالنسبة للزمن :-

$$\therefore 2Z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ولما كان القاربان يتحركان بسرعة ثابتة

$$x = 6 \times 2 = 12 \text{ km} \quad \therefore \text{المسافة التي تحركها القارب A بعد ساعتين} :-$$

$$y = 8 \times 2 = 16 \text{ km} \quad \text{، المسافة التي تحركها القارب B بعد ساعتين} :-$$

\therefore فالمسافة بينهما بعد ساعتين Z : تساوى :-

$$Z = \sqrt{(12)^2 + (16)^2}$$

$$= \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20 \text{ km}$$

$$Z = 20 \text{ ، } \frac{dy}{dt} = 8 \text{ ، } y = 16 \text{ ، } \frac{dx}{dt} = 6 \text{ ، } x = 12 \quad \text{وبالتعويض بهذه القيم} :-$$

في المعادلة (1) :

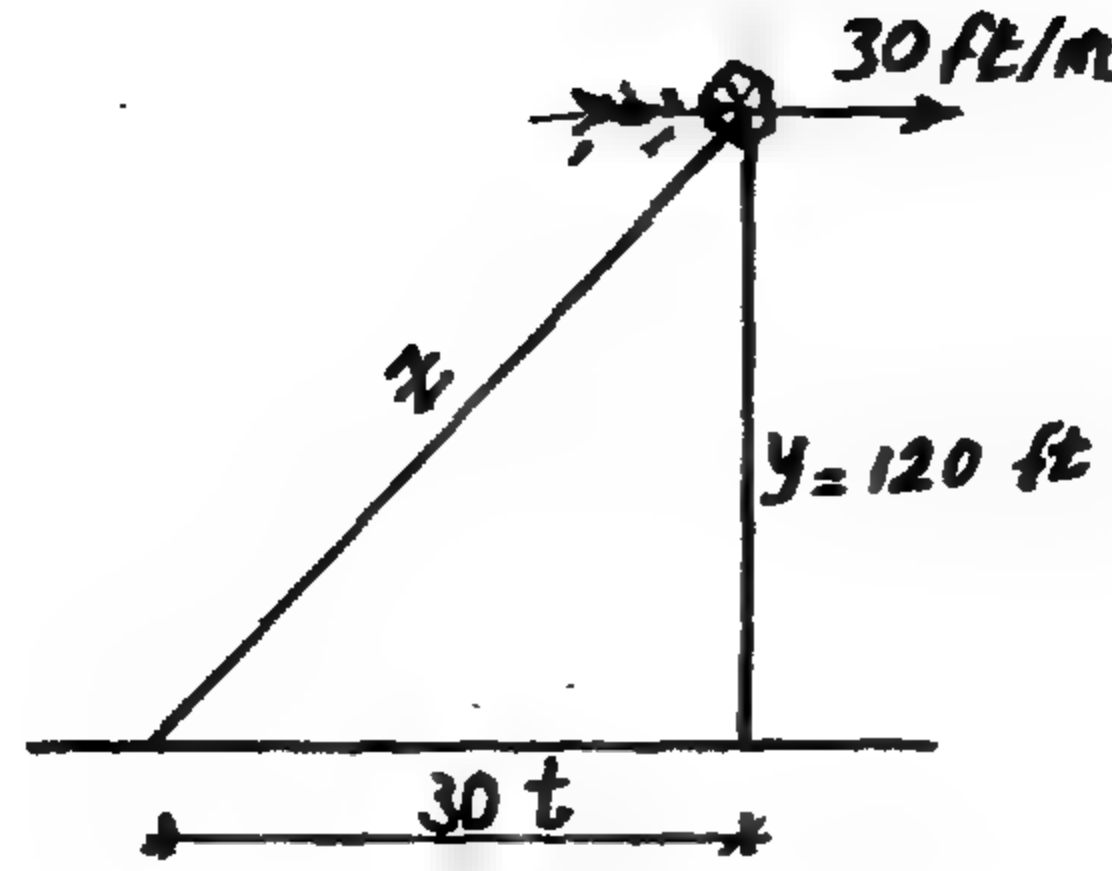
$$\therefore 20 \cdot \frac{dz}{dt} = 12 \times 6 + 16 \times 8 = 72 + 128 = 200$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{200}{20} = 10 \text{ km/h} \quad \therefore \text{معدل الابتعاد يعادل} :$$

(٨) يقوم غلام باللعب بطائرة ورقية ، فإذا كانت الطائرة في لحظة ما تطير فوق يده تماماً وعلى ارتفاع 120 ft ، فإذا كانت الرياح تحرك الطائرة أفقياً بسرعة 30 ft/min ، فكم يبلغ معدل الشد في الخيط عندما يكون الطول الحر للخيط مساوياً 150 قدماً .

الحل :-

أنظر الرسم شكل (٩-٤) .



شكل (٩-٤)

لدينا :-

$$y = 120 \text{ ft}$$

$$\frac{dx}{dt} = 30, \quad Z = 150$$

والمسافة الأفقية التي تحركتها الطائرة في زمن " t " $30 t =$

والمطلوب هو إيجاد : $\frac{dz}{dt}$

وباستخدام نظرية فيثاغورث :-

$$Z^2 = (30 t)^2 + (120)^2 \quad \dots\dots\dots (١)$$

$$\therefore 900 t^2 = Z^2 - (120)^2$$

$$\therefore t = \frac{1}{30} \times \sqrt{Z^2 - (120)^2} \quad \dots\dots\dots (٢)$$

وبتفاضل المعادلة (١) :-

$$\therefore 2Z \frac{dz}{dt} = (30)^2 \times 2t + 0 = 1800 t$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{1800 t}{2 z} = \frac{900 t}{z} \quad \dots\dots\dots (٣)$$

وبالتعويض عن قيمة t من (٢) في المعادلة (٣)

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{900 \sqrt{z^2 - (120)^2}}{30 \times z} = \frac{30}{z} \sqrt{z^2 - (120)^2}$$

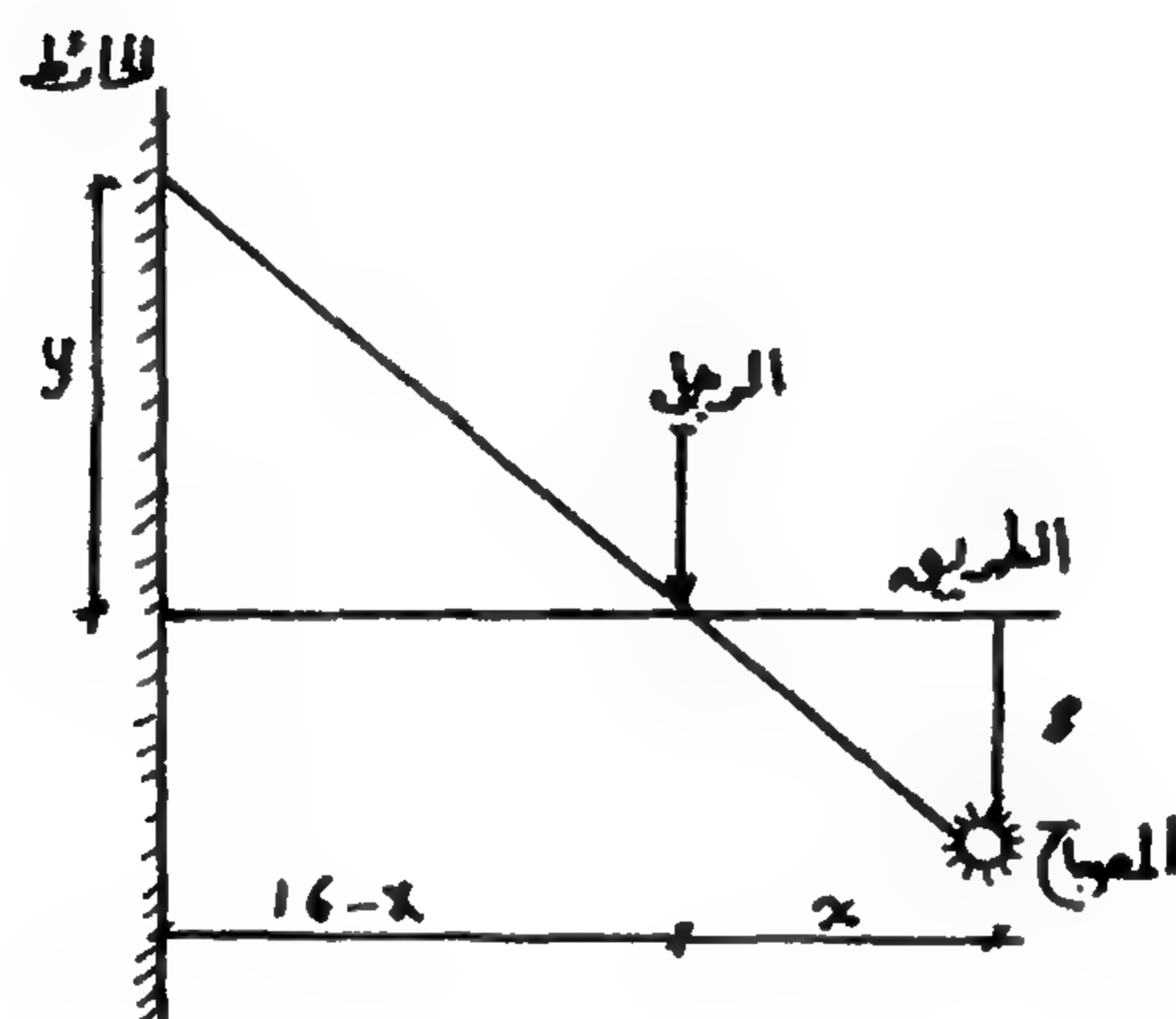
وعندما تكون : $Z = 150 \text{ ft}$ فإن معدل الشد يساوى :-

$$\frac{dz}{dt} = \frac{30}{150} \sqrt{150^2 - 120^2} = \frac{90}{5} = 18 \text{ ft/min}$$

(٩) يسير رجل فى طريق متعامد على حائط ، وفى اتجاه الحائط فإذا كان الرجل يقترب من الحائط بمعدل 5 m/min . فإذا كان هنالك مصباح يبعد 8 m عن الطريق ، 16 m عن الحائط فما هو معدل تحرك ظل الرجل على الحائط فى اللحظة التى يكون فيها الرجل على بعد 8 m من الحائط .

الحل :-

أنظر الرسم شكل (٩-٥) .



شكل (٩-٥)

بالرجوع إلى الشكل سنجد أنه :-

$$\frac{dx}{dt} = 5$$

والمطلوب هو $\frac{dy}{dt}$ فى اللحظة التى تكون فيها $x = 8 \text{ m}$

ومن هندسة الشكل :-

$$\frac{x}{8} = \frac{16 - 8}{y}$$

$$\therefore xy = 128 - 8x$$

وحيث أن كلاً من x, y دالة فى الزمن لذلك يلزم أن نفاضل بالنسبة للزمن .

$$\therefore \frac{d}{dt}(xy) = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} = -8 \frac{dx}{dt}$$

وعندما تكون $x = 8$, $y = 8$

$$\therefore 8 \frac{dy}{dt} + 8 \times 5 = -8 \times 5$$

$$\therefore 8 \frac{dy}{dt} = -80$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -10$$

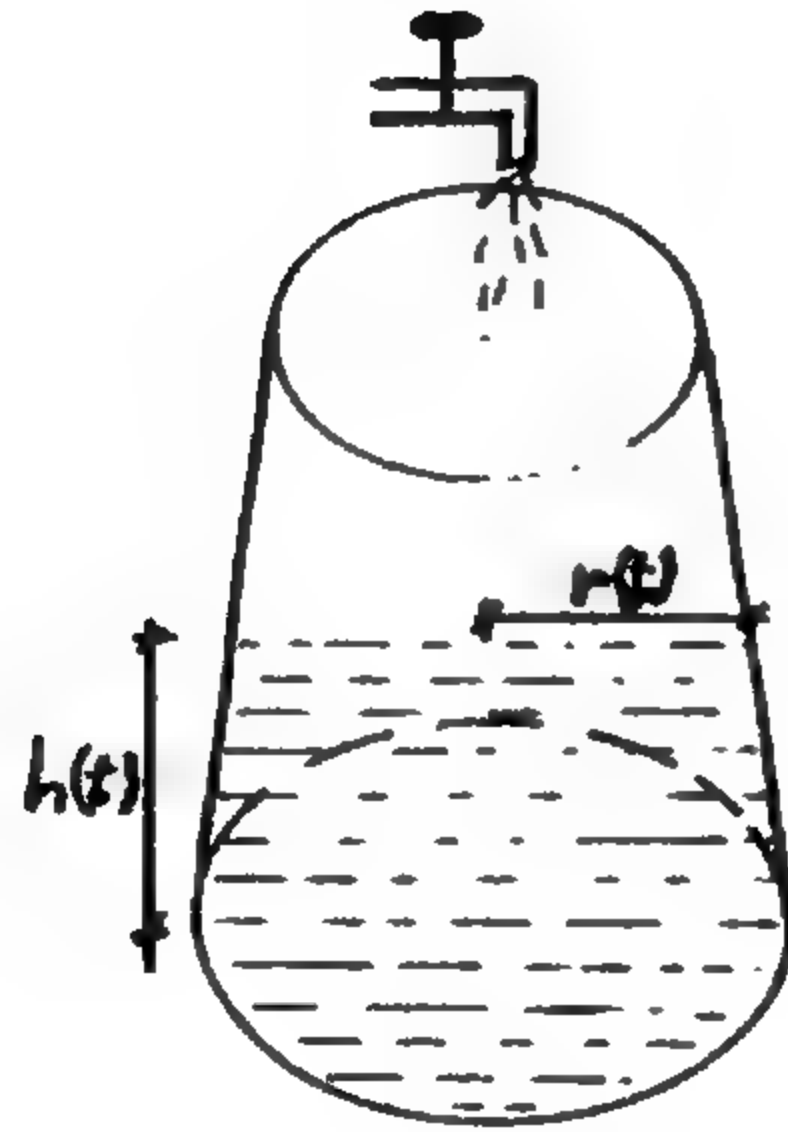
وعليه فإن في اللحظة المذكورة فإن ظل الرجل يتحرك بمعدل 10 m / min

والإشارة السالبة تعنى أن الظل يتحرك إلى اليمين ويتناقص مع الزمن .

(١٠) ينساب الماء إلى خزان (وعاء) بشكل مخروطى بمعدل 5 Liter / min فما هو معدل ارتفاع الماء فى الوعاء عند أى لحظة ؟

الحل :-

أنظر الرسم شكل (٩-٦) .



شكل (٩-٦)

عند أى لحظة ولتكن t دقيقة بعد أن يبدأ الماء فى الانسياب بالوعاء ،

نعتبر أن $h(t)$ هى عمق الماء ، أن $r(t)$ هى نصف قطر سطح الماء فى الوعاء وحيث أن حجم الماء يتغير تبعاً لتغير الوقت .

$$\therefore V(t) = \frac{1}{3} \pi [r(t)]^2 \cdot h(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ومن المعطيات فى المسألة فإن حجم الماء فى الخزان عند أى لحظة (t) يساوى :-

$$V(t) = 5t$$

$$\therefore 5t = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

وللتعبير عن الحجم بدلالة متغير واحد فإنه باستخدام تشابه المثلثات بالشكل نجد أن :-

$$\frac{r}{1.5} = \frac{h}{3} \quad i.e \quad h = 2r. \quad or :- \quad r = \frac{h}{2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

وبالتعويض من (2) فى (1) عن قيمة r :-

$$V(t) = 5t = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 \times h = \frac{\pi h^3}{6}$$

$$\therefore 30t = \pi h^3 \quad \therefore h = \sqrt[3]{\frac{30t}{\pi}}$$

$$\therefore h = \left(\frac{30}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \times (t)^{\frac{1}{3}}$$

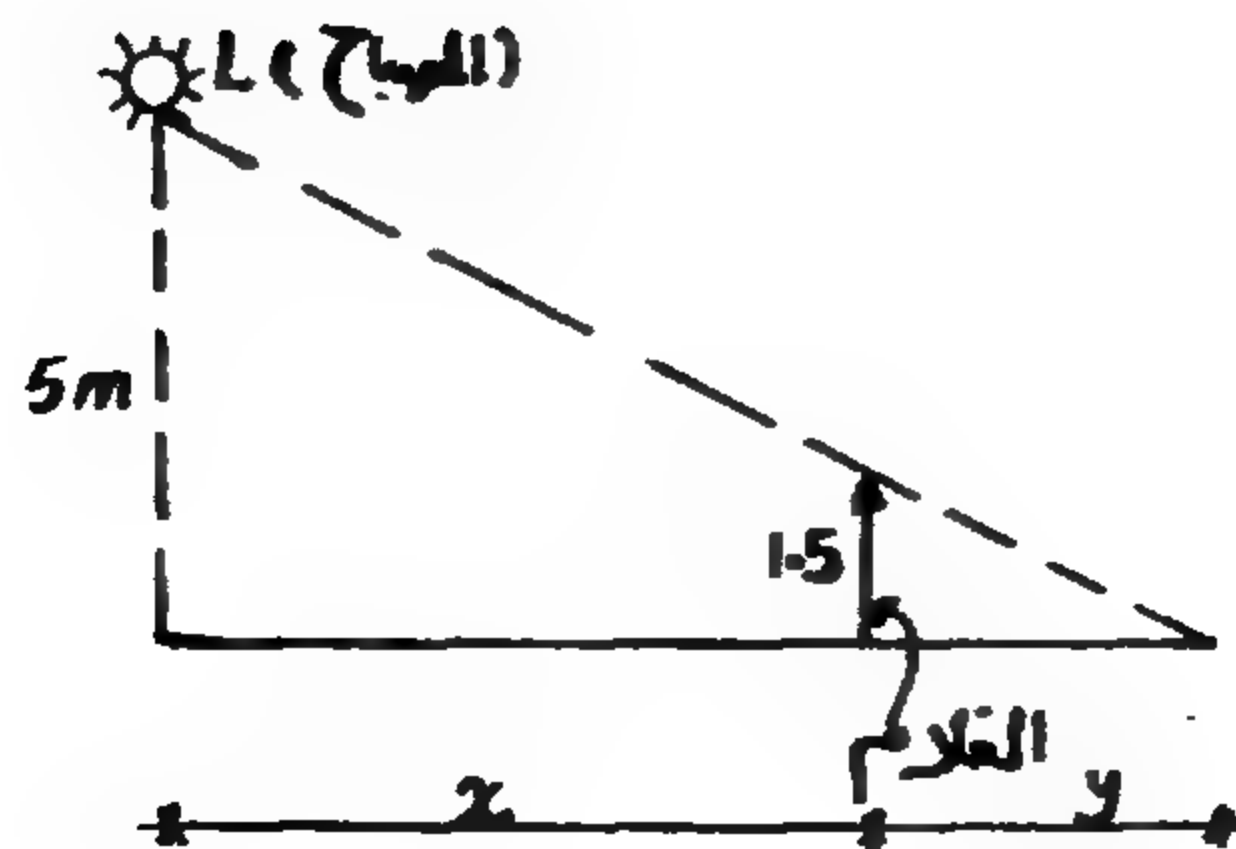
$$\therefore \frac{dh}{dt} = \left(\frac{30}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \times \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{30}{\pi t^2}} = \sqrt[3]{\frac{30}{27\pi t^2}} = \sqrt[3]{\frac{10}{9\pi t^2}}$$

وهو معدل ارتفاع الماء فى الوعاء المخروطى عند أى لحظة t .

(11) يتعد غلام طوله 1.5 m من مصباح مُعلق على ارتفاع 5 m احسب معدل تغير طول ظل الغلام ، إذا كان يتعد بمعدل 56 m لكل دقيقة .

الحل :-

أنظر الرسم شكل (٧-٩) .



شكل (٧-٩)

نفترض x هي المسافة بين الغلام وأسفل المصباح تماماً
ونفترض y هي طول ظل الغلام على الأرض
ومن الشكل :-

$$\frac{y}{y+x} = \frac{1.5}{5}$$

$$\therefore 5y = 1.5y + 1.5x$$

$$\therefore 3.5y = 1.5x$$

$$\therefore y = \frac{1.5}{3.5}x$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة للزمن :

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{1.5}{3.5} \frac{dx}{dt} = \frac{3}{7} \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} \text{ تساوى } 56 = \text{معدل ابتعاد الغلام}$$

$$\text{معدل تغير طول الظل } \frac{dy}{dt}$$

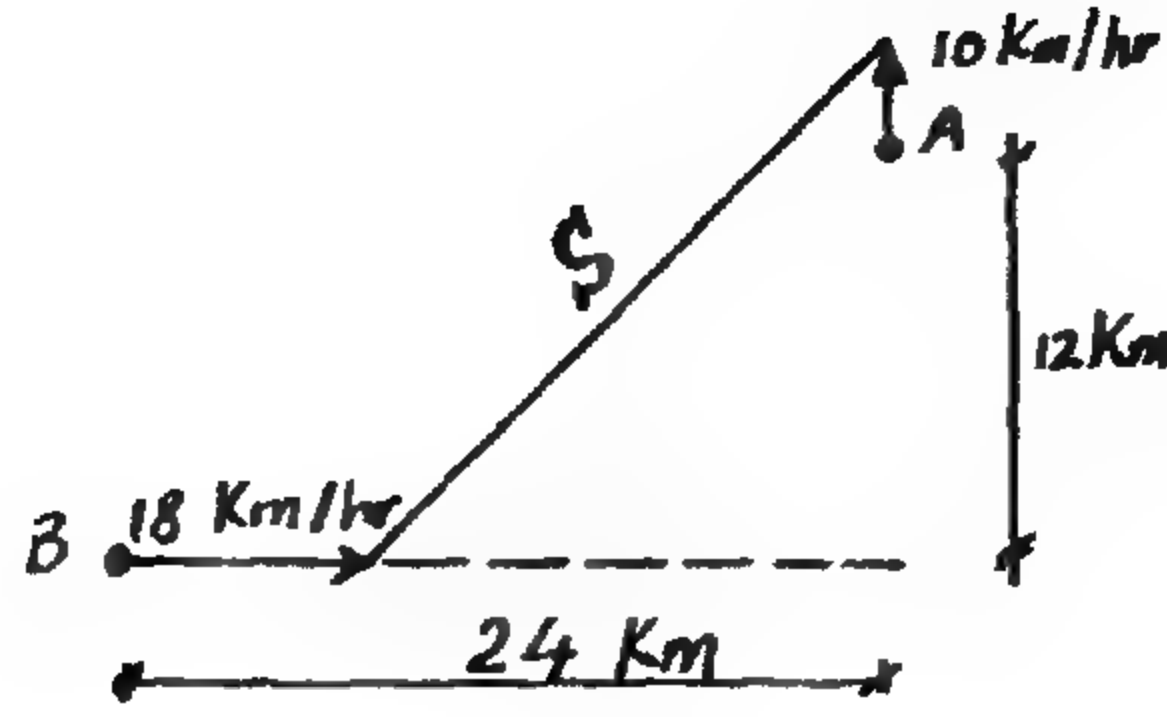
$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{3}{7} \times 56 = 24 \text{ m / min}$$

(١٢) سفينتان A , B تُبحر السفينة A إلى الشمال بسرعة 10 km / hr بينما السفينة B والتي تقع إلى جنوب A بمقدار 12 km وإلى غربها بمقدار 24 km ، تبحر إلى الشرق بسرعة 18 km / hr

فما هو معدل تغير المسافة بين السفينتين ، وكم تتحرك السفينة B قبل أن تبدأ المسافة بينهما في التناقص .

الحل :-

انظر الرسم شكل (٩-٨) .



شكل (٩-٨)

نفترض أن S هي المسافة بين السفينتين بعد تحركهما لمدة t ساعة من موضع البداية .

وعندما $t = 0$ فإن المسافة النسبية بينهما تكون S_0 وتساوى :-

$$S_0 = \sqrt{24^2 + 12^2} = \sqrt{720} = 26.83 \text{ km}$$

وبعد فترة زمنية t فإن السفينة B تكون على بعد $(24 - 18t)$ من نقطة 0

بينما تكون السفينة A على بُعد $(12 + 10t)$ من 0

وبذلك تكون المسافة الجديدة :-

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(24 - 18t)^2 + (12 + 10t)^2} \\ &= \sqrt{720 - 624t + 424t^2} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1 \times (-624 + 848t)}{2 \sqrt{720 - 624t + 424t^2}} \\ &= \frac{-312 + 424t}{\sqrt{720 - 624t + 424t^2}} \end{aligned}$$

وعند موضع البداية عندما تكون $t = 0$ فإن :-

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-312 + 424 \times 0}{\sqrt{720 - 624 \times 0 + 424 \times 0}} = \frac{-312}{26.83} = -11.63$$

ولما كانت إشارة $\frac{ds}{dt}$ سالبة ، لذلك فإن المسافة بين السفينتين تتناقص ويقتربان من

بعضهما بمعدل 11.63 km/h عند موضع البداية .

وتتوقف المسافة بين السفينتين عن التناقص عندما $\frac{ds}{dt} = 0$ والتي تعنى :-

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-312 + 424 t}{\sqrt{720 - 624 + 424 t^2}} = 0$$

$$i.e -312 + 424 t = 0$$

وبحل المعادلة لإيجاد قيمة t التى عندها تكون المسافة النسبية ثابتة ثم تبدأ فى الزيادة .

$$\therefore t = \frac{312}{424} = 0.736 \text{ hour}$$

وبتعبير آخر فإنه بعد $0.736 h$ من تحركهما من نقطة البداية تبدأ المسافة بينهما فى الزيادة ، حيث تتحرك السفينة B مسافة قدرها :-

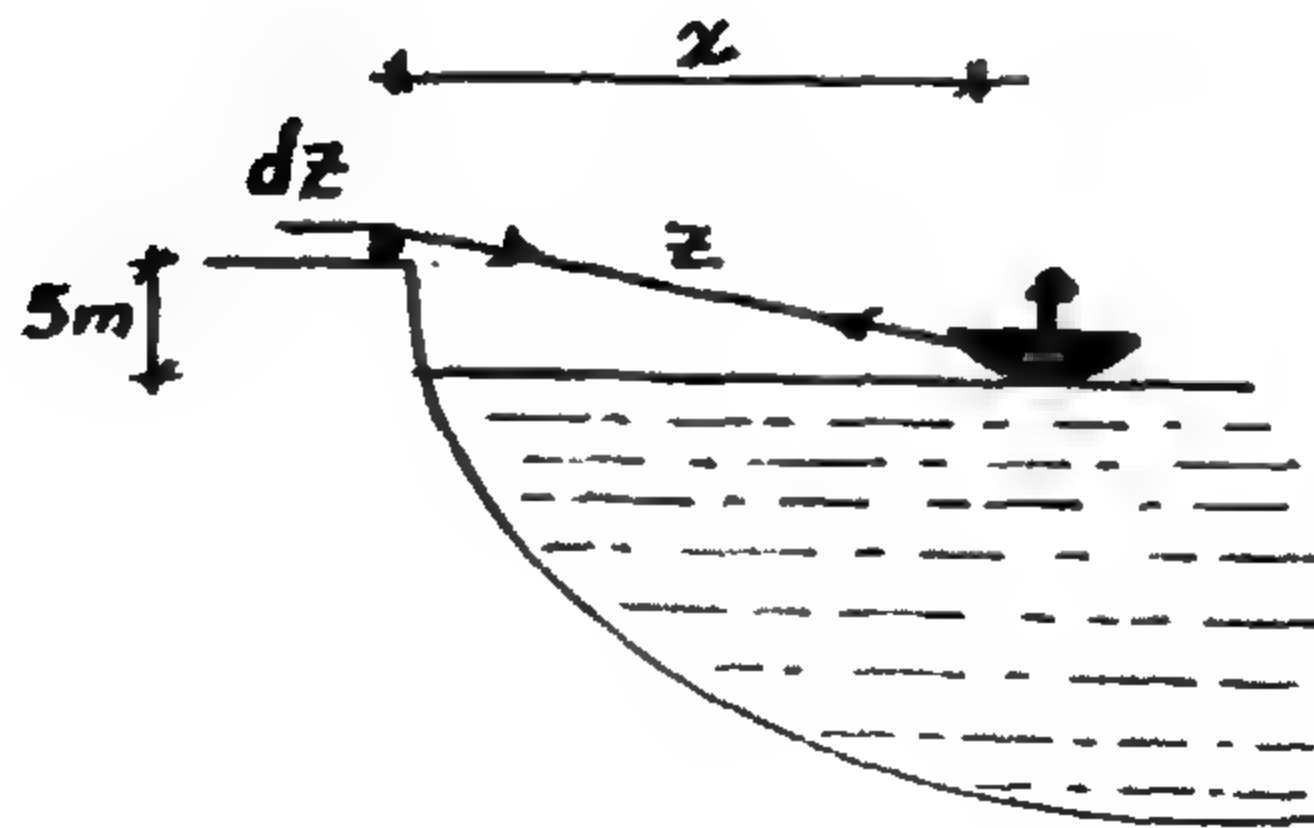
$$0.736 \times 18 = 13.25 \text{ km}$$

قبل أن تبدأ المسافة فى التزايد .

(١٣) قارب يتم سحبه إلى رصيف الميناء الذى يرتفع 5 أمتار فوق سطح الماء فإذا كان سحب القارب بالحبل يتم بمعدل 2 m/sec . فما هى السرعة التى يقترب بها القارب من قاعدة رصيف الميناء عندما يكون طول الحبل 13 m مع إهمال الارتخاء فى الحبل .

الحل :-

أنظر الرسم شكل (٩-٩) .



شكل (٩-٩)

لدينا :

$$\frac{dz}{dt} = 2 \text{ m/sec}$$

$$Z = 13 \text{ mt}$$

والمطلوب إيجاد $\frac{dx}{dt}$

وعند أى لحظة t يكون :-

$$5^2 + x^2 = z^2$$

وبالتفاضل بالنسبة للزمن

$$\therefore 0 + 2x \frac{dx}{dt} = 2z \frac{dz}{dt} \quad \dots\dots\dots (1)$$

وعندما تكون $z = 13 \text{ mt}$ فإن x :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(13)^2 - (5)^2} \\ &= \sqrt{169 - 25} = 12 \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

وبالتعويض عن قيمة $z = 13$ ، x من المعادلة (٢) تساوى 12 فى المعادلة (١)

$$\therefore 2 \times 12 \frac{dx}{dt} = 2 \times 13 \times 2$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{52}{24} = 2.17 \text{ m/sec}$$

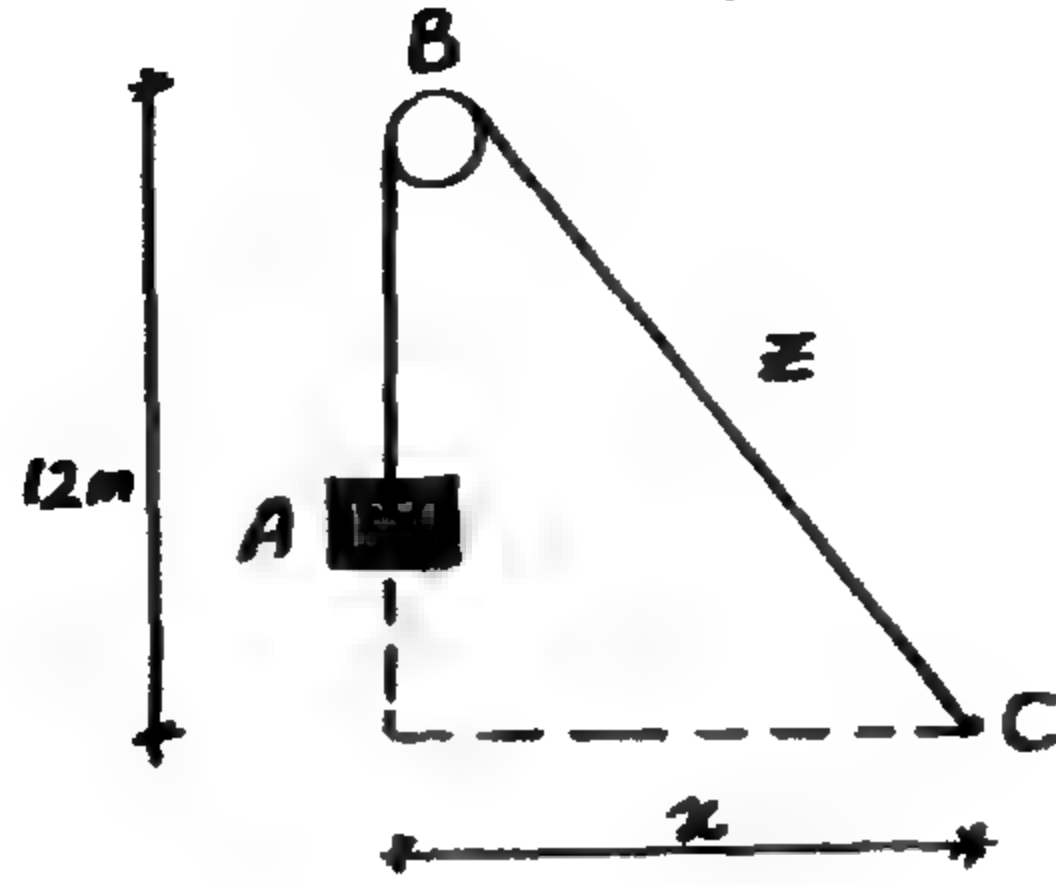
أى أن القارب يقترب من قاعدة الرصيف بمعدل 2.17 m/sec

(١٤) يقوم رجل برفع وعاء من الأسمنت إلى أحد البنايات على ارتفاع 12 m من مستوى يده بواسطة حبل يمر على بكرة فوق سقف البناية .

فإذا كانت يده على ارتفاع ثابت من مستوى الأرض وكان يتحرك بعيداً عن الوعاء بمعدل 1.5 m/sec ، فما هى سرعة ارتفاع وعاء الأسمنت عندما يكون على بعد 8 m من الوعاء .

الحل :-

أنظر الرسم شكل (٩-١٠) .



شكل (٩-١٠)

الوعاء عند A

مستوى يد الرجل عند C

سقف البناية عند B ومركب عندها بكرة وعلى ارتفاع 12 m

والحبل ABC يمر فوق البكرة B

والمطلوب حساب $\frac{dz}{dt}$ (وهي تعادل تماماً سرعة ارتفاع وعاء الأسمنت)

وذلك عندما $\frac{dx}{dt} = 1.5$ ، $x = 8m$

ومن المثلث القائم الزاوية في A (BAC) :-

$$x^2 + (12)^2 = z^2$$

$$\therefore z^2 = x^2 + 144$$

$$\therefore z = \sqrt{x^2 + 144} = (x^2 + 144)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} (x^2 + 144)^{-\frac{1}{2}} \times 2x \times \frac{dx}{dt}$$

وبوضع $\frac{dx}{dt} = 1.5$ ، $x = 8$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} (64 + 144)^{-\frac{1}{2}} \times 2 \times 8 \times 1.5$$

$$= 12(208)^{-\frac{1}{2}} = \frac{12}{\sqrt{208}} = \frac{12}{14.422} = 0.832 \text{ m/sec}$$

وذلك عندما يكون الرجل على بعد 8 أمتار من وعاء الأسمنت .

(١٥) بالون كروي يتم نفخه بحيث يزداد نصف قطره بمعدل 5 cm/sec فاوجد معدل الزيادة في مساحة سطح وحجم البالون عندما يصبح نصف قطر البالون 20 cm .

الحل :-

$$S = \text{مساحة سطح الكرة} = 4\pi r^2$$

$$V = \text{حجم الكرة} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

والمطلوب هو حساب $\frac{ds}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ عندما تكون $r = 20$

وحيث أنه معلوم لدينا $\frac{dr}{dt} = 5 \text{ cm/sec}$ فإنه يمكن الحصول على المطلوب

بإجراء التفاضل بالنسبة للزمن ووضع $\frac{dr}{dt} = 5$, $r = 20$

$$\therefore S = 4\pi r^2$$

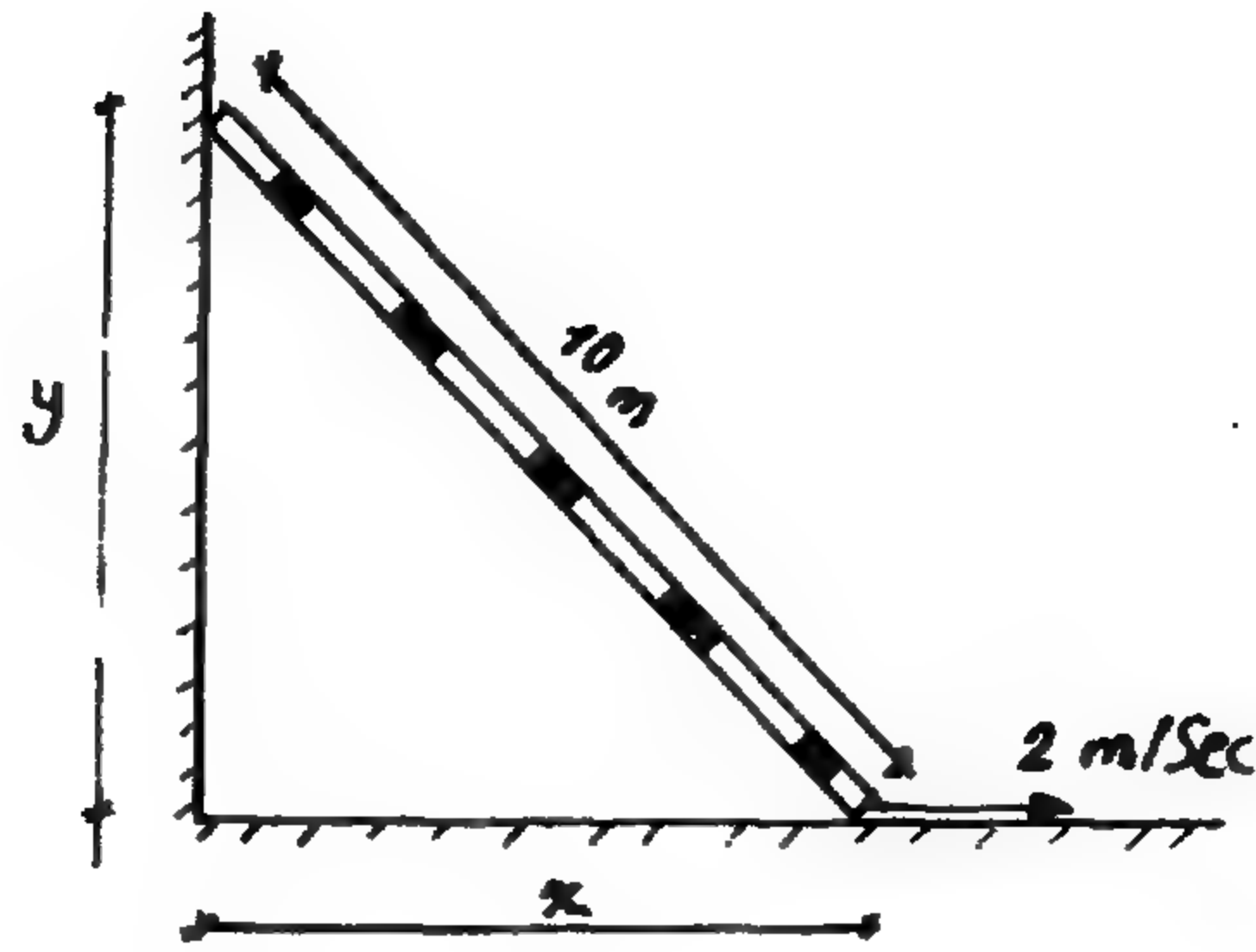
$$\therefore \frac{ds}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} = 8\pi \cdot (20) (5) = 800\pi \text{ cm}^2/\text{sec}$$

$$\therefore V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi (400) (5) = 8000\pi \text{ cm}^3/\text{sec}$$

(١٦) يستند سلم على حائط رأسى ، طول السلم = 10 m ، فإذا تحركت نهاية السلم على الأرض بعيداً عن الحائط بمعدل 2 m/sec ، فاحسب السرعة التى تنزلق بها قمة السلم على الحائط الرأسى عندما تكون قاعدة السلم على بعد 6 m من الحائط

الحل : - انظر الرسم شكل (٩ - ١١) .



شكل (٩ - ١١)

بالرجوع للشكل :

$$x^2 + y^2 = 100$$

ويجاء التفاضل بالنسبة للزمن t

$$\therefore 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$$

وعندما تكون $x = 6 \text{ m}$:

$$\therefore y = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ m} .$$

وحيث أن $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/sec}$:

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = -\frac{6}{8} \times 2 = -1.5 \text{ m/sec} .$$

وتعني الإشارة السالبة أن قمة السلم تهبط لأسفل .

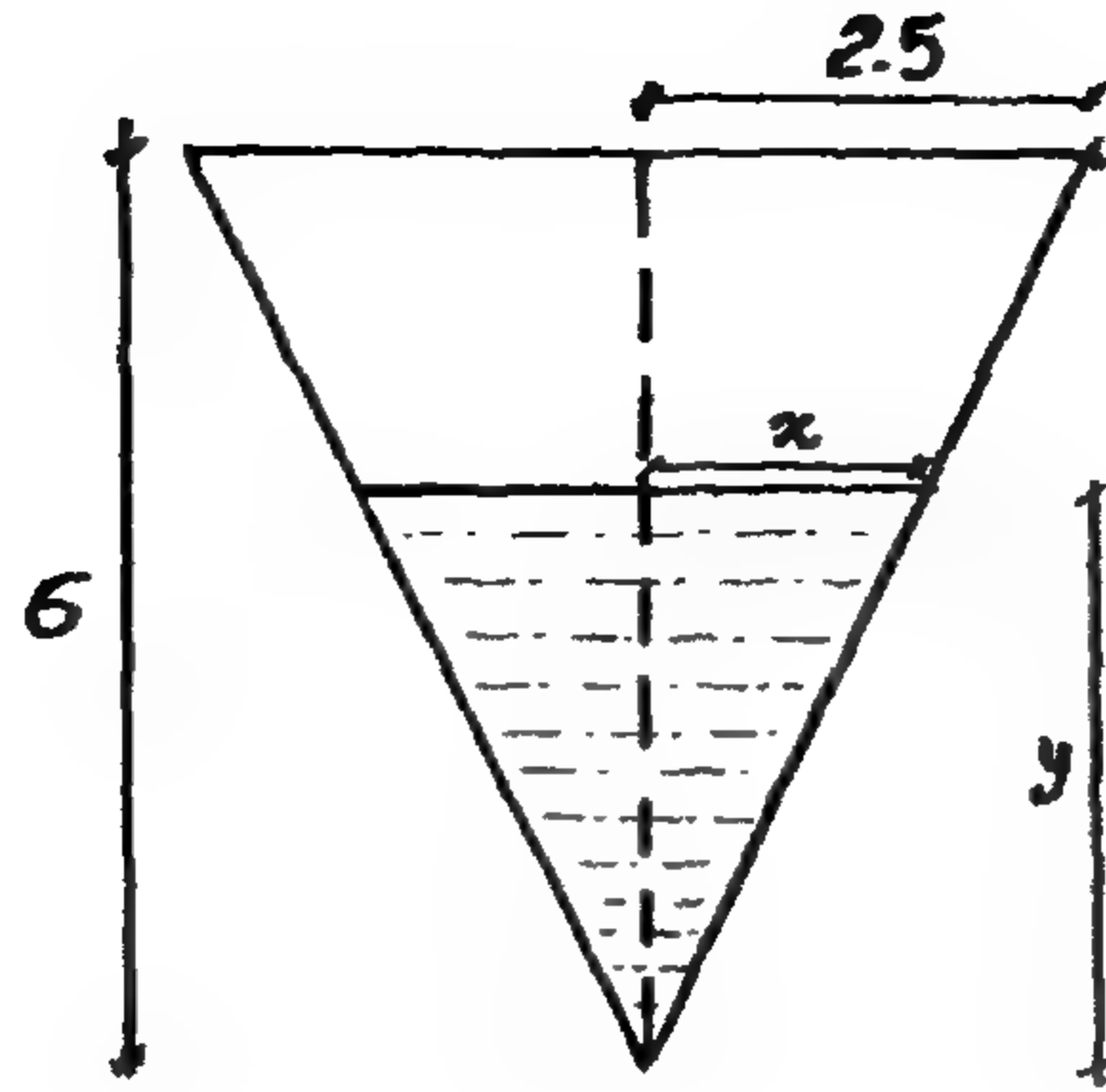
(١٧) : - يوضح شكل (٩ - ١٢) مقطع طولى ماراً بمحور خزان مخروطي

الشكل ارتفاعه الكلى $= 6 \text{ m}$ ونصف قطر القاعدة العلوية $= 2.5 \text{ m}$ وينساب

الماء للخزان بمعدل 150 lit/m .

فاحسب معدل ارتفاع سطح الماء في الخزان عندما يكون ارتفاع الماء به 1.5 m

الحل : -



شكل (٩ - ١٢)

y = نعتبر عمق الماء في الخزان (ارتفاع الماء)

x = نعتبر نصف قطر سطح الماء ،

V = نعتبر حجم الماء في الخزان بعد فترة زمنية t

ومن تشابه المثلثات بالشكل .

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{2.5}{6}$$

$$\therefore x = \frac{2.5}{6}y$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2.5}{6}y\right)^2 y = \frac{2.5\pi}{108}y^3 \cdot m^3$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة للزمن t ووضع $\frac{dV}{dt} = 0.15 m^3 / min$

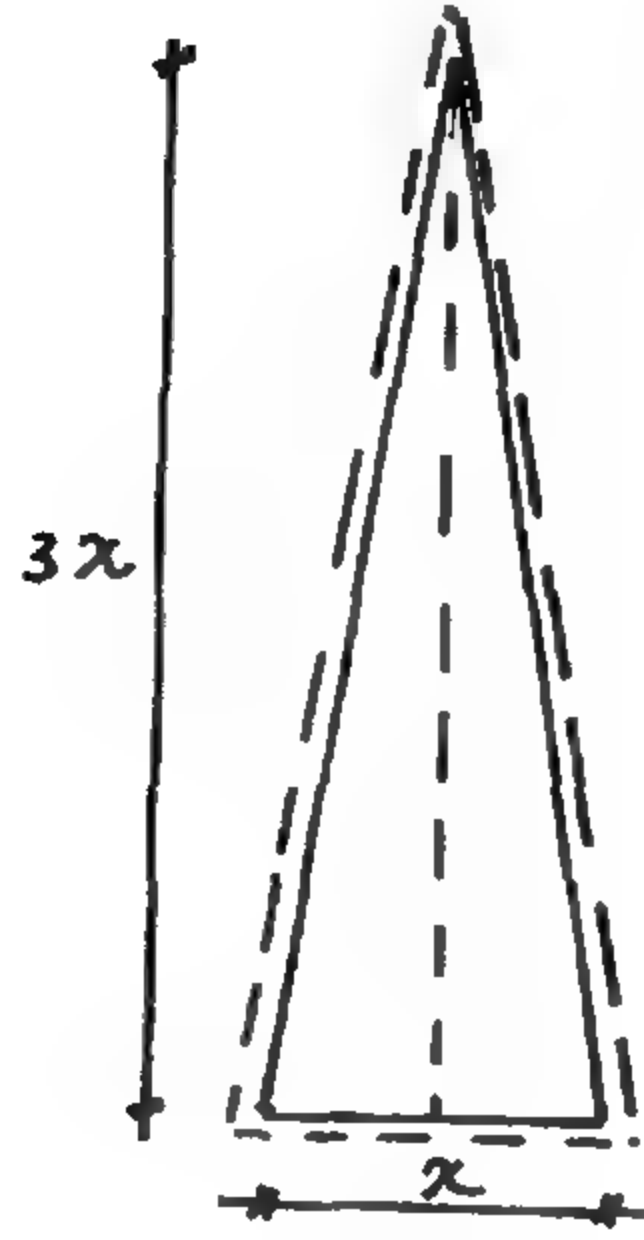
$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{7.5\pi}{108}y^2 \frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{0.15 \times 108}{7.5\pi y^2}$$

وعندما تكون $y = 1.5 m$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{0.15 \times 108}{7.5 \times \pi \times (1.5)^2} = \frac{16.2}{23.56 \times 2.25} = 0.305 m / min$$

أى أن الماء يرتفع بمعدل 30.5 cm لكل دقيقة تحت نفس الظروف بالمسألة ..
 (١٨) صفيحة معدنية على شكل مثلث متساوى الساقين ، وارتفاع المثلث يساوى
 ثلاثة أضعاف طول القاعدة فإذا كانت الصفيحة تتمدد بتأثير حرارة التسخين مما
 يؤدي لزيادة طول القاعدة بمعدل يبلغ 0.05 cm / sec .
 فاوجد معدل التغير في مساحة الصفيحة عندما يكون طول القاعدة 16 cm
 وكذلك معدل التغير في طول كل من ساقى الصفيحة المثلثة .
 الحل : - انظر الرسم شكل (٩ - ١٣) .



شكل (٩ - ١٣)

نعتبر طول قاعدة الصفيحة $x \text{ cm}$

وأن ارتفاعها $3x \text{ cm}$ =

وأن مساحتها A :- $A = \frac{x}{2} \cdot 3x \text{ cm}^2$

وأن طول ضلعها : $y \text{ cm}$ -

$$\frac{dx}{dt} = 0.05 \text{ cm / sec}.$$

والمطلوب أولا هو إيجاد $\frac{dA}{dt}$ عندما تكون $x = 16 \text{ cm}$

$$\therefore A = \frac{x}{2} \cdot 3x = \frac{3}{2} x^2$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = 3x \frac{dx}{dt} = 3 \times \frac{16}{2} \times 0.05 = 1.2 \text{ cm}^2 / \text{sec}.$$

ولإيجاد المطلوب ثانياً وهو : $\frac{dy}{dt}$ ، من هندسة الشكل

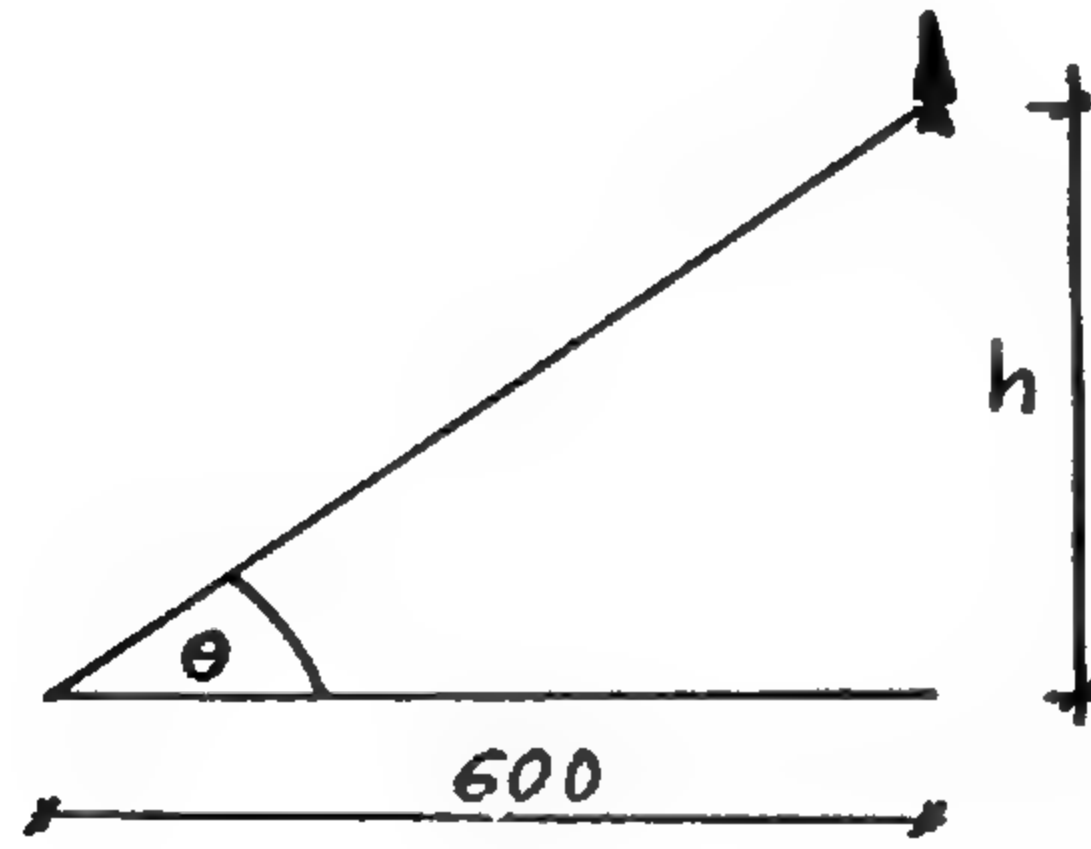
$$y^2 = (3x)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 9.25 x^2$$

$$\therefore y = x\sqrt{9.25}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \sqrt{9.25} \frac{dx}{dt} = \sqrt{9.25} \times 0.05 = 0.152 \text{ cm} / \text{sec}.$$

(١٩) ينطلق صاروخ رأسياً لأعلى من فوق منصة إطلاق تبعد 600 ft عن نقطة مراقبة . فإذا كانت زاوية الارتفاع للصاروخ من نقطة الملاحظة تتغير بمعدل 0.5 rad./sec. ، فما هي سرعة الصاروخ الرأسية في اللحظة التي تكون فيها زاوية الارتفاع 45°

الحل :- انظر الرسم شكل (٩-١٤) .



شكل (٩-١٤)

نعتبر أن ارتفاع الصاروخ بعد فترة زمنية قدرها t هو h وأن زاوية الارتفاع حينئذ

هي θ .

ومن الشكل :-

$$\therefore \frac{h}{600} = \tan \theta \text{ or } h = 600 \tan \theta$$

وبالتفاضل بالنسبة للزمن t :-

$$\therefore \frac{dh}{dt} = 600 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}, \left[\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x \right]$$

وذلك عند أى لحظة t حيث $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = 0.5 \text{ rad./sec}$$

∴ سرعة الصاروخ :-

$$\frac{dh}{dt} = 600 \sec^2 \theta \times \frac{1}{2} = 300 \sec^2 \theta$$

وفى اللحظة التى تكون فيها $\theta = \frac{\pi}{4}$ فإن سرعة الصاروخ $\frac{dh}{dt}$:-

$$\frac{dh}{dt} = 300(\sqrt{2})^2 = 600 \text{ ft/sec.} \left[\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} = \frac{1}{\cos \pi/4} = \sqrt{2} \right]$$

ويمكن حل هذه المسألة بمعرفة تفاضل الدوال المثلثية العكسية

حيث أن θ هى الزاوية التى ظلها $\frac{h}{600}$

$$\therefore \theta = \arctan \frac{h}{600} = \tan^{-1} \frac{h}{600}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dh} = \frac{1}{600} \left[\frac{1}{1 + \frac{h^2}{(600)^2}} \right], \left[\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \right]$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{600 + \frac{h^2}{(600)}} \times \frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \frac{dh}{dt} = \left[600 + \frac{h^2}{(600)} \right] \frac{d\theta}{dt}$$

وعندما $h = 600$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \left[\frac{dh}{dt} \right]_{\theta = \frac{\pi}{4}} = \left[600 + \frac{(600)^2}{(600)} \right] \times \frac{1}{2} = 600 \text{ ft/sec.}$$

(٢٠) إذا كانت تكلفة بيع x "من سلعة ما" تعطى بالعلاقة :-

$$c = 500 + x + \frac{1}{x}$$

وعند بيع السلعة رقم 50 ، لوحظ أن معدل البيع هو 20 سلعة في الساعة . فما هو معدل تغير تكلفة البيع عند هذه اللحظة .

الحل :- معدل المبيعات هو التغير في عدد السلع (x) بالنسبة للزمن

$$\text{أى :- } \frac{dx}{dt} \text{ لدينا } \frac{dx}{dt} = 20$$

والمطلوب هو إيجاد معدل تغير التكلفة مع الوقت أى $\frac{dc}{dt}$ فى اللحظة التى يكون فيها

$$x = 50$$

$$, \therefore c = 500 + x + \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{dc}{dt} = \frac{d}{dt}(500) + \frac{d}{dt}(x) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 0 + \frac{dx}{dt} + \left(\frac{-1}{x^2}\right) \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt} - \frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\text{وبوضع } x = 50, \quad \frac{dx}{dt} = 20$$

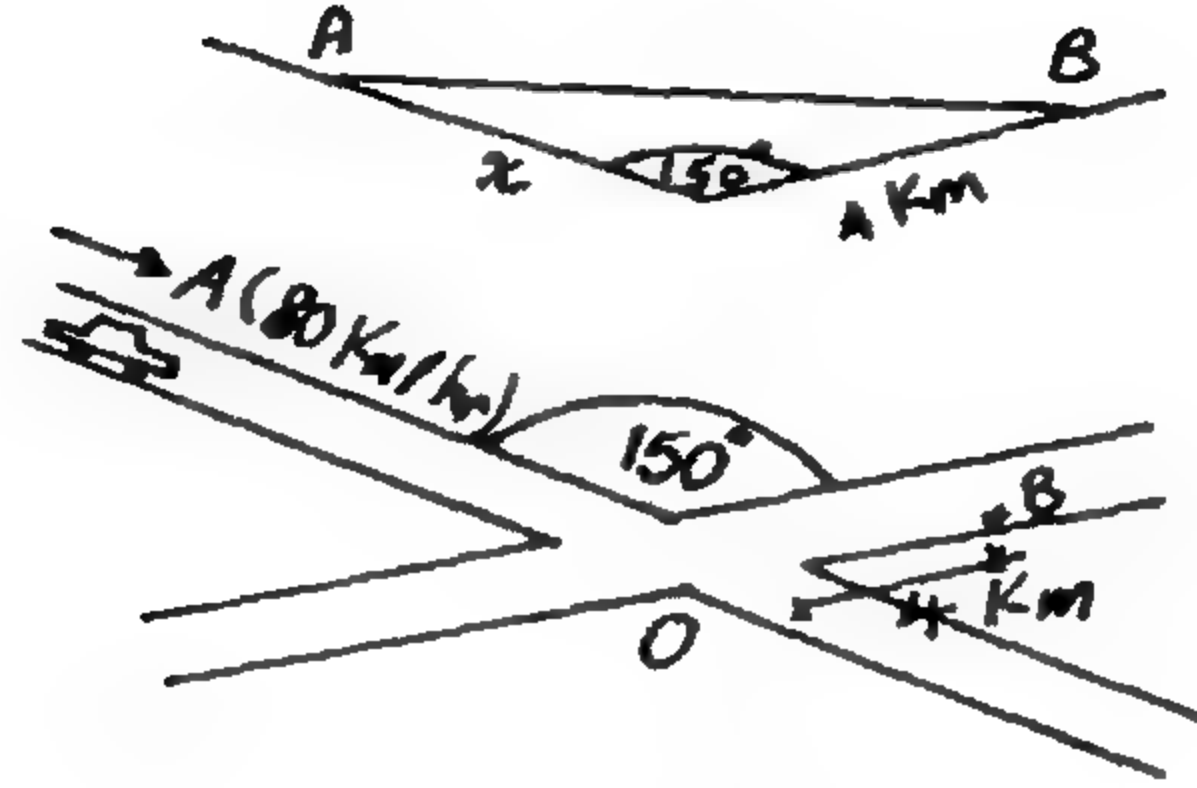
$$\therefore \frac{dc}{dt} = 20 \left(1 - \frac{1}{(50)^2}\right) = 20(1 - 0.0004)$$

$$= 20 \times 0.9996 = 19.992 \text{ وحدة نقدية .}$$

(٢١) طريقان يتلاقيان فى رأس زاوية قياسها 150° ، تسير سيارة على أحد

الطريقين بسرعة قدرها 80 km/h فى اتجاه نقطة التقاطع O ، أوجد معدل اقتراب

السيارة A من النقطة B على الطريق الآخر والتي تبعد عن O بمقدار 4 km ، وذلك في اللحظة التي تكون فيها السيارة على بعد يعادل 3 km من O .
الحل :- انظر الرسم شكل (٩-١٥) .



شكل (٩-١٥)

نفترض أن بعد السيارة A عن O = x km

، نفترض أن بعد السيارة A عن B = y km

، لدينا : $\frac{dx}{dt} = 80 \text{ km/h}$

ومن المثلث المنفرج الزاوية AOB في O :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 - 2AO \cdot BO \cos 150^\circ$$

$$\therefore y^2 = x^2 + 16 - 2 \times x \times 4 \times (-0.866)$$

$$= 16 + x^2 + 6.928 x$$

$$= x^2 + 6.928 x + 16$$

$$\therefore 2y \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 6.928 \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt} (2x + 6.928)$$

(١)

والمسافة y عندما تكون x = 3

$$y^2 = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times (-0.866)$$

$$= 25 + 20.784 = 45.784$$

$$\therefore y = 6.766 \text{ km}$$

وبالتعويض فى المعادلة (١)

$$\therefore 2 \times 6.766 \times \frac{dy}{dt} = 80 (2 \times 3 + 6.928) = 12.928 \times 80$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 76.43 \text{ km/hr}$$

وهو معدل اقتراب السيارة A من النقطة B عند اللحظة المذكورة .

(٢٢) اسطوانة دائرية قائمة يبلغ ارتفاعها $\frac{12}{5}$ من نصف قطر قاعدتها . احسب

معدل تغير الحجم عندما يكون القطر $[20 \text{ cm}]$ ، إذا علم أن الارتفاع يتغير

بمعدل 0.02 cm/sec .

الحل :- نفرض أن نصف قطر قاعدة الاسطوانة $r \text{ cm}$

، نفرض أن ارتفاع الاسطوانة $h \text{ cm}$

، نفرض أن حجم الاسطوانة $V \text{ cm}^3$

، \therefore ارتفاع الاسطوانة يعادل $\frac{12}{5}$ مرة نصف قطر القاعدة .

$$\therefore h = \frac{12}{5} r \quad \frac{dh}{dt} = 0.02 \text{ cm/sec}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{12}{5} \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore 0.02 = \frac{12}{5} \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{0.1}{12} = \frac{1}{120} \text{ cm/sec.}$$

$$\therefore V = \pi r^2 h \quad , \quad h = \frac{12}{5} r$$

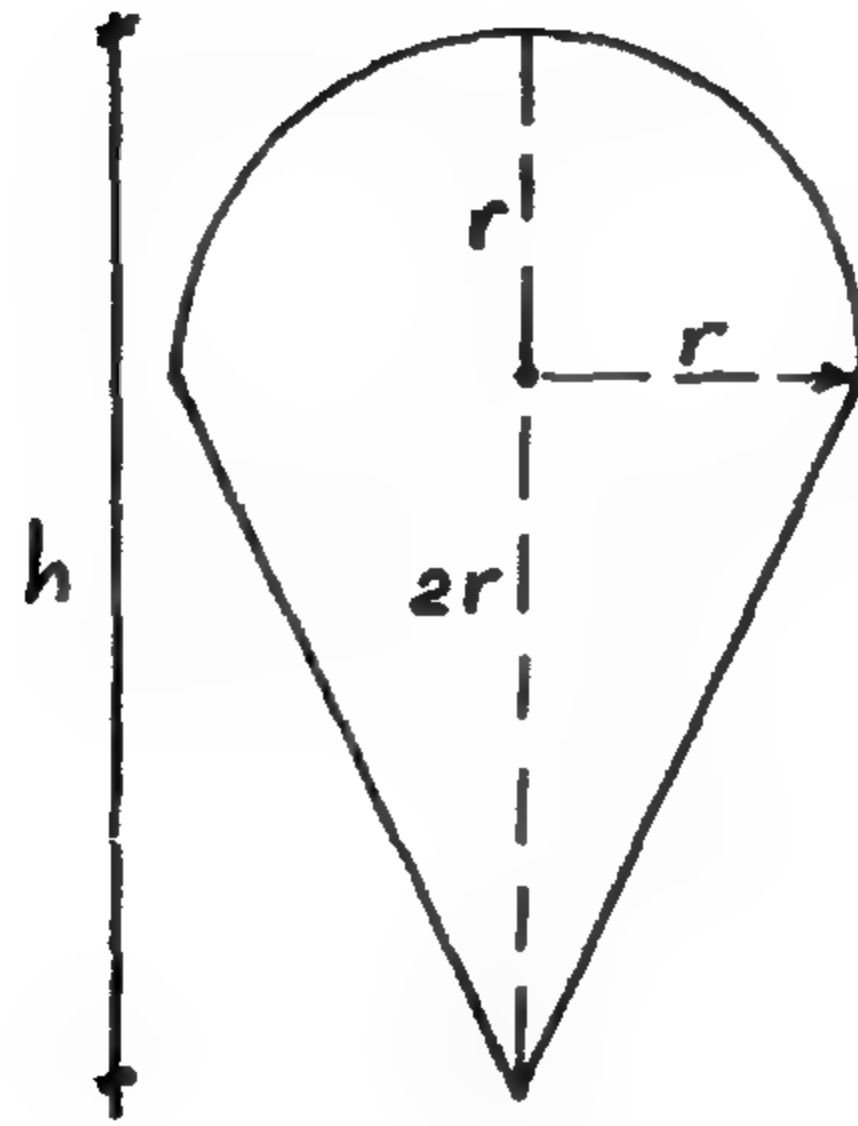
$$\therefore V = \pi r^2 \times \frac{12}{5} r = \frac{12}{5} \pi r^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{12}{5} \pi \times 3r^2 \frac{dr}{dt} = 7.2 \pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

وبالتعويض عن $r = 20$ ، $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{120}$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 7.2\pi \times 400 \times \frac{1}{120} = 75.4 \text{ cm}^3 / \text{sec}.$$

(٢٣) بالون على شكل مخروط دائري قائم تعلوه نصف كرة كما هو موضح بالشكل (٩-١٦) .



شكل (٩-١٦)

فإذا كان قطر القاعدة يعادل ارتفاع المخروط ، احسب معدل تغير الحجم بالنسبة للارتفاع عند نفخ البالون :-

الحل :- واضح من الشكل أن $h = 3r$

والمطلوب هو إيجاد $\frac{dV}{dh}$

وعلى ذلك فإنه يلزم أن نوجد علاقة بين V ، h

$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times 2r$$

$$\text{حجم نصف الكرة} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$, r = \frac{h}{3}$$

$$\frac{2}{3} \pi r^3 + \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

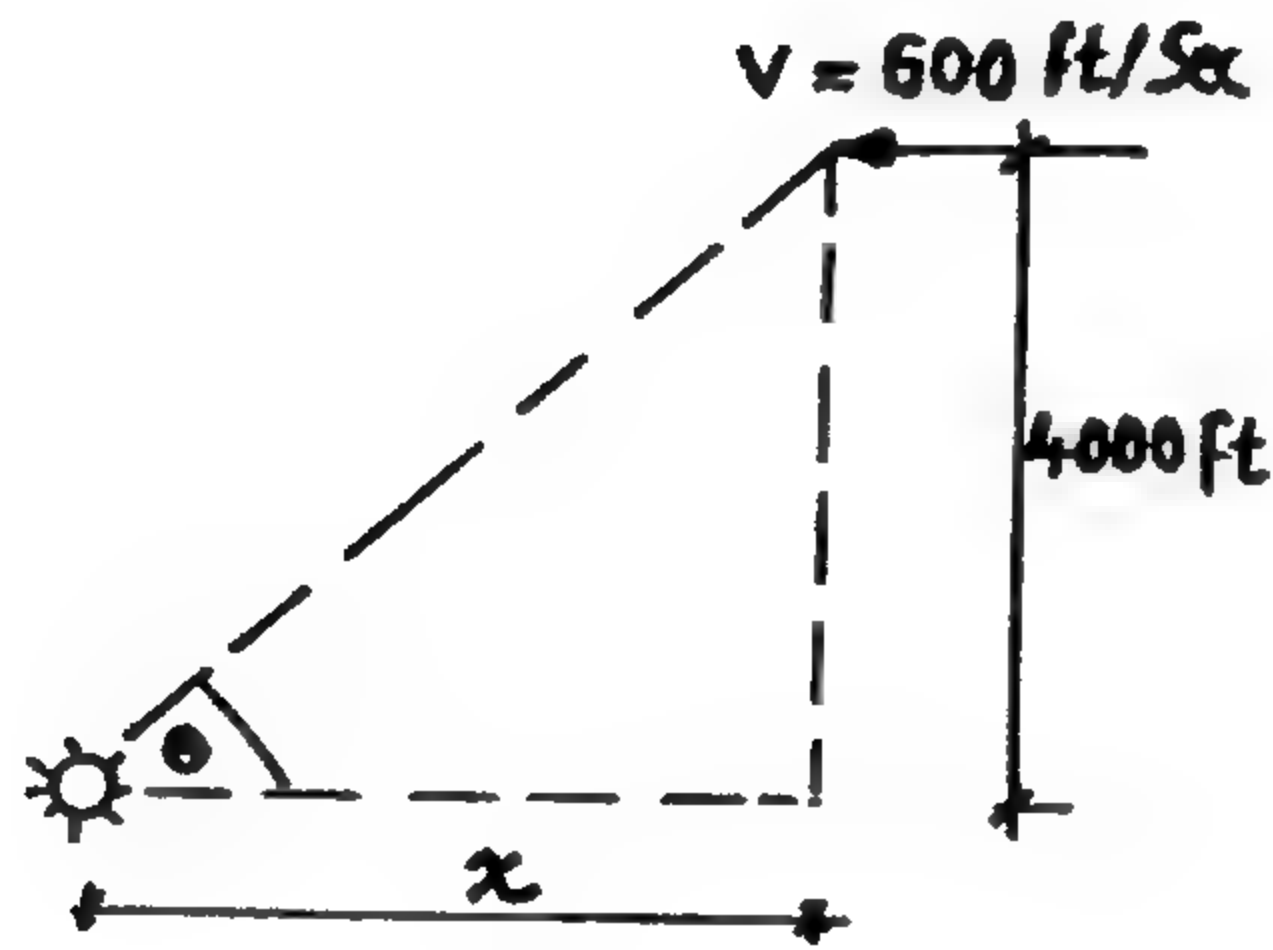
والحجم الكلى $V =$:-

$$\therefore V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{h}{3} \right)^3 = \frac{4 \pi}{81} h^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dh} = \frac{4 \pi}{27} h^2$$

وبذلك فإن V تتغير بمقدار $\frac{4 \pi h^2}{27}$ مرة من h

(٢٤) طائرة على ارتفاع 4000 ft فى اتجاه الغرب بسرعة تعادل 500 ft/sec فإذا كانت الطائرة يتم تعقبها بضوء كشاف قوى على الأرض وبفرض ثبات الضوء على الطائرة أثناء تحركها ، أوجد معدل التغير فى زاوية ضوء الكشاف عندما تكون الطائرة على بعد أفقى من مصدر الضوء وفى اتجاه الشرق منه بمقدار 2000 ft .
الحل :- انظر الرسم شكل (٩-١٧) .



شكل (٩-١٧)

نعتبر المسافة الأفقية بين الكشاف والطائرة عند لحظة زمنية قدرها $t \text{ sec}$ من البداية $x =$ ، نعتبر θ بالتقدير الدائرى هى زاوية ارتفاع الطائرة بالنسبة للكشاف عند اللحظة t .
ولدينا $\frac{dx}{dt} = -500$ وتعنى الإشارة السالبة أن x تتناقص مع الزمن والمطلوب هو إيجاد

$$\frac{d\theta}{dt} \text{ عندما } x = 2000$$

$$\tan \theta = \frac{4000}{x} \quad (١) \dots\dots\dots$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة إلى t فى طرفى المعادلة (١)

$$\therefore \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{4000}{x^2} \frac{dx}{dt} \quad \dots\dots\dots (٢)$$

$$[\frac{d}{d\theta} \tan \theta = \sec^2 \theta \quad -: \text{ملحوظة}]$$

وبوضع $\frac{dx}{dt} = -500$ وبالقسمة على $\sec^2 \theta$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2000000}{x^2 \sec^2 \theta}$$

$$[\tan \theta = \frac{4000}{2000} = 2 \quad \text{فإن}] \quad x = 2000$$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة (٢)

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2000000}{4000000 \sec^2 \theta}$$

$$\therefore \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + (2)^2 = 5$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2000000}{4000000 \times 5} = \frac{1}{10}$$

وعليه فإن في اللحظة المذكورة فإن زاوية الشعاع تزيد بمعدل $\frac{1}{10} \text{ rad./sec.}$

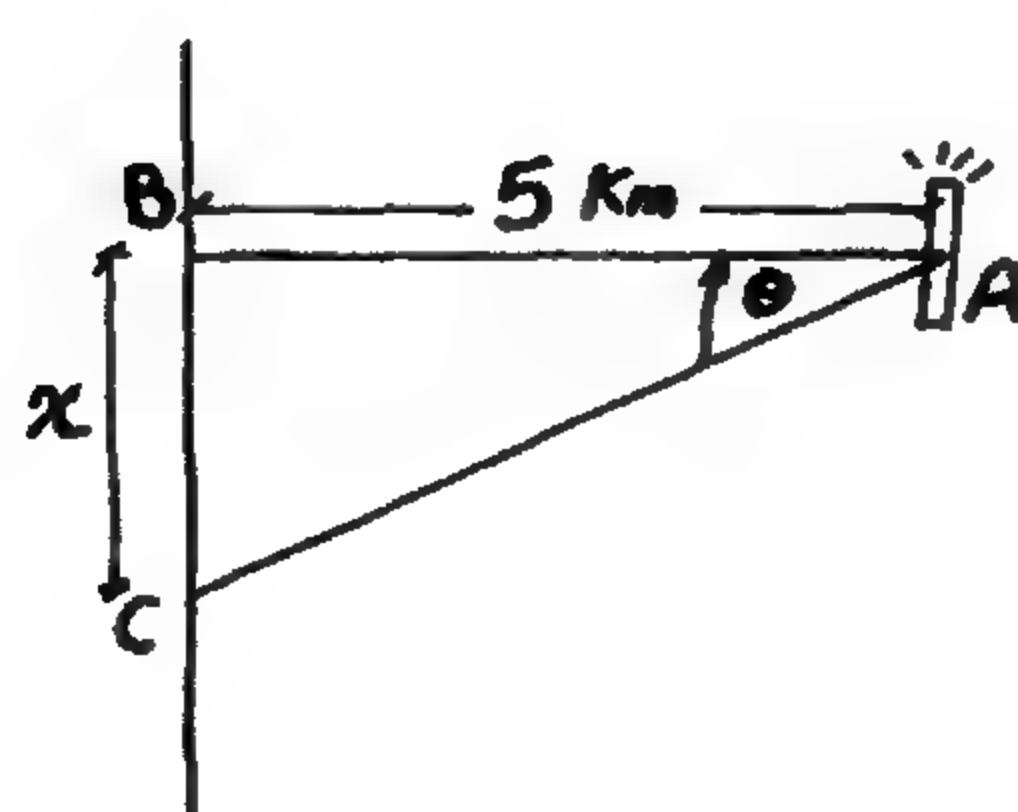
(٢٥) شعاع كشاف يدور على بعد 5 km من شاطئ فإذا كان الكشاف يدور

بسرعة زاوية ثابتة ، فما مقدار السرعة التي يدور بها شعاع الضوء ، إذا كانت

حزمة الضوء على الشاطئ تتحرك على امتداده بمعدل 15 km/min. ، عندما تكون

الزاوية التي يصنعها الشعاع 60° مع الشاطئ .

الحل :- انظر الرسم شكل (٩-١٨) .



شكل (٩-١٨)

من الشكل نجد أن :-

$$\tan \theta = \frac{x}{5}$$

$$\therefore x = 5 \tan \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة للزمن لطرفي المعادلة (1)

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 5 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 15 \text{ km / min.}$$

وعندما تكون زاوية $ACB = 60^\circ$ فإن $\theta = 30^\circ$

وبالتعويض بهذه القيم

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 15 = 5 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

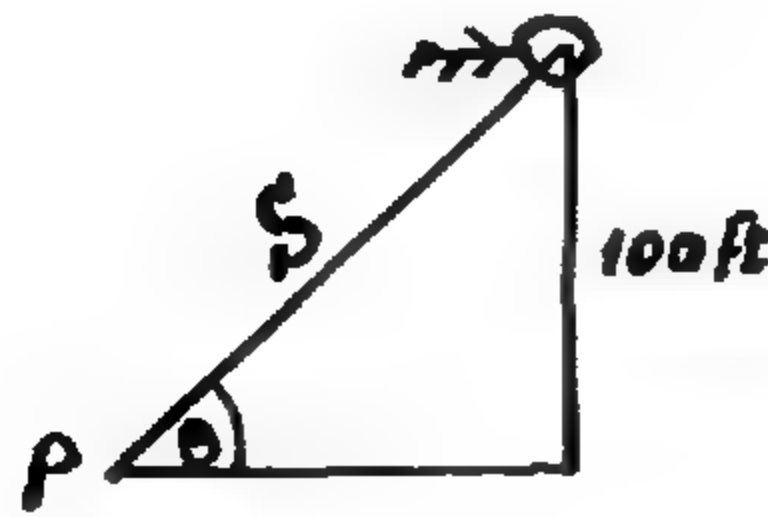
$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{\sec^2 \theta} = 3 \cos^2 \theta = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{9}{4} \text{ radians / min.} \quad , \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{معدل دوران ضوء الكشاف} = \frac{9}{4} \text{ rad./min.}$$

(٢٦) يلعب غلام بطائرة ورقية ، ترتفع بمقدار 100 ft عن الأرض فإذا كان الحيط يُسحب من يده بمعدل 10 ft / sec نتيجة دفع الريح للطائرة أفقياً على نفس الارتفاع . فما هو معدل تغير زاوية الارتفاع للطائرة عندما تكون الزاوية 30° .

الحل :- انظر الرسم شكل (٩-١٩) .



شكل (٩-١٩)

نعتبر θ هي زاوية ارتفاع الطائرة .

$$\frac{ds}{dt} = 10 \text{ ft/sec.}$$

$$\sin \theta = \frac{100}{s}$$

والمطلوب إيجاد $\frac{d\theta}{dt}$ عندما تكون $\theta = 30^\circ$ أى تساوى $-\frac{\pi}{6} \text{ rad}$

$$\therefore \sin \theta = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{100}{s} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore s = 200 \text{ ft}$$

$$\sin \theta = \frac{100}{s} \quad (1) \dots\dots\dots$$

وباجراء التفاضل بالنسبة للزمن للمعادلة الأخيرة (1)

$$\therefore \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{100}{s^2} \frac{ds}{dt}$$

وبالتعويض عن قيمة $s = 200$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{ds}{dt} = 10$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{100}{200 \times 200} \times 10$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{20\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{60} \text{ rad./sec}$$

(٢٧) قارب مشدود بحبل مربوط على الرصيف بالميناء ، فإذا تم سحب القارب

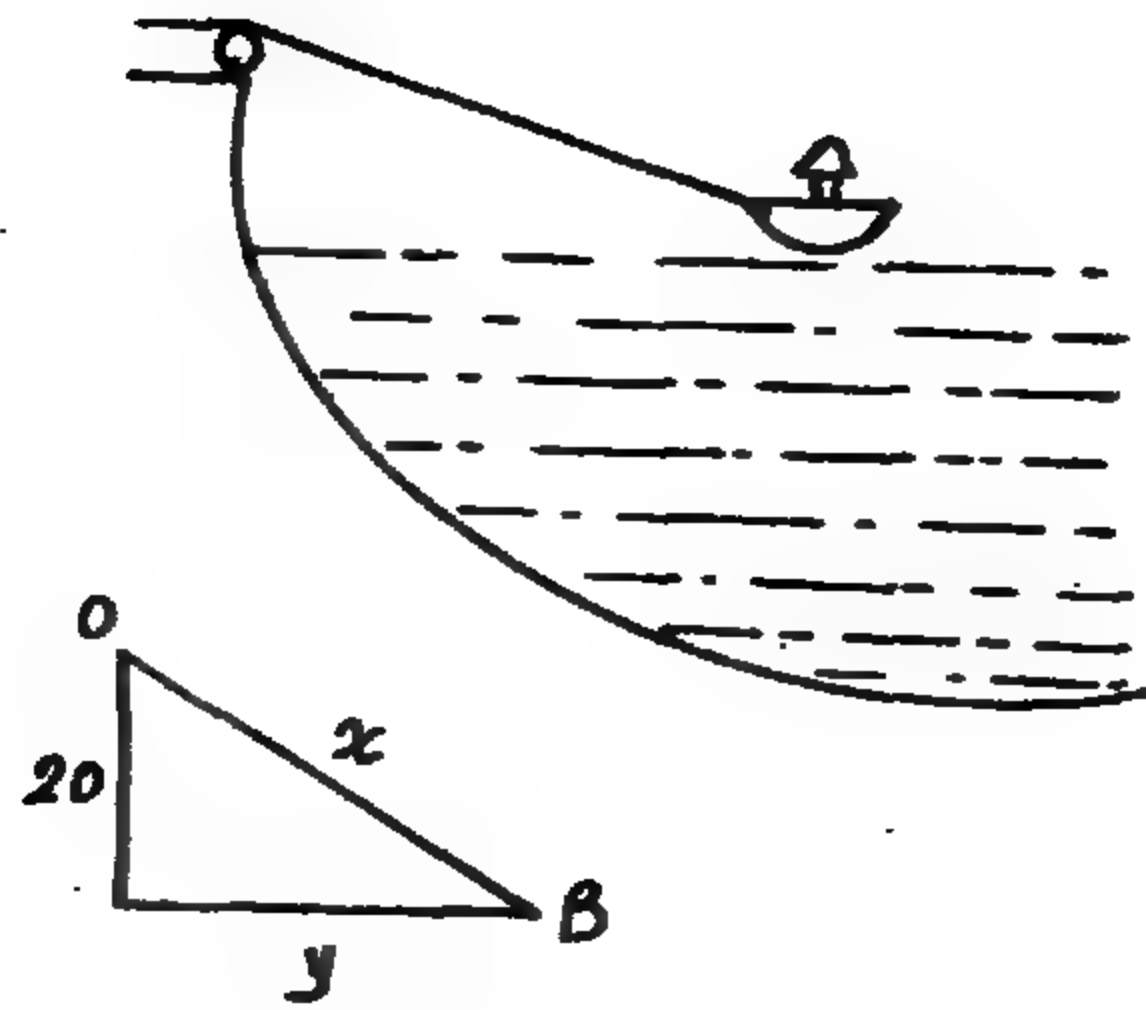
بسرعة تعادل 10 ft/sec وكان مستوى الرصيف يرتفع عن سطح الماء بمقدار

20 ft .

احسب السرعة التى يقترب بها القارب من الرصيف إذا كان طول الحبل وقتئذ

$= 36 \text{ ft}$.

الحل :- أنظر الرسم شكل (٩-٢٠) .



شكل (٢٠-٩)

OB هو طول الحبل x والقارب عند B

$$\frac{dx}{dt} = 10 \text{ ft/sec}$$

والمطلوب إيجاد $\frac{dy}{dt}$ عندما $x = 36$

$$20^2 + y^2 = x^2$$

ومن الشكل

$$\therefore y = \sqrt{x^2 - 400}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{+1 \times 2x}{2 \times \sqrt{x^2 - 400}} \times \frac{dx}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2 - 400}}$$

وبوضع $\frac{dx}{dt} = -10$ [علامة - تعنى اقتراب B من O والعكس عند بعدها] وكذلك

بوضع $x = 36$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{36 \times -10}{\sqrt{36^2 - 400}} = -\frac{360}{\sqrt{896}} = -\frac{8 \times 45}{8 \sqrt{14}} = -\frac{45}{\sqrt{14}}$$

أى أنه عندما يكون طول الحبل 36 ft وتحت نفس الظروف فإن القارب يقترب بمعدل

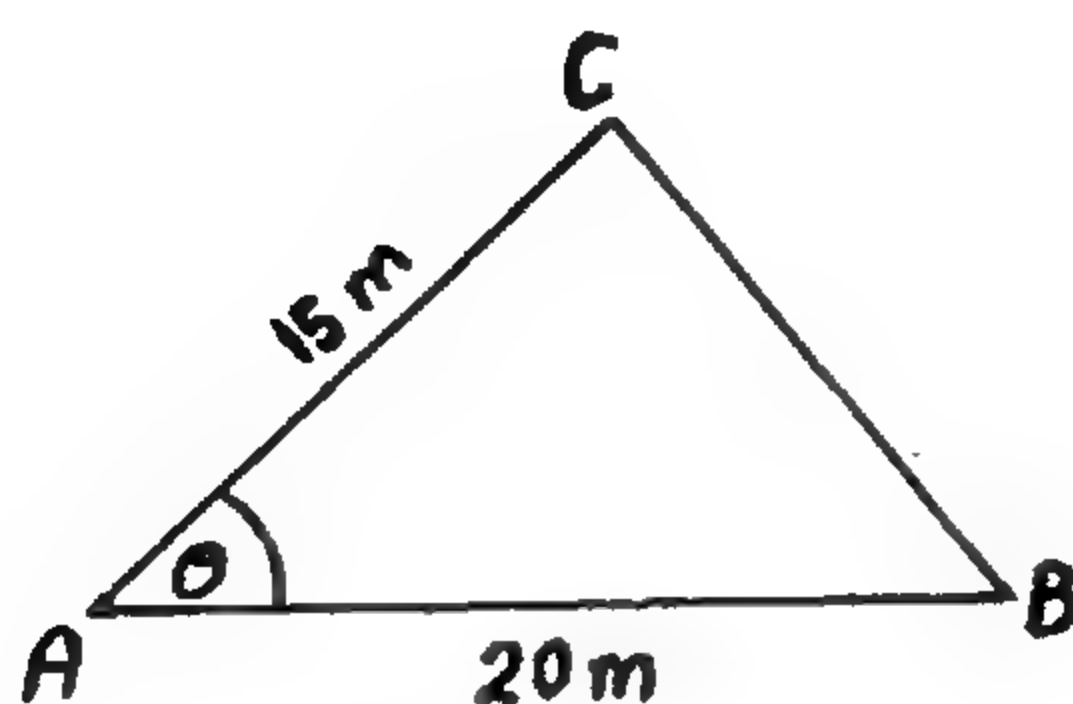
$\frac{45}{\sqrt{14}} \text{ ft/sec}$ من الرصيف (علامة - تعنى الاقتراب من الرصيف)

(٢٨) ضلعى مثلث يحصران بينهما زاوية قدرها θ وطولاهما 20 m , 15 m ينفرجان

للخارج بحيث تزداد الزاوية فيما بينهما ، احسب معدل الزيادة فى طول الضلع

الثالث ، فى اللحظة التى تكون فيها الزاوية بين الضلعين $\theta = 60^\circ$ علماً بأن الزاوية θ تزداد بمعدل يبلغ $2^\circ / \text{sec}$.

الحل :- أنظر الرسم شكل (٩-٢١) .



شكل (٩-٢١)

من الشكل ، الضلعان هما $AC = 15 \text{ m}$ ، $AB = 20 \text{ m}$ والزاوية بينهما θ

$$\frac{d\theta}{dt} = 2^\circ = \frac{1}{90} \cdot \pi$$

والمطلوب هو إيجاد معدل تغير طول الضلع BC أى $\frac{d}{dt}(BC)$ عندما تكون $\theta = 60^\circ$

$$\overline{BC}^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \times (15) \times (20) \cos \theta$$

$$\therefore \overline{BC} = 225 + 400 - 600 \cos \theta$$

$$\therefore BC = (625 - 600 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(BC) = \frac{1 \times (-600 \times -\sin \theta) \frac{d\theta}{dt}}{2 (625 - 600 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

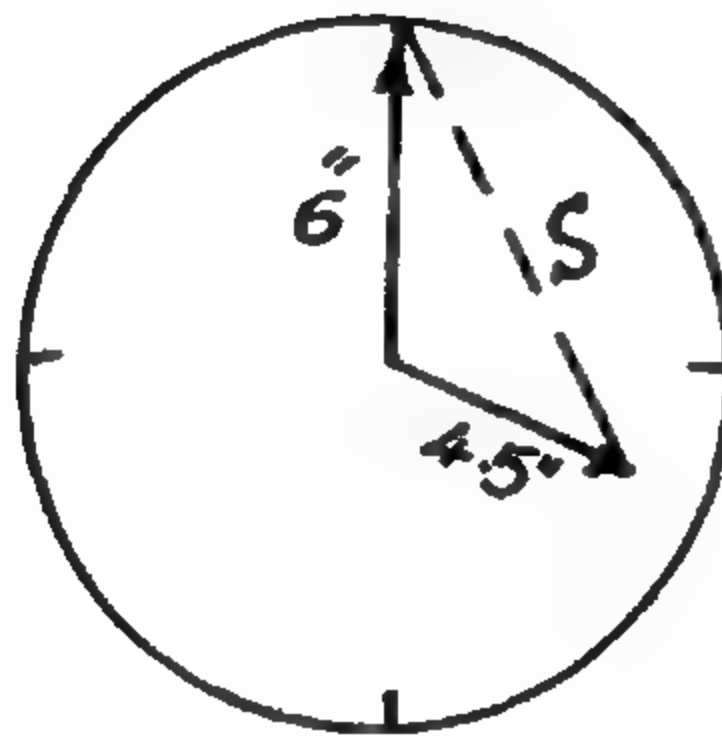
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{90} \quad , \quad \theta = 60^\circ \text{ وبوضع}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \overline{BC} = \frac{(600 \sin \theta) \left(\frac{\pi}{90} \right)}{2 \left(625 - 600 \times \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{600 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{90}}{2 \times (325)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{150 \sqrt{3} \times \pi}{90 \sqrt{325}} = \frac{5}{3} \sqrt{3} \pi \times \frac{1}{5 \sqrt{13}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3} \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3} \pi}{3 \sqrt{13}} \text{ m/sec.}$$

(٢٩) عقربى ساعة حائط طولاهما بالبوصات [4.5", 6"] فما مقدار السرعة التى يقترب بها نهاية عقرب الدقائق من نهاية عقرب الساعات عند تمام الساعة الرابعة .
الحل :- انظر الرسم شكل (٩-٢٢) .



شكل (٩-٢٢)

نفترض أن S هى المسافة بين عقربى الساعة ، θ هى الزاوية بينهما وباستخدام قانون جيب التمام

$$\therefore S^2 = (6)^2 + (4.5)^2 - 2(6)(4.5) \times \cos \theta$$

$$= 36 + 20.25 - 54 \cos \theta$$

$$\therefore 2S \frac{dS}{dt} = 0 - 54 \times \left(-\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right)$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = \frac{27 \sin \theta}{S} \frac{d\theta}{dt}$$

وعند الساعة الرابعة تكون الزاوية بين مؤشرى الساعة :

$$4 \left(\frac{360}{12} \right) = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore S^2 = 36 + 20.25 - 54 \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= 56.25 - 54 \times -0.5$$

$$= 56.25 + 27 = 83.25$$

وفى خلال ساعة كاملة يدور عقرب الدقائق دورة كاملة قدرها 2π بينما يتحرك عقرب الساعات فى ساعة واحدة ما مقداره $\frac{2\pi}{12}$ أى $\frac{\pi}{6} rad.$ وبالتالى فإنه يمكننا استنتاج أن θ تتناقص بمعدل يساوى $\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ أى $\frac{11\pi}{6} rad.$ كل ساعة .

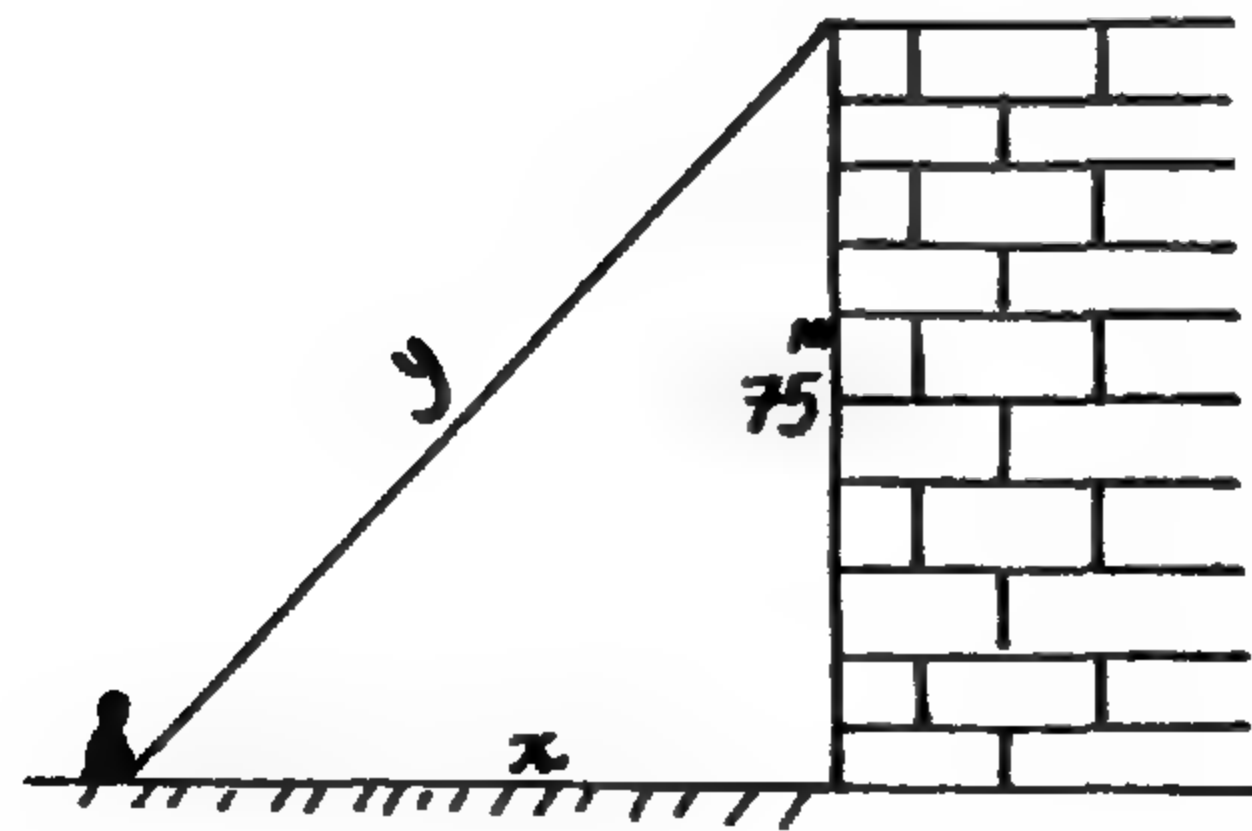
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{11}{6} \left[\frac{rad}{hr} \right] \times \frac{1}{60} \left[\frac{hr.}{min} \right] = -\frac{11\pi}{360} rad./min$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{ds}{dt} &= \frac{27 \sin \theta}{s} \left[\frac{d\theta}{dt} \right] \\ &= \frac{27 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{83.25}} \times \left[\frac{-11\pi}{360} \right] \\ &= \frac{27 \times 0.866}{9.124} \times -\frac{34.557}{360} \\ &\approx 0.246 inch/min \end{aligned}$$

(٣٠) يقترب رجل من بناية ارتفاعها $75m$ ، بسرعة تبلغ $3 km/hr$. فكم تبلغ

سرعة اقتراب الرجل من قمة البناية عندما يكون على بعد $100m$ منها .

الحل :- انظر الرسم شكل (٩-٢٣) .



شكل (٩-٢٣)

نعتبر x هي المسافة الأفقية التي تُبعد بين الرجل والبنية عند الزمن t بينما المسافة بين الرجل وقمة البنية y ؛

$$y^2 = x^2 + (75)^2$$

بالتفاضل بالنسبة للزمن :

$$\therefore 2y \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y} \frac{dx}{dt} \quad \dots\dots\dots (1)$$

وفي اللحظة التي تكون فيها $x = 100$

$$\therefore y = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{100^2 + 75^2} = \sqrt{16625} = 125 \text{ m}$$

وحيث أن $\frac{dx}{dt}$ تساوى -3 km/hr أى :

$$-\frac{3 \times 1000}{60} \text{ m/min} = -50 \text{ m/min}$$

وبالتعويض فى المعادلة (1)

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = -\frac{100}{125} \times 50 = -\frac{5000}{125} = -40 \text{ m/min}$$

والإشارة السالبة تعنى أن y تتناقص .

Exercise 9

على الأبواب السابع والثامن والتاسع

(١) ارسم المنحنى $y = x^2 - 2x$ ثم اوجد $\frac{dy}{dx}$ وحدد قيمتها عندما تكون قيم x :-

$(-1, 0, 2, 3)$ ، وتأكد من صحة هذا من الرسم وما هي قيمة x التي يكون عندها

نقطة تحول وهل هي عظمى أم صغرى وما هي إشارة $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(٢) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة : $y = (x+1)(x-2)^2$ وقيم x المناظرة .

(٣) ارسم منحنى الدالة $y = 3x - x^2$ ثم اوجد $\frac{dy}{dx}$ وحدد قيمتها عند قيم x

التالية: $(0, 1, 2, 3)$ وما هي قيمة x التي تنعدم عندها $\frac{dy}{dx}$ وما هي إشارة $\frac{d^2y}{dx^2}$

لنفس قيمة x ، وهل الدالة عظمى أم صغرى عند هذه القيمة .

(٤) اوجد القيم العظمى والصغرى لـ : $4x + \frac{1}{x}$.

(٥) اوجد القيم العظمى والصغرى للدوال التالية وحدد قيم x المناظرة : -

a) $x^3 - 12x$

b) $2 - 9x + 6x^2 - x^3$

c) $x^3 - 6x^2 + 12$

d) $2x^3 - 9x^2 + 12x$

e) $4x^3 + 9x^2 - 12x + 13$

(٦) اوجد نقط التحول للدوال التالية ، ثم حدد هل الدالة عظمى أم صغرى فى كل

حالة : -

a) $4x^2 - 2x$

b) $2x^2 + x - 1$

c) $x - 1.5x^2$

d) $x^2 + 4x + 2$

(٧) اوجد نقط النهاية العظمى والصغرى ونقط الانقلاب لكل من المنحنيات التالية :-

$$a) y = x^3 + 6x^2 - 15x + 20$$

$$b) y = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 18$$

$$c) y = 3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + 17$$

$$d) y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$$

$$e) y = 2x - x^2$$

$$f) y = 5 - x - x^2$$

(٨) كيف يمكنك تقسيم العدد 10 إلى عددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن؟

(٩) أوجد الإحداثي السيني لنقط النهاية العظمى والصغرى والانقلاب للمنحنى :

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$$

(١٠) أوجد قيمة x عند نقطة الانقلاب للمنحنى :

$$y = 3x^3 - 4x + 5$$

(١١) أوجد القيم العظمى والصغرى لمنحنى الدالة : -

$$y = x^3 - x$$

وأوجد كذلك ميل المنحنى عند نقطة الانقلاب

(١٢) أوجد العددين اللذان مجموعهما 12 وبحيث : -

(A) حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

(B) مجموع مربعيهما أقل ما يمكن .

(C) حاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن .

(D) حاصل ضرب أحدهما في مكعب الآخر أكبر ما يمكن .

(١٣) ما هو أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة ، نصف قطرها 12 cm

(١٤) وضعت اسطوانة دائرية قائمة في كرة نصف قطرها a فاحسب ارتفاعها إذا

أريد أن تكون مساحة سطحها الجانبي أقل ما يمكن .

(١٥) قطعة أرض عبارة عن مستطيل ونصف دائرة ينطبق قطرها على أحد الأضلاع

فإذا كانت المساحة الكلية ثابتة ومعلومة ، فابعد نسبة قطر نصف الدائرة إلى بقية أبعاد

المستطيل بحيث يكون طول السياج اللازم لإحاطتها أقل ما يمكن ، "بطريقة الدالة الضمنية" .

(١٦) قطعة أرض على شكل مستطيل ينقصه نصفى دائرتين منطبق قطر كل منهما على أحد الأجناب المتقابلة فى المستطيل ،

فأوجد نسبة قطر نصف الدائرة إلى بقية أبعاد المستطيل بحيث تكون المساحة ثابتة والمحيط أقل ما يمكن .

(استخدم تفاضل الدالة الضمنية)

(١٧) مثلث متساوى الساقين مرسوم حول دائرة نصف قطرها a فاحسب ارتفاع المثلث بحيث تكون المساحة أصغر ما يمكن .

(١٨) شبه منحرف قاعدته الصغرى وكل من ضلعيه الجانبيين 10 cm ، عين قاعدته الكبرى بحيث تكون مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن .

(١٩) رسم مستطيل مساحته أكبر ما يمكن داخل نصف دائرة ، نصف قطرها R ، احسب أبعاد المستطيل .

(٢٠) يراد تصنيع علبة اسطوانية مغلقة بحيث يكون حجمها 16π بوصه مكعبة ، فأوجد نصف قطرها وارتفاعها . بحيث تكون المساحة الكلية لسطحها أقل ما يمكن .

(٢١) تبعد سفينة بمقدار 40 km شمال سفينة أخرى فى تمام الساعة 12 ، فإذا كانت تتحرك إلى الجنوب بسرعة 15 km/h ، بينما تتحرك الأخرى بسرعة 10 km/h إلى الشرق فما هو معدل تغير المسافة بينهما عند الساعة الواحدة .

(٢٢) يتناقص طول ضلع مكعب بمعدل 0.6 cm/min ، احسب معدل تناقص مساحة سطح المكعب عندما يكون طوله 12 cm .

(٢٣) تتحرك طائرة ورقية أفقيا على ارتفاع 150 m فإذا كانت سرعة الطائيرة 10 m/sec ، فاحسب معدل ترك الخيط من يد الطفل الذى يلعب بها عندما تكون

الطائرة على بعد 250 m منه .

(٢٤) رسم فى نصف دائره شبه منحرف قاعدته هى قطر نصف الدائرة عين زاوية قاعدة شبه المنحرف بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

(٢٥) صفيحة معدنية مستطيلة الشكل ، أبعادها $24 \times 30 \text{ cm}$ ، قطعت من أركانها الأربعة بأربعة مربعات متساوية ثم ثنيت حوافها لأعلى لتشكيل صندوقاً بدون غطاء ، احسب طول ضلع المربع بحيث يصبح حجم الصندوق أكبر ما يمكن .

(٢٦) يُراد تصنيع خزان مغلق اسطوانى سعته 40 m^3 بحيث يتكلف أقل كمية ممكنة من المواد فما هى نسبة ارتفاعه إلى قطر القاعدة .

(٢٧) ما هو العدد الذى إذا أضيف إلى مقلوبه يعطى أقل مجموع ؟

(٢٨) مستطيل محيطه ثابت فاوجد أبعاده بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

(٢٩) صهرىج اسطوانى الشكل مفتوح من الأعلى ، له حجم معلوم فاوجد العلاقة بين نصف قطره وارتفاعه بحيث يكون مجموع مساحته الجانبية بالإضافة لمساحة القاع أقل ما يمكن .

(٣٠) بكم مرة يكون حجم الكرة أكبر من حجم أكبر اسطوانة مرسومة فى هذه الكرة.

(٣١) طائرتان تطيران فى مستوى واحد كل منهما فى خط مستقيم بينهما زاوية قدرها 120° فإذا كانت سرعتاهما واحدة $V \text{ km/h}$ وفى لحظة ما ، تصل إحداهما إلى نقطة تقاطع خطى الحركة وتكون الطائرة الأخرى حينئذ على بعد $x \text{ km}$ منها فبعد كم من الزمن يكون البعد بين الطائرتين أقل ما يمكن واحسب هذا البعد .

(٣٢) خزان له قاعدة مربعه وعلى شكل متوازى مستطيلات يُراد أن يكون حجمه 8 m^3 فاحسب طول ضلع قاعدته وارتفاعه بحيث يتكلف أقل كمية ممكنة من الخامات .

(٣٣) مربع يزداد طول أضلاعه بمعدل 0.5 cm/sec فاحسب معدل زيادة المساحة عندما يبلغ طول كل ضلع من أضلاعه 10 cm .

(٣٤) ينساب الماء إلى وعاء على شكل نصف كرة ، نصف قطرها $6m$ بمعدل $4m^3/min$ فاحسب معدل ارتفاع سطح الماء عندما يكون عمق الماء مساوياً $4m$.

(٣٥) يسير قطار على طريق مرتفع بمقدار $20ft$ عن الأرض متجهاً للشرق بسرعة $22ft/sec$ وتمر سيارة أسفل طريق القطار مباشرة فى اتجاه الجنوب بسرعة $33ft/sec$ ، فما هى سرعة تباعدهما بعد $1sec$.

(٣٦) طريقان يلتقيان عند نقطة A ويصنعان زاوية مقدارها 60° وتحركت سيارة على أحد الطريقين بسرعة قدرها $40km/h$ مبتعدة عن النقطة A . وبعد عشرة دقائق ، تحركت سيارة أخرى من A وسارت بمعدل $60km/h$ على الطريق الآخر .

احسب سرعة تباعد السيارتين بعد 20 دقيقة من تحرك السيارة السريعة (الثانية) .

(٣٧) مصباح إنارة أحد الشوارع على ارتفاع $20ft$ من الأرض ، يسير رجل طوله $6ft$ متحركاً بعيداً عنه بمعدل $4ft/sec$ ، فما هى السرعة التى تتحرك بها قمة ظل الرجل على الأرض وما معدل استطالة الظل عندما يكون على بعد 30 قدماً من المصباح .

(٣٨) مخروط دائرى قائم رأسه منكس للأسفل ، يُصب فيه الماء بمعدل $10ft^3/min$ فإذا كان نصف قطر قاعدة المخروط يساوى ارتفاع المخروط ، احسب معدل ارتفاع الماء فى المخروط عندما يكون ارتفاع الماء مساوياً 6 أقدام .

(٣٩) ممران عرضهما $2.4m$ و $1.6m$ يتقاطعان فى زاوية قائمة ، عين أكبر طول للسلم الذى يمكن نقله (أفقياً) من ممر لآخر .

(٤٠) عين أبعاد حمام سباحة مفتوح وذو قاع مربع ، حجمه $32m^3$ بحيث يستهلك أقل كمية ممكنه من البلاط لتبليط قاعه وجدرانه .

(٤١) خزان مياه مستطيل الشكل ومفتوح وله قاعدة مربعه فإذا كان الخزان يتسع $108ft^3$ من المياه ، فاوجد أبعاد القاعدة بحيث يتكلف أقل كمية ممكنة من الخامات اللازمة لتبطين القاعدة .

(٤٢) مثلث قائم الزاوية طول وتره 8 cm وزاويته 60° ، رسم مستطيل بحيث تكون قاعدته على الوتر ، فما هي أبعاد المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

(٤٣) النقطتان $A(0,3)$ ، $B(4,5)$ ، عين على المحور OX نقطة C بحيث تكون المسافة $x = AC + CB$ أقل ما يمكن .

(٤٤) مزارع لديه 600 قطعة عمود لغرزها حول الأرض لعمل سياج أو سور فإذا كانت الأرض المراد إحاطتها بسور مستطيلة الشكل ويراد تقسيمها إلى جزئين متساويين بعمل سياج بداخلها يوزاى ضلعين متوازيين من أضلاعها فوجد أبعاد قطعة الأرض بحيث تحتوى على أكبر مساحة داخلية .

(٤٥) أوجد نقطة على القطع المكافئ $y^2 = 8x$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(5,0)$.

(٤٦) يبحر رجل فى زورق على بعد 5 mile من أقرب نقطة على الشاطئ المقابل له (A) ويريد أن يصل إلى نقطة على الشاطئ تبعد بمقدار 6 mile عن (A) فى أقل زمن ممكن فإذا كان معدل تجديفه بالزورق 2 mile/h فى حين أنه يستطيع أن يسير على رمال الشاطئ بسرعة قدرها 3 mile/h فعند أى نقطة على الشاطئ عليه أن يبحر لها ويكمل باقى المسافة سيراً على الأقدام .

(٤٧) يُراد طباعة كتاب بحيث تكون أحبار الطباعة فى مساحة لا تتجاوز 36 بوصة مربعة على أن يترك هامش أعلى وأسفل الصفحة قدره $1\frac{1}{2}$ بوصة ومن الجانبين هامش قدره 1 بوصة فوجد أبعاد الصفحة لأقل مساحة ممكنة .

(٤٨) قطاع دائرى زاويته α مقطوع من دائرة ، لف هذا القطاع ليتحول إلى مخروط فعند أى قيمة للزاوية α يُصبح حجم المخروط أكبر ما يمكن .

(٤٩) نفق مقطعه مستطيل ينتهى بنصف دائرة فإذا كان محيط المقطع 18 متراً فعند أى نصف قطر للدائرة تكون مساحة المقطع أكبر ما يمكن .

(٥٠) يقع مضدرا ضوء على بعد $30m$ عن بعضهما ، فحدد نقطة على المستقيم
الواصل بينهما تكون أقل النقط إضاءة ، علماً بأن نسبة قوتى إضاءة المصدرين هى
27:8

(٥١) رسم مخروط نصف قطر قاعدته $40cm$ وارتفاعه $60cm$ ، رسمت بداخله
اسطوانة حجمها أكبر ما يمكن ، عين هذا الحجم .

(٥٢) مصنع A ، يمر بجواره خط سكة حديد فى خط مستقيم إلى مدينة B
فبأية زاوية α على هذا المستقيم يجب مد طريق مُعبد من المصنع لكى يكون نقل
البضائع من A إلى B أرخص ما يمكن ، إذا كان نقل الطن لكيلو متر واحد على
الطريق المُعبد ، أغلى بمقدار m مرة من نقله بالسكة الحديد .

الباب العاشر

تطبيقات على المشتقة الأولى

تطبيقات هندسية ، وتطبيقات على السرعة والعجلة

١٠ - ١ : - موجز لأساسيات الهندسة التحليلية : -

(١) ميل المستقيم هو ظل الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

$$m = \tan \theta$$

(٢) ميل المستقيم بدلالة نقطتين عليه إحداثياتهما $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(٣) يمكن إيجاد ميل المستقيم إذا كانت معادلته في الصورة : -

$$ax + by + c = 0$$

$$\therefore m = -\frac{b}{a}$$

(٤) معادلة المستقيم بدلالة ميله m ونقطة معلوم إحداثياتها (x_1, y_1) تقع عليه : -

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(٥) معادلة المستقيم بدلالة نقطتين معلومتين واقعتين عليه $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$: -

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(٦) تكون النقطة واقعة على المستقيم أو المنحنى إذا حققت معادلته .

(٧) للحصول على نقطة تقاطع مستقيمين نحلها معا أما نقطة أو نقط تقاطع منحنين فتكون بحل معادلتها آتياً .

(٨) المقصود بميل منحنى عند نقطة ما هو ميل المماس لهذا المنحنى عند هذه النقطة .

(٩) زاوية تقاطع مستقيم ومنحنى عند نقطة ما هي الزاوية بين المستقيم والمماس للمنحنى عند نقطة التقاطع .

(١٠) زاوية التقاطع بين منحنين هي الزاوية بين مماسي المنحنين عند نقطة تقاطعهما .

(١١) المستقيم العمودى على منحنى ما عند نقطة معلومة عليه هو المستقيم الذى يكون عموديا على مماس المنحنى عند هذه النقطة .

(١٢) إذا تعامد مستقيمان فإن حاصل ضرب ميلهما $= -1$.

وقد عرفنا فيما سبق من أبواب أنه إذا كانت $y = f(x)$ فإن المشتقة الأولى لهذه الدالة $y \text{ or } f'(x)$ تعطينا ميل المماس لهذا المنحنى عند أى نقطة (x_1, y_1) تقع عليه .

$$\therefore y' = f'(x) = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x_1, y_1} = \tan \theta$$

وباستخدام المشتقة الأولى يمكننا وبالرجوع إلى النقاط السابقة ، أن نستخدمها وبسهولة فى إيجاد الميل عند أى نقطة كما يلى :-

(١٣) معادلة المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) :-

$$y - y_1 = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x_1, y_1} \times (x - x_1)$$

(١٤) معادلة العمودى على المنحنى $y = f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) :-

$$y - y_1 = \frac{-1}{\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x_1, y_1}} \times (x - x_1)$$

١٠ - ٢ :- أمثلة محلولة على التطبيقات الهندسية للمشتقة الأولى

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة :-

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$$

عند كل نقط تقاطعه مع محور السينات $X'OX$

الحل :-

عند نقط التقاطع مع محور السينات تكون $y = f(x) = 0$

$$\therefore f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

$$\therefore x(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 0, x = 1, x = 3$$

هى نقط التقاطع مع محور السينات .

، ميل المماس عند أى نقطة $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ،

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$$

$$[f'(x)]_{x=0} = 3 \times 0 - 8 \times 0 + 3 = 3$$

$$[f'(x)]_{x=1} = 3 \times 1 - 8 \times 1 + 3 = -2$$

$$[f'(x)]_{x=3} = 3 \times 3^2 - 8 \times 3 + 3 = 6$$

(٢) أوجد ميل منحنى الدالة : -

$$y = 4x^2 - 8x + 5$$

عند نقط تقاطعه مع المستقيم $y = 1$

الحل : - لإيجاد نقط تقاطع المستقيم مع منحنى الدالة نحل معادلتها سويا وذلك بوضع $y = 1$ فى معادلة الدالة .

$$\therefore 1 = 4x^2 - 8x + 5$$

$$\therefore 4x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 = 0$$

\therefore هنالك نقطة تقاطع وحيدة عندما $x = 1$ ويمكن معرفة إحداثيها الصادى (y)

بالتعويض بقيمة $x = 1$ فى معادلة المنحنى الأصى :

$$y = 4 \times 1^2 - 8 \times 1 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$$

\therefore نقطة التقاطع هى (1,1) وواضح من معادلة المستقيم القاطع $y = 1$ أنه يمس المنحنى عند هذه النقطة (1,1) .

والميل : $\frac{dy}{dx}$: -

$$\frac{dy}{dx} = 8x - 8$$

\therefore ميل المماس عند النقطة $x = 1$

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = 8 \times 1 - 8 = 0$$

أى أن المماس يوازي محور السينات وهو نفسه المستقيم $y=1$
(٣) إذا كان المماس للمنحنى :

$$y = x(a - x^3)$$

عند نقطة الأصل يصنع زاوية قياسها 45° مع الاتجاه الموجب لمحور OX فاحسب قيمة العددية

$$\therefore y = ax - x^4 \quad \text{الحل : -}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a - 4x^3 = \text{ميل المماس}$$

ولما كان ميل المماس $(\tan \theta = \tan 45 = 1)$

$$\therefore a - 4x^3 = 1$$

وحيث أن المماس يمر بنقطة الأصل حيث $x=0$

$$\therefore a - 4 \times 0 = 1$$

$$\therefore a = 1$$

$$y = x(1 - x^3)$$

وبذلك فإن معادلة المنحنى هي .

$$f(x) = x^3 - 27x + 60$$

(٤) أوجد نقطة على المنحنى $f(x)$:

يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات .

الحل : -

عندما يوازي المماس محور السينات فإن :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 27 = 0$$

$$\therefore 3x^2 = 27 \quad \therefore x^2 = 9 \quad \therefore x = \pm 3$$

وبالتعويض في $f(x)$ بقيم x

$$\therefore f(3) = 27 - 27 \times 3 + 60 = 6$$

$$f(-3) = -27 + 81 + 60 = 114$$

\therefore المماس لهذا المنحنى يكون موازيا لمحور السينات عند النقطتين .

$$(3, 6), (-3, 114)$$

(٥) أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى $f(x)$: -

$$y = f(x) = x^2 - 3x + 1$$

عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $y = x + 2$

الحل: -

$$y = x + 2 = x^2 - 3x + 1$$

$$\therefore x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

وبالتعويض عن $x = 1$ فى معادلة المنحنى

$$\begin{aligned} \therefore y &= x^2 - 3x + 1 \\ &= 1 - 3 \times 1 + 1 = -1 \end{aligned}$$

\therefore نقطة تقاطع المستقيم مع المنحنى هى $(1, -1)$

$$, \frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

، معادلة المماس عند $(1, -1)$:

$$y - y_1 = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x_1, y_1} \times (x - x_1)$$

$$\therefore y - (-1) = (2x - 3)_{(1, -1)} \times [x - (1)]$$

$$\therefore y + 1 = (2 \times 1 - 3) \times (x - 1)$$

$$\therefore y + 1 = -1(x - 1)$$

$$\therefore y + 1 = -x + 1$$

$$\therefore y = -x \quad i.e \quad -x - y = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$-1 = \frac{-(-1)}{-1} = \frac{x \text{ معامل} -}{y \text{ معامل}} = \text{وميل هذا المستقيم}$$

$$+1 = \frac{-1}{-1} = \text{مىل العمودى عليه}$$

ومعادلة العمودى عليه :

$$y - y_1 = \frac{-1}{\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x_1 y_1}} \times (x - x_1)$$

$$y - 1 = 1 \times (x - 1)$$

$$\therefore y = x$$

(٦) أوجد الآتي بالنسبة للمنحنى $y^2 = 2x$ عن النقطة $x = 1$:

(أ) طول المماس للمنحنى

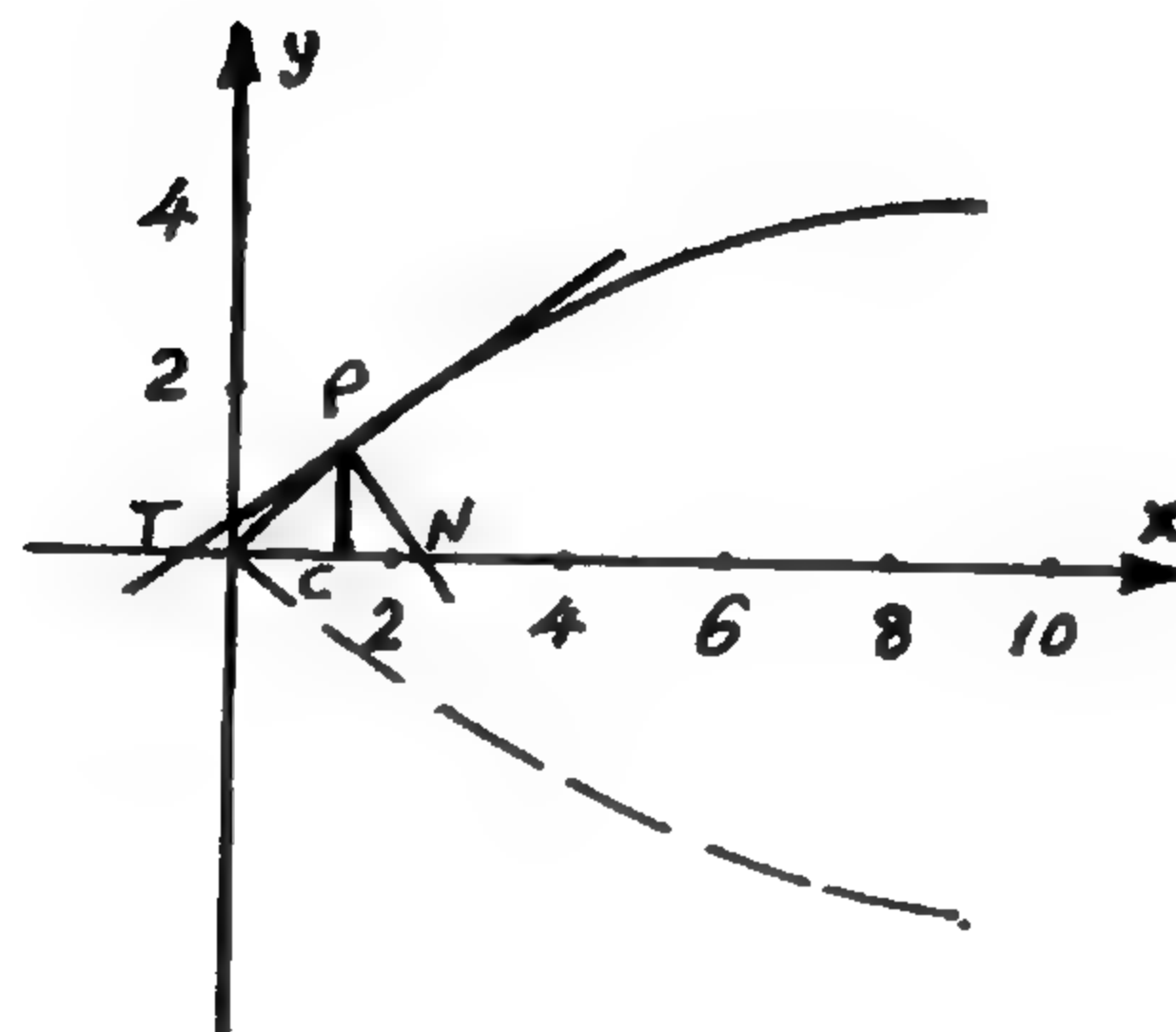
(ب) طول العمودى

(ج) طول تحت المماس subtangent

(د) طول تحت العمودى subnormal

الحل :-

انظر الرسم شكل (١٠ - ١) .



شكل (١٠ - ١)

(a) طول المماس TP كما يتضح من الرسم هو المسافة بين نقطة التماس (P) وبين

نقطة تقاطع المماس مع محور ox (T)

ولدينا : طول المماس $TP = \frac{PC}{\sin \theta}$

$$\therefore TP = PC \cdot \operatorname{cosec} \theta$$

ولكن $cpc = y_1$

$$\therefore TP = y_1 \operatorname{cosec} \theta$$

$$\therefore \operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta = \sqrt{1 + \cot^2 \theta} = \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{dy}{dx} = \text{الميل}$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

$$\therefore TP = y_1 \operatorname{cosec} \theta = y_1 \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

وهى الصيغة العامة لطول المماس .

$$m = \frac{dy}{dx} \quad \text{وبوضع الميل}$$

$$\therefore TP = y_1 \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} \quad \dots\dots\dots (1)$$

وبذلك فإنه يلزمنا إيجاد m ، y_1 ولإيجاد y_1 نعوض فى المعادلة $y^2 = 2x$ بقيمة $x = 1$

$$\therefore y_1^2 = 2 \times 1 = 2$$

$$\therefore y_1 = \sqrt{2} \quad \text{at } x = 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ولإيجاد m نفاضل الدالة الضمنية الأصلية :

$$y^2 = 2x$$

$$\therefore 2y \frac{dy}{dx} = 2 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = m = \frac{1}{y}$$

وبالتعويض عن $y = \sqrt{2}$ (عند $x = 1$)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} = m \quad \dots\dots\dots (3)$$

وبالتعويض عن قيمة m ، y_1 من المعادلتين (3) ، (2) فى المعادلة (1)

$$\therefore TP = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2.45$$

(b) من الشكل ، طول العمودى PN وهو المسافة بين نقطة التماس وحتى نقطة تقاطع العمودى مع محور $X'OX$

$$، PN = \text{طول العمودى} = \frac{PC}{\cos \theta} = PC \sec \theta$$

$$ولكن PC = y_1$$

$$\therefore PN = y_1 \sec \theta .$$

$$\because \sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta}, \tan \theta = \frac{dy}{dx} = m$$

$$، \therefore \sec \theta = \sqrt{1 + m^2}$$

$$\therefore PN = y_1 \sec \theta = y_1 \sqrt{1 + m^2}$$

$$وبالتعويض عن قيم $y_1 = \sqrt{2} ، m = \frac{1}{\sqrt{2}}$$$

$$\therefore PN = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{3} = 1.732$$

(c) ومن الشكل فإن طول ما تحت المماس TC وهو عبارة عن مسقط المماس TP على المحور $X'OX$

$$، TC = \text{طول تحت المماس} = \frac{PC}{\tan \theta} = PC \cot \theta$$

$$، \frac{dy}{dx} = \tan \theta = m ، PC = y_1 \quad \text{وحيث أن :}$$

$$\therefore TC = \frac{y_1}{m} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2$$

(d) ومن الشكل فإن طول ما تحت العمودى CN

$$\therefore CN = \text{طول ما تحت العمودى}$$

$$= PC \tan \theta = y_1 \tan \theta = y_1 m$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

(٧) اوجد الزاوية بين نقط تقاطع الدائرتين : -

$$x^2 + y^2 - 4x = 1 \quad \text{..... (A)}$$

$$, x^2 + y^2 - 2y = 9 \quad \text{..... (B)}$$

الحل : - المقصود بزاوية التقاطع بين الدائرتين ، أنها الزاوية بين المماسات لكل من الدائرتين عند نقط التقاطع

$$\therefore \tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

حيث : -

$m_1 =$ ميل المماس للدائرة A عند (x, y)

$m_2 =$ ميل المماس للدائرة B عند (x, y)

ولإيجاد نقط تقاطع الدائرتين تحلها معا آنيا فنحصل على نقاط التقاطع وهى $(3, 2), (1, -2)$

ولإيجاد ميل المماسات عند هذه النقط فإننا يجب أن نحصل على $\frac{dy}{dx}$ لكل من المنحنيين

وبالنسبة للدائرة الأولى A : -

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2-x}{y} \right)$$

، بالنسبة للدائرة الثانية B : -

$$\therefore m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1-y}$$

وبالتعويض عن إحداثيات النقطة الأولى $(3, 2)$ أى :

$$x = 3, y = 2$$

$$\therefore m_1 = \frac{2-3}{2} = -0.5 \quad \text{وهو ميل المماس للمنحنى A عند } (3, 2)$$

$$, m_2 = \frac{3}{1-2} = -3 \quad \text{وهو ميل المماس للدائرة B عند } (3, 2)$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\frac{-1}{2} + 3}{1 + \frac{3}{2}} = 1 \quad \therefore \theta = 45^\circ$$

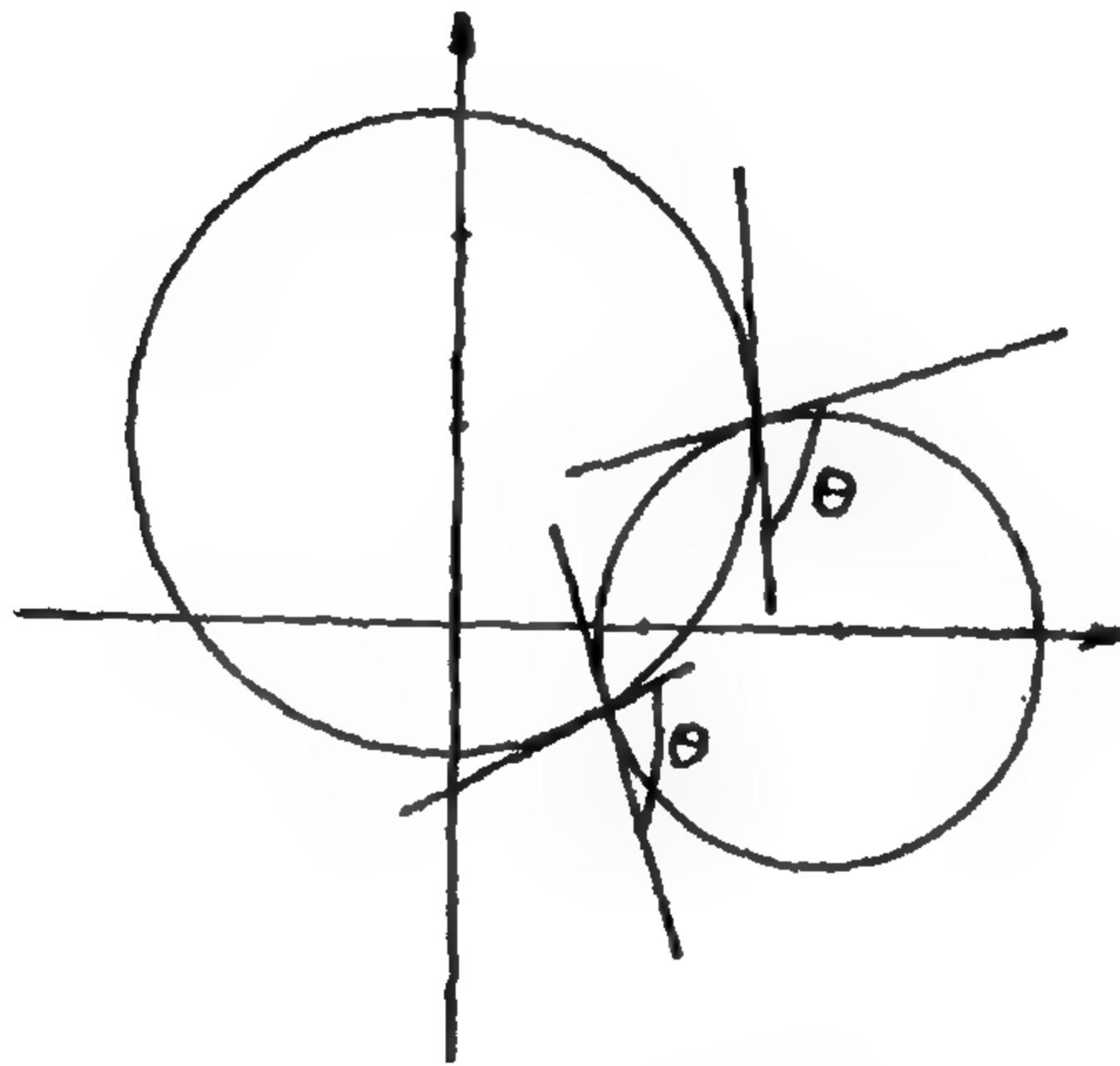
فإذا ما حسبنا زاوية التقاطع عند النقطة $(1, -2)$:

$$m_1 = \frac{-1}{2}, \quad m_2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\frac{-1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = -1 \quad \therefore \theta = 135^\circ = 45^\circ$$

وهي نفس الزاوية السابقة .

انظر الرسم شكل (١٠ - ٢) .



شكل (١٠ - ٢)

١٠ - ٣ : السرعة والعجلة :

هنالك العديد من التطبيقات التي تكون فيها الدوال المختلفة ، دوال في الزمن . بمعنى أن الزمن هو المتغير المستقل بها وسوف تقدم هذا النوع من الأمثلة عن السرعة والعجلة كأحد النماذج للدوال التي تعتمد على الزمن .

فإذا اعتبرنا أن لدينا جسم يتحرك في خط مستقيم (rectilinear motion) واعتبرنا أبسط أنواع هذه الحركة (في خط مستقيم) ، أى عندما يتحرك الجسم مسافات متساوية وفي نفس الاتجاه وفي فترات زمنية متساوية . ففي مثل هذه الحركة فإن عدد وحدات المسافة المقطوعة في وحدة الزمن تُعرف بالسرعة .

ويُطلق على السرعة في هذه الحالة بالسرعة الثابتة أو المنتظمة constant or uniform فإذا اعتبرنا الجسم يتحرك من نقطة البداية 0 في الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن S هي المسافة المقطوعة للجسم من نقطة البداية عند الزمن t ، فإن موضع الجسم يكون دالة في الزمن أى : $S = f(t)$ أنظر الرسم شكل (١٠ - ٣) .



شكل (١٠ - ٣)

والآن لنفترض أن الجسم تحرك مسافة Δs من P إلى Q في فترة زمنية قدرها Δt فإن وضع الجسم عند الزمن (t) وعند الزمن $(t + \Delta t)$ يكون $f(t)$ ، $f(t + \Delta t)$ $\therefore \Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$

وبالقسمة على Δt

$$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ويُطلق على هذه النسبة بالسرعة المتوسطة للجسم عند انتقاله من P إلى Q وعموماً فإن هذه النسبة ، ليست متساوية لمختلف قيم Δt مما لا يساعد على تفهم الحركة بوضوح . إلا أن نهاية هذه النسبة عندما تقترب Δt من الصفر ، تكون أكثر إيضاحاً وتحديداً للحركة .

تعريف : إذا كان وضع جسيم متحرك يتحدد بالعلاقة $S = f(t)$ فإن السرعة V عند أى لحظة t تُعرف بالآتى :-

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

أى أن السرعة هى مشتقة المسافة بالنسبة للزمن وهى تُفيد كثيراً فى تفهم طبيعة الحركة ، فعند أى لحظة t ، فإن $f'(t)$ تبين لنا السرعة اللحظية instantaneous velocity وتحدد إشارة المشتقة اتجاه الحركة .

غير أن القيمة المطلقة للمشتقة $f'(t)$ تمثل السرعة اللحظية .
وعليه فإن S تزداد عندما $f'(t) > 0$ وتتناقص عندما $f'(t) < 0$ ويمكننا كتابة الآتى:-

- (١) عندما $f'(t) > 0$ ، فإن الحركة تكون فى الاتجاه الموجب .
- (٢) عندما $f'(t) < 0$ ، فإن الحركة تكون فى الاتجاه السالب .
- (٣) عندما $f'(t) = 0$ ، فإن الجسم يكون ساكناً (السرعة = صفر) .

١٠ - ٤ أمثلة على السرعة والعجلة .

(١) العلاقة التالية تبين وضع جسيم متحرك فى خط مستقيم :

$$S = t^2 + 1$$

فأوجد مكان وسرعة الجسيم عندما : $t = 0$ ، $t = 2$ ، $t = 5$

الحل :- بأخذ مشتقة الدالة نحصل على السرعة (وهى دالة فى الزمن أيضاً) :-

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = 2t$$

ثم نعوض بقيمة t المختلفة فى كل من علاقتى المسافة والسرعة للحصول على موضع وسرعة الجسيم ، كما هو موضح بالجدول التالى : (١٠-١)

t	0	2	5
s	1	5	26
V	0	4	10

جدول (١٠-١)

وكما يتضح من الجدول فإنه عند الزمن $t=0$ ، الجسم ساكن $V=0$ فإن $S=1$ وهذا يعنى أنه عند بداية الحركة كان الجسم يبعد بمقدار وحدة مسافة عن نقطة البداية . ثم بدأ الجسم حركته فى الاتجاه الموجب للحركة بحيث أن السرعة تزداد وبحيث تكون دائماً مساوية لضعف الزمن المنقضى فى الحركة .

$$[(0, 0), (2, 4), (5, 10)]$$

(٢) يسقط جسم من علوّ طبقاً للعلاقة :-

$$S = -16 t^2$$

حيث t مقاسة بالثواني ، s بالأقدام ، فإذا وصل الجسم إلى الأرض فى 5 ثوانٍ فاحسب الارتفاع الذى سقط منه الجسم وكذلك السرعة التى يصطدم بها بالأرض .
الحل :- يلاحظ هنا أن نقطة البداية هى نقطة سقوط الجسم وأن الإشارة السالبة فى معادلة الهبوط تعنى أن المسافة مقاسة فى اتجاه الصعود (أى الاتجاه الموجب هو الصعود لأعلى) .

وبوضع $t=5$ فى المعادلة $S = f(t)$

$$\therefore S = -16 (5)^2 = -400 \text{ ft}$$

كما وأن السرعة عند أى لحظة أثناء الهبوط :

$$V = \frac{ds}{dt} = -32 t$$

فعندما $t=5$ تكون السرعة V

$$V = -32 \times 5 = -160 \text{ m/sec}$$

أى أن الجسم يسقط من ارتفاع 400 ft ويصل للأرض بسرعة تبلغ 160 ft/sec .

(٣) صف حركة نقطة تتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة :-

$$S = 3 t^2 - 18 t$$

الحل :- يمكن إيجاد اتجاه الحركة عند أى زمن عن طريق دالة السرعة .

$$V = \frac{ds}{dt} = 6t - 18 = 6(t - 3)$$

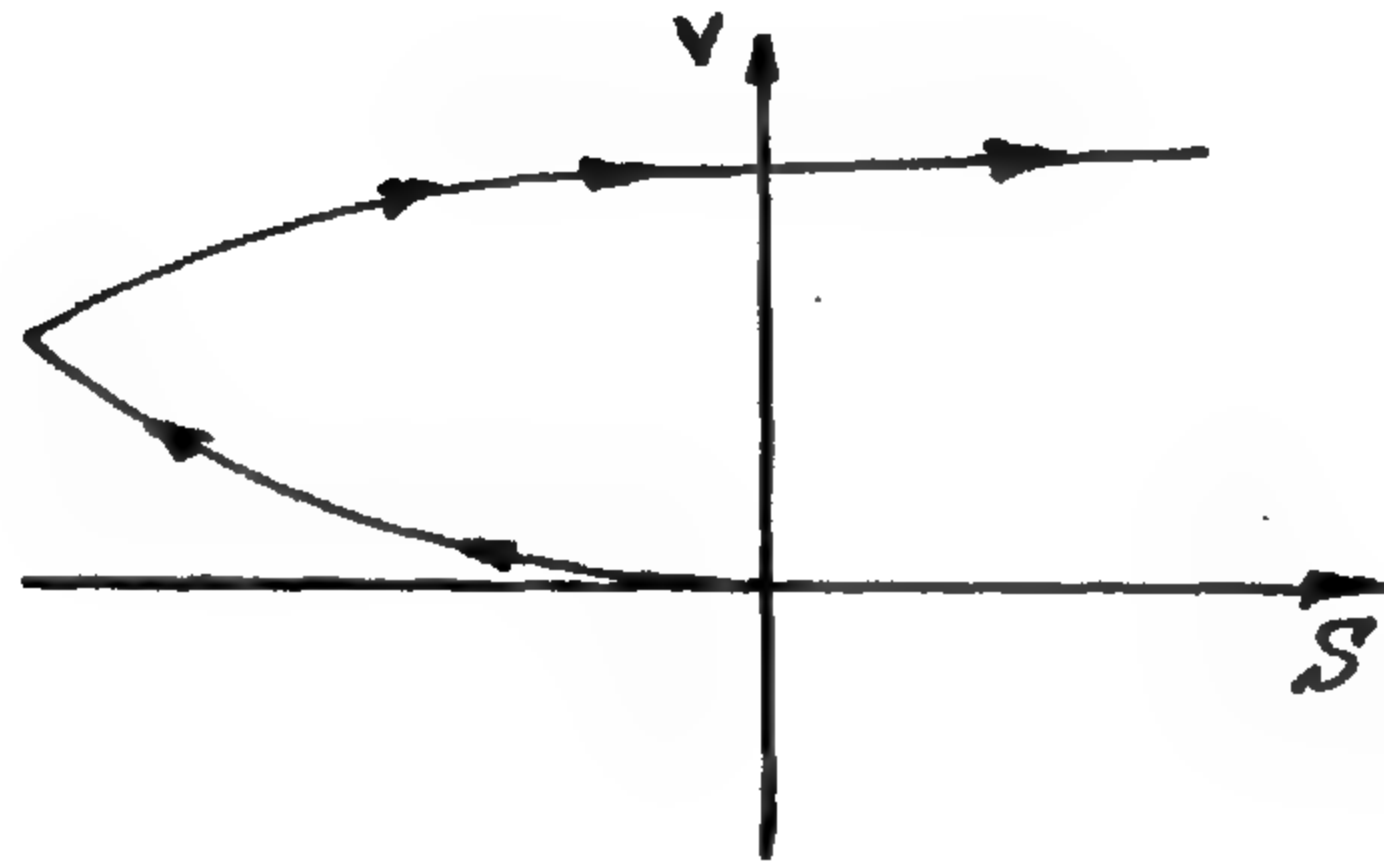
وبلاحظ الآتى :-

$$(١) \quad V < 0 \text{ عندما } 0 < t < 3$$

$$(٢) \quad V = 0 \text{ عندما } t = 3$$

$$(٣) \quad V > 0 \text{ عندما } t > 3$$

وبذلك فإن النقطة تتحرك لليسار أثناء الثلاث ثوانى الأولى (باعتبار الحركة لليمين هى الموجبة) ، ثم تسكن عندما $t = 3$ ثم تصبح السرعة موجبة أى أنها تتحرك بعد الثلاث ثوانى فى الاتجاه الموجب أى لليمين وبذلك فهى تعكس حركتها ويكون وضع النقطة عند $t = 0$ وعند $t = 3$ على الترتيب 0 ، -27 والأسهم على الشكل توضح الحركة لليسار ثم لليمين فى خط مستقيم .
أنظر الرسم شكل (١٠-٤) .



شكل (١٠-٤)

وقد تعرضنا فى وصف حركة النقطة ، إلى حساب الفترات الموجبة والسالبة للسرعة والوضع الابتدائى للنقطة ووضع النقطة عند السرعة = صفر .
إلا أنه يمكننا الحصول على وصف أدق لطبيعة حركة النقطة السابقة باعتبار وحساب معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن وهو ما يدعونا إلى التحدث عن العجلة .

تعريف :- تُعرف العجلة بأنها مشتقة السرعة بالنسبة للزمن وبذلك فإن تعريف العجلة acceleration هو :-

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

كما أنه إذا كانت $V = f(S)$:-

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

ولتوضيح ذلك نعتبر جسماً يتحرك في خط مستقيم طبقاً للعلاقة :-

$$S = 3t + 4$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = V = 3, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3) = a = 0$$

ويلاحظ أن السرعة لا تتغير فمقدارها $= 3$ ولذلك فإن العجلة وهي معدل تغير السرعة (الثابتة) = صفر

وعند $t = 0$ في وضع البداية فإن $S = 4$ تعني أن الجسم يبعد بمقدار 4 وحدات مسافة من نقطة القياس ، كما أنه يتحرك في الاتجاه الموجب حيث أن $V = 3 > 0$ بسرعة ثابتة قدرها $V = 3$ (3 وحدات مسافة لكل وحدة زمن)

وفيما يلي يمكننا إيضاح ، في أى وقت من الحركة تكون العجلة ثابتة ولا تساوى الصفر وهو ما يعرف بالعجلة المنتظمة uniformly accelerated .
فمثلاً إذا كانت

$$S = 3t^2 + 4t - 1$$

$$\therefore V = 6t + 4, \quad a = 6 (> 0)$$

وتعني العجلة 6 بأن السرعة تزداد بمقدار 6 وحدات سرعة لكل وحدة زمن فإذا كان وحدة السرعة m/sec فإن السرعة تزداد بمقدار $6 m/sec$ كل ثانية أو العجا تساوى $6 m/sec/sec$

وباختصار تكتب العجلة a تساوى :-

$$a = 6 m/sec^2$$

وللعجلة المنتظمة أهمية كبيرة عند دراسة جسم يتحرك رأسياً (بالقرب) من سطح الكرة الأرضية . حيث تكون العجلة والناشئة من الجاذبية الأرضية (gravity) ، وبإهمال مقاومة الهواء ، عند التحرك رأسياً فإن :-

$$S = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

حيث V_0 هي السرعة الابتدائية ، g عجلة الجاذبية الأرضية
فإذا اعتبرنا الوحدات بالتر والثانية وأن الاتجاه الموجب للحركة هو للأعلى فإن قيمة g تقريباً تعادل :-

$$g = -9.8 \text{ m/sec}^2 \quad (-32 \text{ ft/sec}^2)$$

(٤) قذف جسم إلى أعلى بسرعة ابتدائية 98 m/sec ، احسب زمن الصعود وأقصى ارتفاع يصل له الجسم
الحل :- حيث أن :-

$$S = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$V_0 = 98$$
 وباعتبار

$$\therefore S = 98t - \frac{1}{2} \times 9.8 t^2 = 98t - 4.9 t^2$$

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = 98 - 9.8 t$$

وتكون السرعة مساوية للصفر $V = 0$ عندما :-

$$98 - 9.8 t = 0 \quad \therefore t = \frac{98}{9.8} \cong 10 \text{ sec}$$

وهو زمن الوصول لأقصى ارتفاع ولحساب أقصى ارتفاع ، نعوض بقيمة الزمن $t = 10$ في معادلة المسافة :-

$$\begin{aligned} S &= 98 t - 4.9 t^2 \\ &= 98 \times 10 - 4.9 \times 100 \\ &= 980 - 490 = 490 \text{ mt} . \end{aligned}$$

وعليه فإن زمن الصعود $t = 10 \text{ sec}$ وأقصى ارتفاع $S = 490 \text{ mt}$

(٥) تتحرك نقطة في خط مستقيم بحيث أن المسافة بالأقدام مقاسة من نقطة البداية عند أى لحظة يمكن تمثيلها بالعلاقة :

$$S = t^3 - 6t^2 + 9t$$

صف الحركة أثناء الأربع ثواني الأولى من الحركة .

الحل :-

$$\therefore S = t^3 - 6t^2 + 9t \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$, a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 12 = 6(t-2) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ويلاحظ من العلاقة (٢) أنه عندما تكون $0 < t < 1$ أى فى خلال الثانية الأولى فإن

$$V = 3(t-1)(t-3) \quad \text{:-}$$

$$\therefore V = 3(-ve)(-ve) = +ve \quad \text{أى موجبة}$$

بينما عندما $1 < t < 3$ أى فى خلال الثانية الثانية والثالثة فإن :

$$V = 3(+ve)(-ve) = -ve \quad \text{أى سالبة}$$

أما عندما تكون $t \geq 3$ أى خلال الثانية الرابعة (فأكثر) فإن :-

$$V = 3(+ve)(+ve) = +ve \quad \text{أى موجبة}$$

أى أن النقطة تتحرك أولاً لليمين ثم لليسار ثم لليمين ثانية ومن علاقة العجلة :-

$$a = 6(t-2)$$

فإنه عندما تكون $0 < t < 2$ فإن :

$$a = 6(-ve) = -ve \quad \text{أى سالبة}$$

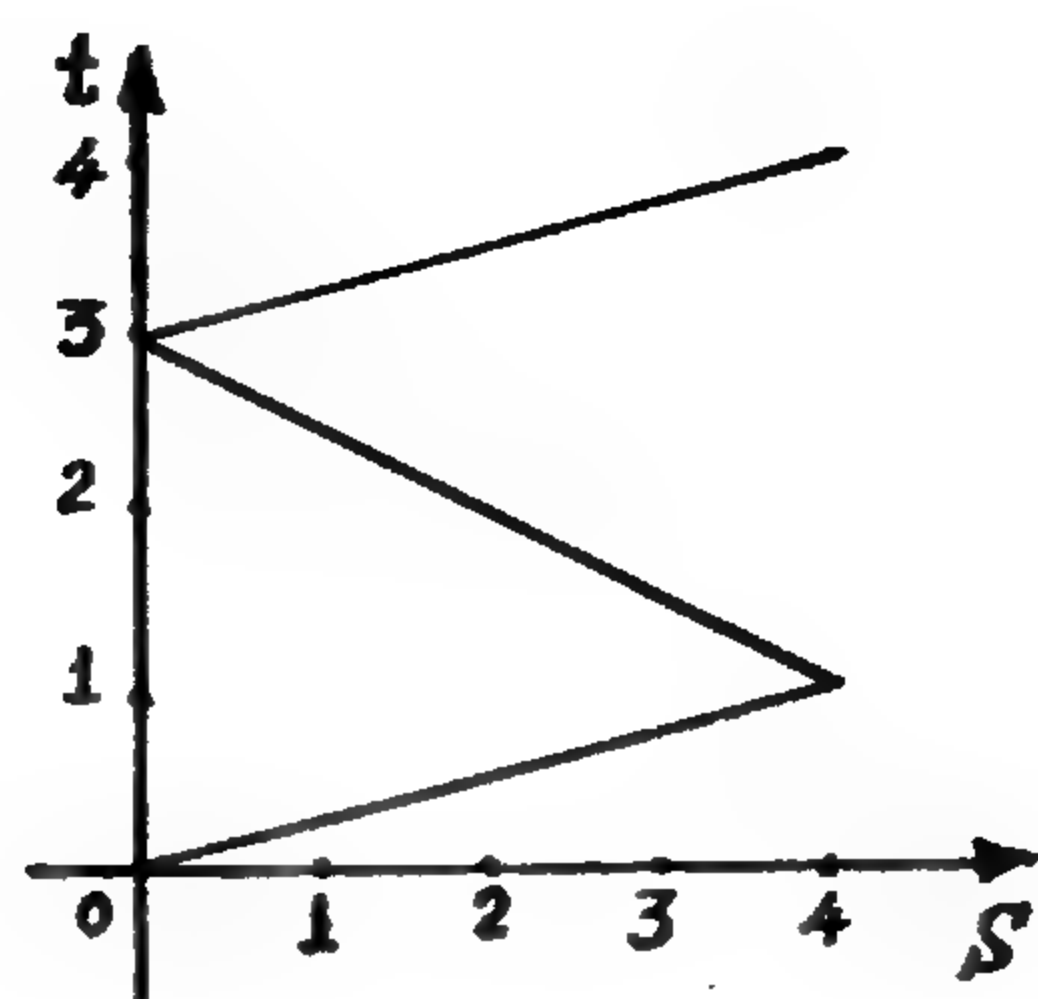
أى أن السرعة تتناقص (عجلة تقصيرية) .

بينما عندما تكون $2 < t \leq 4$ فإن :

$$a = 6(+ve) = +ve \quad \text{أى موجبة}$$

أى أن السرعة تزايد (عجلة تزايدية)

والشكل (١٠-٥) يوضح ذلك .



شكل (١٠-٥)

Exercise 10

(١) حدد زاوية تقاطع المنحنيين :-

$$x^2 + y^2 = 5 \quad , \quad y^2 = 4x$$

(٢) احسب الزاوية التي يقطع بها المستقيم : $2y = 1$ ؛ المنحنى ؛ $y = \cos x$

(٣) أوجد معادلتى المماس للمنحنى $y^2 = 8x$ المارين بالنقطة $(-2, 0)$ واثبت أنهما مُتعامدان .

(٤) حدد النقطة التي يكون فيها مماس المنحنى $y = x^2 + 4x$ موازياً للمحور $X'OX$

(٥) أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى $y = 3x^2$ عند النقطة $x = 3$

(٦) أوجد معادلة المماس للمنحنى $x^2 - y^2 = 16$ والذي يمر بالنقطة $(2, -2)$

(٧) أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى $y = x^2 + 4x + 2$ عند النقطة التي يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم :- $2x - 4y + 5 = 0$

(٨) حدد زاوية تقاطع المنحنيين :-

$$y = \frac{x^2}{2} \quad , \quad y = 4 - \frac{x^2}{2}$$

(٩) حدد الزاوية التي يقطع بها المنحنى $y = \sin x$ ، والمحور $X'OX$

(١٠) اكتب معادلتى مماس المنحنى $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ فى نقطتى تقاطعه مع المحور YOY

(١١) أوجد مساحة المثلث الذى أضلاعه محور OX والمماس العمودى فى النقطة

$$4x^2 + y^2 = 20 \quad - : \text{ للمنحنى}$$

(١٢) أوجد النقطة الواقعة على المنحنى $y = 4x^3 - 21x^2 + 30x$ والتي يكون عندها المماس للمنحنى موازياً لمحور $X'OX$ ثم أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند كل نقطة من هذه النقط .

(١٣) أوجد معادلة المماس للقطع الناقص : $4x^2 + 9y^2 = 40$ عند النقطة $(1, 2)$

(١٤) فى معادلة القطع المكافئ $y = x^2 + bx + c$ ، حدد الثابتين b, c علماً بأن المستقيم $y = x$ يمس القطع المكافئ عند النقطة $x = 2$

(١٥) أوجد معادلة المماس للمنحنى $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ عند النقطة (x_1, y_1) .

(١٦) عين y'' عند النقطة $(0, b)$ فى المعادلة بطريقة مشتقة الدالة الضمنية :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(١٧) اكتب معادلتى مماس الدائرة :- $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$

فى نقطتى تقاطعها مع محور $X'OX$ ثم ارسم الدائرة والمماسات .

(١٨) أوجد ميل المماس للمنحنى $y = x^3 + x^2 - 6x$ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع محور $X'OX$

(١٩) أوجد معادلة المماس للمنحنى $2x^2 + y^2 + 2xy = 5$ عند النقطة $(1, 1)$

(٢٠) أوجد معادلة المماس للمنحنى : $e^x + \cos y - 2 = 0$

عند النقطة $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

(٢١) أوجد معادلات المماس والعمودى للمنحنى : $y = x^2 - x + 3$ عند النقطة $(2, 5)$.

(٢٢) عين ميل القطع المكافئ : $y = x^2$ عند النقطتين $x = \pm 2$.

(٢٣) اكتب معادلتى المماسين للقطع الزائد $yx = 4$ عند النقطتين $x_1 = 1, x_2 = -4$ ، وحدد الزاوية بينهما ومن ثم ارسم المنحنى ومماسيه .

(٢٤) اكتب معادلة المماس للقطع الناقص $x^2 + 4y^2 = 16$ فى النقطة التى تنصف جزء المماس المقطوع بمحورى الإحداثيات وتقع فى الربع الإحداثى الأول .

(٢٥) ما هى النقط التى يكون عندها المماس لمنحنى $y = \cos \theta$ ، أفقياً .

(٢٦) اكتب معادلتى المماس والعمودى للقطع المكافئ $y = 4 - x^2$ عند نقطة تقاطع القطع المكافئ مع المحور OX (عندما $x > 0$) ثم ارسم القطع والمماس والعمودى .

(٢٧) باستخدام طريقة Δ أوجد النقط التى على المنحنى :- $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$

والتي يكون عندها المماس أفقياً .

(٢٨) بين أن المنحنى $y = x^2 + 3x - 4$ ، ليس له مماساً أفقياً باستخدام طريقة Δ

أوجد زاوية التقاطع لأقرب درجة ، لأزواج المنحنيات التالية :-

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 5 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \quad (٢٩)$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 6 \\ y = x \end{cases} \quad (٣٠)$$

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \quad (٣١)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \quad (٣٢)$$

في الثلاث مسائل التالية اكتب معادلات مماسات المنحنيات ثم ارسم المنحنيات ومماساتها :-

$$y = 4x - x^2 \quad (٣٣) \quad \text{في نقط التقاطع مع المحور } OX$$

$$y = \sqrt{4 - x} \quad (٣٤) \quad \text{في نقط التقاطع مع المحور } OY$$

$$y^2 = (4 + x)^3 \quad (٣٥) \quad \text{في نقط التقاطع مع كل من المحورين } OX , OY$$

في الأربعة مسائل التالية ، اكتب معادلات المماس للمنحنيات التالية ثم ارسمها وارسم مماساتها :-

$$y = \sin x \quad (٣٦) \quad \text{المنحنى عند النقطة } x = \pi$$

$$y = \frac{x^3}{3} \quad (٣٧) \quad \text{المنحنى عند النقطة } x = -1$$

$$y = \frac{8}{4 + x^2} \quad (٣٨) \quad \text{المنحنى عند النقطة } x = 2$$

$$y^2 = x^3 \quad (٣٩) \quad \text{المنحنى عند النقطتين } x_1 = 0 , x_2 = 1$$

أوجد معادلات المماس والعمودى لكل من المنحنيات التالية عند النقط الموضحة أمام كل منها :-

$$(40) \quad x^2 - 3xy + y^2 = 19 \quad \text{عند } (-3, 1)$$

$$(41) \quad y = 4x - x^2 \quad \text{عند } (4, 0)$$

$$(42) \quad (x-1)^2 + y^2 = 13 \quad \text{عند } \begin{cases} (-2, -2) \\ (-3, 1) \end{cases}$$

$$(43) \quad y = x^3 + 2x^2 + x \quad \text{عند } (1, 4)$$

فى كل من المسائل التالية ، نقطة تتحرك فى خط مستقيم وكانت المسافة S مقاسة بالقدم من نقطة البداية ، الزمن عند أية نقطة $t =$ ثانية وكانت المعادلات التالية تربط بين كل من S, t فأوجد : -

المسافة والسرعة والعجلة عندما $V=0, t=0$ [عندما $t \neq 0$]

$$(44) \quad S = t + 3$$

$$(45) \quad S = t^2 + 6t - 7$$

$$(46) \quad S = t^2 + 2t - 3$$

$$(47) \quad S = t^3 - 3t^2 + 3t - 5$$

$$(48) \quad S = 80t - 16t^2$$

(49) قذف جسم بزاوية مقدارها θ على الأفقى وبسرعة ابتدائية u فإذا كان المدى (المسافة الأفقية التى يقطعها الجسم) $x =$ والارتفاع $y =$ مرتبطين بالعلاقة : -

$$y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \theta}$$

فما هو أقصى ارتفاع يصل له المقذوف وما المدى المقطوع حينئذ

($g =$ عجلة الجاذبية الأرضية = ثابت) .

(50) تحرك جسم من السكون ثم عاد للسكون مرة أخرى وكانت العلاقة بين سرعته

V بالمتريث والزمن t بالثانية كالتالى : -

$$V = 2t - 5t^2$$

فاحسب الزمن الذى استغرقه بين لحظتى السكون ، ثم أوجد فترات تزايد وتناقص كل من السرعة والعجلة .

(٥١) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم فإذا كان بعدها S بالمتري عن نقطة ثابتة O عند الزمن t يتحدد من العلاقة :-

$$S = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$$

فبين أن النقطة ، تتوقف عن الحركة ، لحظيا مرتين ، ثم أوجد المسافة بين فترتي السكون .

(٥٢) قذفت كرة لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها 64 ft/sec ، فاحسب زمن صعودها وهبوطها وأقصى ارتفاع تصل إليه ؟

(٥٣) إذا كانت المسافة S التي يقطعها جسم مقذوف رأسيا لأعلى في الزمن t تُعطى بالعلاقة التقريبية التالية :-

$$S = 120t - 4.9t^2$$

فأوجد أقصى ارتفاع يصل له الجسم والزمن اللازم لذلك .

(٥٤) إذا كانت $S = 3 + 3t^2 - t^3$ تمثل العلاقة بين المسافة S والزمن t لجسم متحرك في خط مستقيم ، فأوجد السرعة عندما تنعدم العجلة .

(٥٥) تحركت نقطة مادية في خط مستقيم وكانت العلاقة بين S بالمتري ، t بالثانية :-

$$S = (3t - 2)^2$$

فأوجد سرعتها المتوسطة خلال الثانية السادسة ، ثم أوجد سرعتها وعجلتها عندما $t = 4$

(٥٦) سقطت نقطة مادية من ارتفاع ما فوصلت الأرض بعد ثلاث ثواني فأوجد الارتفاع الذي سقطت منه وسرعة اصطدامها بالأرض

تحركت نقطة مادية في خط مستقيم وكانت المسافة S بالمتري والزمن t بالثانية مرتبطان بالمعادلات المبينة فيما يلي ، احسب السرعة والعجلة بعد ٣ ثوان :-

$$S = 2t^2 + 2\sqrt{t} \quad (٥٧)$$

$$S = 2t^3 + 6t^2 - 3t + 1 \quad (٥٨)$$

$$S = 3t + \frac{4}{t-2} \quad (٥٩)$$

$$S = 3t^3 - 5t^2 + 2t \quad (٦٠)$$

$$S = t^4 - 4t^3 + 4t^2 \quad (٦١)$$

(٦٢) إذا كانت $S = 6 + 12t - t^3$ هي العلاقة بين S بالمتري ، t بالثانية لنقطة

تتحرك في خط مستقيم فأوجد متى يغير الجسم حركته وكم تبلغ العجلة عندئذ ؟

(٦٣) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بحيث أن المسافة S بالمتري بعد t ثانية تُعطى

بالعلاقة : -

$$S = 3t^4 - 16t^3 + 6t^2 - 48t$$

فبين أن سرعة النقطة ، لا تساوى صفراً إلا مرة واحدة فقط خلال حركتها ، ثم

احسب السرعة عندما تكون العجلة $= 5m/sec^2$.

الباب الحادى عشر

تفاضل الدوال المتسامية

Differentiation of transcendental function

١١ - ١ عام : -

درسنا فيما سبق الدوال الجبرية ، أما الدوال غير الجبرية فتُعرف بالدوال المتسامية وأشهر أنواع هذه الدوال والتي سوف ندرسها فيما يلى من أبواب هذا الكتاب ، الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية والدوال الزائدية والزائدية العكسية والدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية .

وهذه الدوال ذات أهمية كبيرة وتستخدم بكثرة فى الفيزياء والهندسة والاحتمالات وفى مجالات علمية وتطبيقية متعددة .

١١ - ٢ : - تفاضل الدوال المثلثية

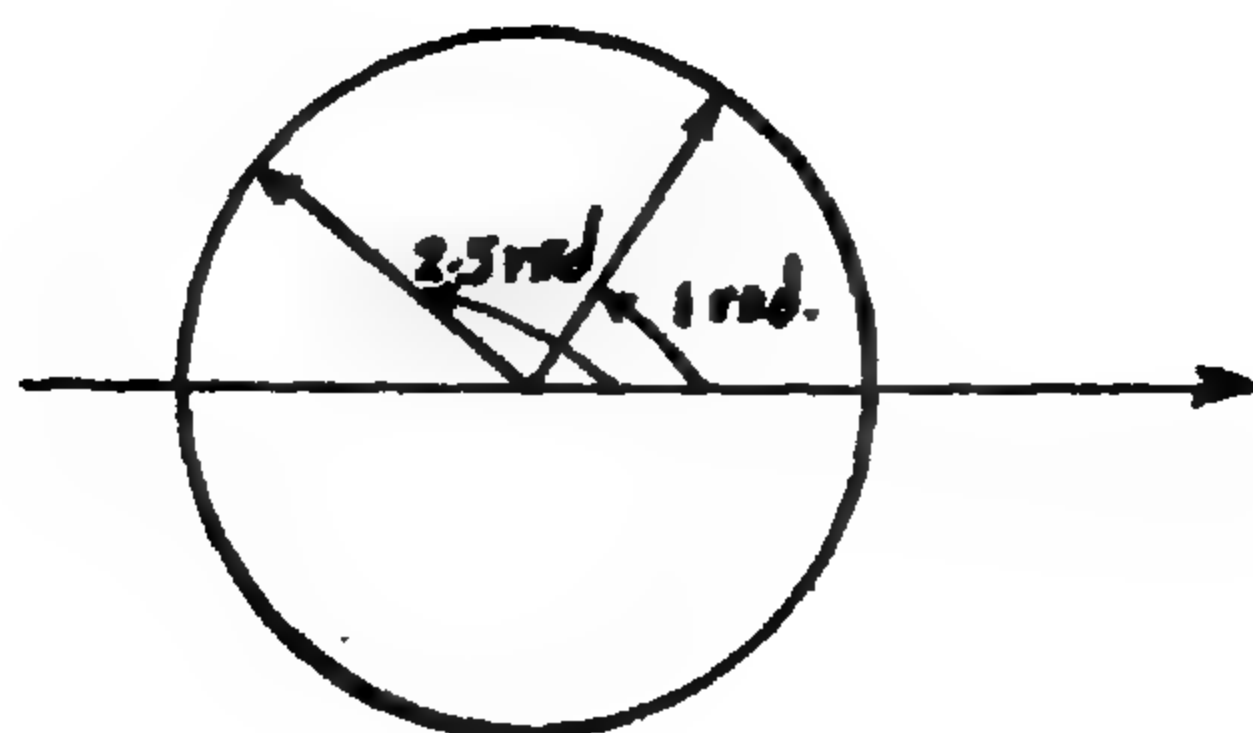
Diff . of The Trigonometric Functions

التقدير الدائرى للزوايا : - angular measure / circular measure

تقاس الزوايا بالدرجات كما علمنا فيما مضى من مراحل دراسية مختلفة ويستخدم هذا النظام فى مبادئ الهندسة والحساب إلا أنه يوجد نظام آخر لقياس الزوايا يُعرف بالتقدير الدائرى للزوايا ، وهو يفضل فى الدراسات النظرية وعلى الأخص فى حساب التفاضل والتكامل وعن طريقه يتم تبسيط العمليات كثيراً .

تعريف : - يُعرف قياس الزاوية التى رأسها عند مركز دائرة وتقابل قوساً على محيط الدائرة ، طوله يعادل طول نصف قطر الدائرة ، بأنه واحد دائرى one radian .

ويوضح الشكل زوايا مقاسة بالتقدير الدائرى مقدارها 1 rad ، $2\frac{1}{2} \text{ rad}$



شكل (١١ - ١)

وحيث أن محيط الدائرة (c) يعادل 2π مرة نصف قطرها . $(c=2\pi r)$
 فإذا كان لدينا دائرة نصف قطرها = 1 وحدة طول فإن محيط هذه
 الدائرة = $2\pi \times 1$ أى أن محيط هذه الدائرة يقابل زاوية قدرها 2π
 بالتقدير الدائرى

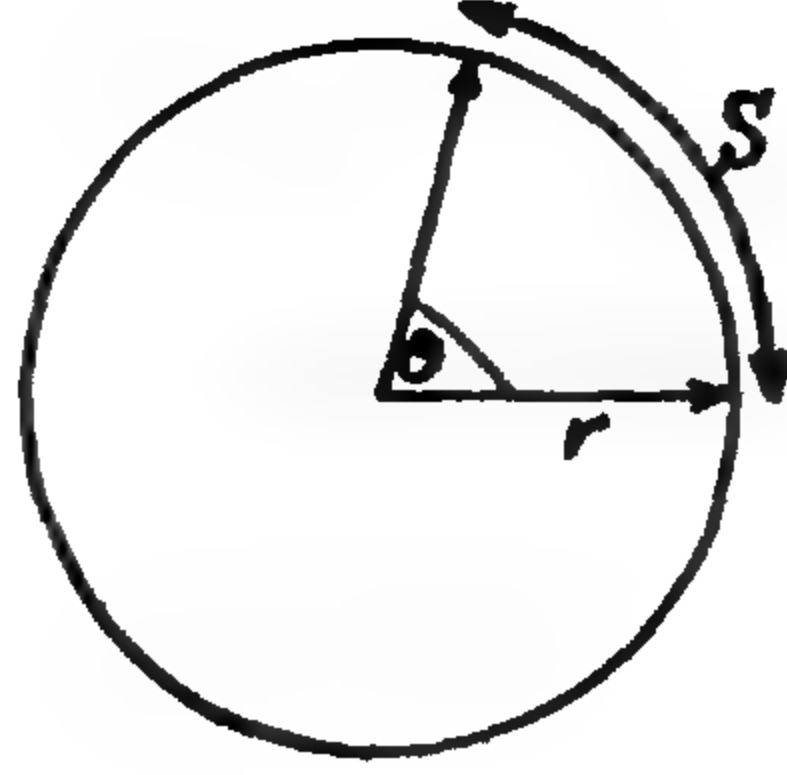
$$i.e. 2\pi \text{ radians} = 360^\circ$$

$$, \pi \text{ radians} = 180^\circ$$

$$, 1 \text{ Radian} = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3.14} = 57.296^\circ = 57^\circ, 177' +$$

$$, 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radian} = \frac{3.14}{180} = 0.0174532 + \text{radian}$$

ومن تعريف التقدير الدائرى للزوايا فإنه يمكننا استنتاج صيغتين رياضيتين هامتين عن
 الدائرة ، انظر الرسم شكل (١١ - ٢) .



شكل (١١ - ٢)

نفترض أن الزاوية θ مقاسة بالتقدير الدائري

وأن رأس الزاوية عند مركز الدائرة التي نصف قطرها $r =$ وحدة طول .

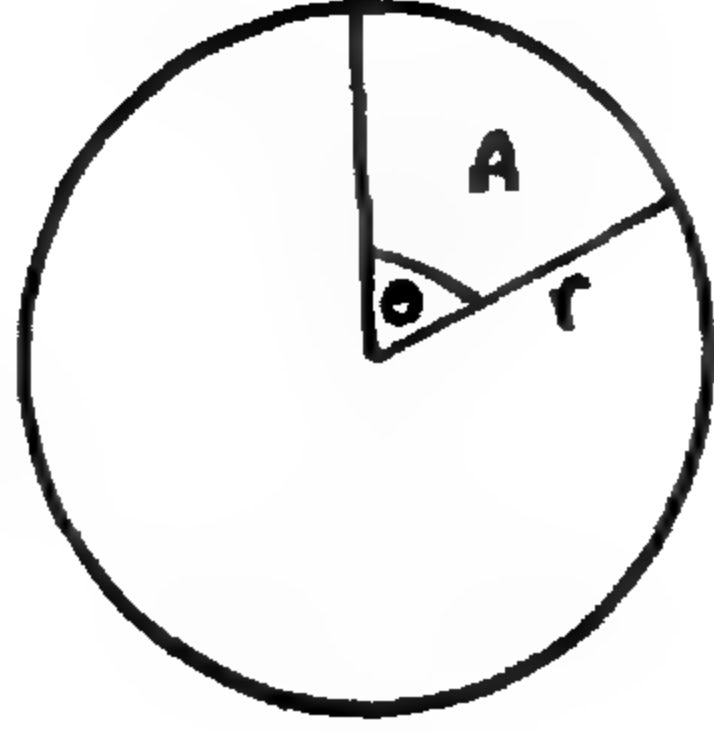
وأن القوس المقابل لهذه الزاوية طوله S وحدة طول .

وحيث أن الزاوية المركزية التي قياسها 1 radian تقابل قوساً طوله مساوياً لنصف قطر الدائرة، وعليه فإن الزاوية المركزية التي قياسها $\theta \text{ rad.}$ تقابل قوساً طوله $\theta \cdot r$ ومنها نصل للصيغة الرياضية الأولى التالية : -

$$i.e \quad S = r \cdot \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

ومن المهم عند تطبيق الصيغة السابقة أن يكون كل من نصف القطر والمحيط ، معبراً عنهم بنفس الوحدات الطولية وأن تكون θ مقاسة بالتقدير الدائري

ويُطلق على الشكل الهندسي الناشئ من القوس المقابل للزاوية المقاسة بالتقدير الدائري بالإضافة إلى ضلعي الزاوية (نصفى القطر) بالقطاع الدائري sector ، انظر الرسم شكل (١١ - ٣) .



شكل (١١ - ٣)

ويمكن التعبير عن مساحة هذا القطاع بدلالة زاوية رأسه ونصف القطر فإذا كانت θ هي زاوية رأس القطاع بالتقدير الدائري ، فإن مساحة القطاع A عبارة عن كسر مقداره $\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$ [زاوية رأس القطاع : زاوية الدائرة $2\pi = 360$] من مساحة الدائرة πr^2

$$\therefore A = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2$$

$$\therefore A = \frac{1}{2} r^2 \theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

وهي الصيغة الرياضية الثانية الخاصة بالدائرة .

وفيما يلي سنعتبر أن القارئ عنده إلمام كافٍ بقواعد حساب المثلثات والعلاقات والقوانين الخاصة به والمشهورة منها بالأخص .

ويجب أن لا ننسى عند دراسة تفاضل الدوال المثلثية أن الزوايا فيها مقاسة بالتقدير الدائري وعادة تكون في صورة كسور ملائمة أو مضاعفات النسبة π

مثل : - $\frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi, \frac{5\pi}{6}, \dots\dots etc.$

١١ - ٣ : تفاضل $\sin x$

لنعتبر أن $y = \sin x$

ولنعتبر أن Δx هي زيادة طفيفة جداً في قيمة x

، لنعتبر أن Δy هي زيادة طفيفة جداً مناظرة في قيمة y

$$, \because y = \sin x \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore y + \Delta y = \sin (x + \Delta x) \quad \dots\dots\dots (2)$$

وبطرح (1) من (2) :

$$\therefore \Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

والمطلوب هو إيجاد نهاية المقدار الأيمن عندما تتحول Δx إلى الصفر .

ولذلك ، سنقوم بتحويل البسط من مجموع جبرى إلى ضرب باستخدام الصيغة التالية :-

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \times \sin \frac{A-B}{2}$$

حيث نضع $(x + \Delta x)$ بدلاً من A

$\sin x$ ، بدلاً من B

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{2 \cos \left[\frac{(x + \Delta x) + x}{2} \right] \times \sin \left[\frac{(x + \Delta x) - x}{2} \right]}{\Delta x} \\ &= \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \times \sin \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} \end{aligned}$$

وبإعادة الترتيب :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \times \frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

وفي الطرف الأيمن نلاحظ أن العامل الثانى به $\frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}}$ يأخذ الصورة :-

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \text{ السابق إيجاد نهايتها في باب النهايات } \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right]$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \times \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right]$$

$$= \cos x \times 1, \quad \left[\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0 \right]$$

$$= \cos x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x.$$

١١ - ٤ : تفاضل $\cos x$:

وسنتبع هنا نفس الطريقة المتبعة في إيجاد $\sin x$

$$\because y = \cos x$$

$$\therefore y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

ثم نستخدم الصيغة التالية :

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \times \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta y &= -2 \sin \left(\frac{x + \Delta x + x}{2} \right) \sin \left(\frac{x + \Delta x - x}{2} \right) \\ &= -2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \end{aligned}$$

وبالقسمة على Δx وإعادة الترتيب :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) - \frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right] \\ &= -[\sin x \cdot 1] \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

١١ - ٥ : تفاضل $\tan x$

يمكن إيجاد المعامل التفاضلي للدالة $y = \tan x$ بسهولة باستخدام المعامل التفاضلي لكل من $\sin x$ ، $\cos x$ السابق الحصول عليهما .

$$\text{وحيث أن : } y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

\therefore بإجراء التفاضل للكسر السابق الذي بسطه $\sin x$ ومقامه $\cos x$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos x \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \frac{d}{dx} \cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \times -\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} , \quad [\cos^2 x + \sin^2 x = 1]\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

كما أنه يمكن إيجادها من المبادئ الأولية بطريقة Δ مثلما الحال في $\sin x$ ، $\cos x$ وباستخدام الصيغ المثلثية الملائمة .

١١ - ٦ : تفاضل : $\sec x$, $\operatorname{Cosec} x$, $\cot x$

يمكن إيجاد المشتقة الأولى لهذه الدوال من المبادئ الأولية كما سبق ، إلا انه يمكن إيجادها بسهولة كمقلوب لكل من : $\tan x$, $\sin x$, $\cos x$ على الترتيب وذلك باستخدام قانون تفاضل القسمة

١ - تفاضل مقلوب $\sin x$ أى $\operatorname{Cosec} x$:

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\sin x \times 0 - 1 \times \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x} \\ \therefore \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x &= -\cot x \cdot \operatorname{cosec} x \end{aligned}$$

ب - تفاضل مقلوب $\cos x$ أى $\sec x$:

$$\begin{aligned} y &= \sec x = \frac{1}{\cos x} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos x \times 0 - 1 \times -\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \sec x \cdot \tan x \\ \therefore \frac{d}{dx} \sec x &= \sec x \tan x. \end{aligned}$$

ج - تفاضل مقلوب $\tan x$ أى $\cot x$:

$$\begin{aligned} y &= \cot x = \frac{1}{\tan x} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\tan x \times 0 - 1 \times \sec^2 x}{\tan^2 x} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = \frac{-1}{\cos^2 x} \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

١١ - ٧ : خلاصة :

ويمكن تلخيص ما سبق في الجدول التالى حتى يسهل حفظه حيث أنها من التفاضلات الهامة الرئيسية والتي كثيراً ما تقابلنا فى حل المسائل .

الدالة $f(x)$	تفاضلها : $\frac{dy}{dx}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$

١١ - ٨ : تفاضل الدوال المثلثية فى الصور المختلفة : -

يستلزم تفاضل الدوال المثلثية تطبيق قاعدة تفاضل دالة الدالة

وكثيراً ما يقتضى الأمر تفاضل دوال مثلثية تحتوى على مضاعفات x مثل ax ، nx والمشتقة الأولى لكل منهما هى a ، n وتظهر كمعامل للمشتقة الأولى فمثلاً : -

$$y = \sin ax$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a \cos ax$$

$$, y = \cos ax$$

$$\therefore y' = -a \sin ax$$

$$, y = \tan ax$$

$$\therefore y' = a \sec^2 ax$$

ونفس الشئ بالنسبة لمقلوب هذه الدوال

وبذلك فإن : -

$$\frac{d}{dx} \sin(3x) = 3 \cos(3x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos\left(\frac{x}{5}\right) = -\frac{1}{5} \sin\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$\frac{d}{dx} \tan\left(\frac{ax}{b}\right) = \frac{a}{b} \sec^2\left(\frac{ax}{b}\right)$$

أما الدوال الأكثر تعقيداً فتكون كالتالى : -

$$y = \sin(ax+b) \therefore \frac{dy}{dx} = a \cos(ax+b)$$

$$y = \sin(\pi + nx) \therefore \frac{dy}{dx} = n \cos(\pi + nx)$$

$$y = \tan(1-x) \therefore \frac{dy}{dx} = -\sec^2(1-x)$$

$$y = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

١١ - ٩ : أمثلة محلولة : -

$$(١) \text{ فاضل } y = \sin^2 x$$

الحل : -

$$\therefore y = (\sin x)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \dot{y} &= 2 \sin x \times \frac{d}{dx} \sin x \\ &= 2 \sin x \cos x \\ &= \sin 2x \end{aligned}$$

$$(٢) \text{ فاضل } y = \sin \sqrt{x}$$

الحل : -

$$\therefore y = \sin x^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \dot{y} &= \cos x^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} \\ &= \cos \sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(٣) فاضل $y = \sin 2x^3$

الحل : - نضع :

$$u = 2x^3$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x^2$$

$$y = \sin u.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \cdot 6x^2$$

$$= 6x^2 \times \cos 2x^3$$

(٤) اوجد مشتقة : $y = \sin^2 (x^5)$

الحل : -

$$\therefore y = [\sin (x^5)]^2$$

$$\therefore y' = 2 \sin (x^5) \times \frac{d}{dx} \sin (x^5)$$

$$= 2 \sin (x^5) \times \cos (x^5) \times \frac{d}{dx} (x^5)$$

$$= 2 \sin (x^5) \times \cos (x^5) \times 5x^4$$

$$= 10 x^4 \sin (x^5) \cos (x^5)$$

$$= 5 x^4 \sin (2x^5) , \quad [\sin 2a = 2 \sin a \cos a]$$

(٥) فاضل $y = \sqrt{\sin x}$ -

الحل : -

$$\therefore y = (\sin x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore y' = \frac{1}{2} (\sin x)^{\frac{-1}{2}} \times \frac{d}{dx} \sin x$$

$$= \frac{1}{2(\sin x)^{\frac{1}{2}}} \times \cos x$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

(٦) اوجد مشتقة : $\cos(3x-4)$

الحل : - نضع $u = 3x - 4$

$$\therefore y = \cos(3x-4) = \cos u.$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\begin{aligned}\therefore y' &= -\sin u \times 3 \\ &= -3\sin(3x-4)\end{aligned}$$

(٧) اوجد مشتقة $\sec^3(2x)$

الحل : - حيث أن : $\sec^3(2x) = [\sec(2x)]^3$

وبوضع $u = \sec(2x)$

$$\therefore y = \sec^3(2x) = [\sec(2x)]^3 = u^3$$

$$\frac{du}{dx} = \sec(2x) \times \tan(2x) \times 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 3u^2 \times 2x \sec(2x) \tan(2x)$$

$$= 3[\sec(2x)]^2 \times 2x \sec(2x) \tan(2x)$$

$$= 6x \sec^3(2x) \tan(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ فاوجد } y = \frac{(1 + \tan x)^2}{x^3}$$

(٨) إذا كانت

الحل : - نستخدم أولاً صيغة تفاضل القسمة :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{x^3 \frac{d}{dx}(1 + \tan x)^2 - (1 + \tan x)^2 \times \frac{d}{dx}x^3}{x^6} \\ &= \frac{x^3(2)(1 + \tan x)(\sec^2 x) - 3x^2(1 + \tan x)^2}{x^6}\end{aligned}$$

$$= \frac{2x^3 \sec^2 x (1 + \tan x) - 3x^2 (1 + \tan x)^2}{x^6}$$

$$= \frac{(1 + \tan x) [2x \sec^2 x - 3(1 + \tan x)]}{x^4}$$

(٩) إذا كانت $y \cot x = \sin(x+y)$ فاوجد y'

الحل : - نفاضل كل عنصر من عناصر المعادلة بالنسبة إلى x

$$\therefore -y \operatorname{cosec}^2 x + y' \cot x = \cos(x+y)(1+y')$$

$$\therefore [\cot x - \cos(x+y)]y' = y \operatorname{cosec}^2 x + \cos(x+y)$$

$$\therefore y' = y \frac{\operatorname{cosec}^2 x + \cos(x+y)}{\cot x - \cos(x+y)}$$

(١٠) اوجد تفاضل الدالة :

$$y = 2 \sin^3(2x^4)$$

الحل : -

$$\frac{dy}{dx} = 2(3) \sin^2(2x^4) \frac{d(\sin 2x^4)}{dx}$$

$$= 6 \sin^2(2x^4) \cos(2x^4) \frac{d(2x^4)}{dx}$$

$$= 48 x^3 \sin^2(2x^4) \cos(2x^4).$$

(١١) اوجد مشتقة الدالة :

$$x = 2\sqrt{4 \sin y - 6 \cos y}.$$

الحل : -

$$x = 2(4 \sin y - 6 \cos y)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = 2 \left(\frac{1}{2} \right) (4 \sin y - 6 \cos y)^{-\frac{1}{2}} (4 \cos y + 6 \sin y)$$

$$= \frac{1}{(4 \sin y - 6 \cos y)^{\frac{1}{2}}} (4 \cos y + 6 \sin y)$$

$$= \frac{4 \cos y + 6 \sin y}{\sqrt{4 \sin y - 6 \cos y}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\sqrt{4 \sin y - 6 \cos y}}{4 \cos y + 6 \sin y} = \frac{x}{4(2 \cos y + 3 \sin y)}$$

(١٢) اوجد مشتقة الدالة :

$$y = \sin(\cos x) + \sin x \cos x$$

الحل :-

لإيجاد مشتقة الدالة ، نستخدم الصيغة :-

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

ثم نستخدم تفاضل حاصل الضرب للحد الأخير بالمعادلة .

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos(\cos x)(-\sin x) + [(\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)] \\ &= -\sin x \cos(\cos x) - \sin^2 x + \cos^2 x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x \cos(\cos x) \end{aligned}$$

$$\because \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \quad (\text{متطابقة})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos 2x - \sin x \cos(\cos x)$$

(١٣) فاضل الدالة :-

$$y = \sin nx \sin^n x$$

الحل :-

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sin nx \frac{d}{dx} [\sin x]^n + \sin^n x \times \frac{d}{dx} (\sin nx) \\ &= \sin nx \cdot n(\sin x)^{n-1} \cdot \frac{d}{dx} (\sin x) + \sin^n x \cos nx \frac{d}{dx} (nx) \\ &= n \sin nx \cdot \sin^{n-1} x \cos x + n \sin^n x \cos nx \end{aligned}$$

$$= n \sin^{n-1} x (\sin nx \cos x + \cos nx \sin x)$$

$$= n \sin^{n-1} x \sin (n+1) x$$

وفيما يلي موجز في صورة جدول لقيم بعض الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة مقاسة

بالتقدير الدائري وبالدرجات .

$\theta \begin{cases} 0^\circ \\ 0 \end{cases}$		$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2} = 0.50$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.71$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.87$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.87$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.71$	$\frac{1}{2} = 0.50$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0.58$	1	$\sqrt{3} = 1.73$	∞

Exercise 11

فى كل من المسائل التالية أوجد قيمة الزاوية المركزية بالتقدير الدائرى وبالدرجات ،
بمعلومية نصف قطر الدائرة وطول القوس المقابل للزاوية .

١ - نصف القطر	12 m	وطول القوس	4 m
٢ - نصف القطر	16 ft	وطول القوس	4 ft
٣ - نصف القطر	2 cm	وطول القوس	8 cm
٤ - نصف القطر	5 m	وطول القوس	$\pi .m.$
٥ - نصف القطر	20 cm	وطول القوس	0.2 m

فاضل كل من التالى : -

$5 \sin x - 7$	$\sin 5x - 6$
$\tan \frac{x}{2} - 9$	$\cos \frac{x}{3} - 8$
$\operatorname{cosec} \left(\frac{x}{6} \right) - 11$	$\sec (0.6 x) - 10$
$\sin 2x - \cos 2x - 13$	$\sin 3x + \cos 3x - 12$
$\sin 4x + \cos 5x - 15$	$\sec x + \tan x - 14$
$\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) - 17$	$\cos \frac{\theta}{3} + \sin \frac{\theta}{4} - 16$
$\operatorname{cosec} \left(A - \frac{7}{2}x \right) - 19$	$\cos (3\pi - x) - 18$
$\sin x^6 - 21$	$\sin^4 x - 20$
$\sec x^2 - 23$	$\cos^3 (4x) - 22$
$a \sin nx + b \cos nx - 25$	$\tan \sqrt{1-x} - 24$
$3 \tan \frac{x}{3} - 27$	$B (1 - \cos x) - 26$
$\tan 3x - \tan^3 x - 29$	$\cos \left(3x + \frac{\pi}{2} \right) - 28$
$\cos \frac{a}{x} - 31$	$x^3 + 3 \sin \frac{x}{4} - 30$

$$\begin{aligned}\frac{x}{2 \sin x} &= 33 \\ 2x \tan x &= 30 \\ \frac{\tan x}{x} &= 37 \\ \cos^3(x^2) &= 39 \\ \cot(4x+1) &= 41 \\ x^3 \cos 2x &= 42 \\ \frac{1+\cos x}{1-\sin x} &= 40 \\ \sqrt[3]{\cos x} &= 47 \\ \sin^2 x - \cos^2 x &= 49 \\ \frac{x^2}{\cos 2x} &= 51 \\ \frac{\tan x - 1}{\sec x} &= 53 \\ 3 \sin(2\pi x) &= 55 \\ \frac{2}{2-\tan x} &= 57\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x \sin x &= 32 \\ \sin^3(x^2) &= 34 \\ \frac{x}{3 \tan x} &= 36 \\ \sin 3x + \sin(3x)^2 &= 38 \\ x^2 \tan x &= 40 \\ \frac{\sqrt{x}}{\sin x} &= 42 \\ \frac{2}{2+\cos x} &= 44 \\ \cot^2 3x &= 46 \\ \sin 2x \cos 2x &= 48 \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 50 \\ \frac{\sin^2 x}{1+\sin x} &= 52 \\ x \sqrt{\sin x} &= 54 \\ \sec^2 x \operatorname{cosec} x &= 56\end{aligned}$$

فاضل كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned}y &= \cos 4x - 59 \\ y &= \cos^4 x - 61 \\ S &= t^2 \cos^2 t - 63 \\ S &= \frac{\sin 2t}{2t} - 65 \\ w &= \frac{a - \tan z}{a + \tan z} - 67 \\ w &= \operatorname{cosec}(1-z) - 69\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \sin 5x - 58 \\ y &= \sin x^2 - 60 \\ y &= \sqrt{\sin 3x} - 62 \\ S &= \sin(t+2) \cos t - 64 \\ S &= \frac{a + \cos t}{a - \cos t} - 66 \\ w &= \sec 5z - 68\end{aligned}$$

$$w = \frac{\sec z}{1 + \sec z} - ٧١$$

$$y = z^3 \sec z - ٧٠$$

$$y = \frac{\sin^3 (1-x^2)}{x} - ٧٢$$

أوجد y في كل من المسائل التالية :-

$$x^2 \tan y + y \tan x = 0 - ٧٤ \quad y \sin x + \cos (x+y) = 0 - ٧٣$$

$$y^2 \sec x + \cos x^2 = 0 - ٧٥$$

٧٦ - فاضل عناصر المتطابقة التالية للحصول على متطابقة مثلثية جديدة : -

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

٧٧ - فاضل عناصر المتطابقة التالية للحصول على متطابقة مثلثية جديدة : -

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

فاضل الدوال التالية : -

$$y = x^2 \sin x - ٧٨$$

$$y = x^2 \tan x - ٧٩$$

$$y = \sqrt{x} \cot x - ٨٠$$

$$y = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} - ٨١$$

$$y = \sqrt{2x - \sin 2x} - ٨٢$$

$$y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x} - ٨٣$$

$$y = \cot^3 \frac{x}{3} - ٨٤$$

$$y = \sqrt{\theta + \cos^2 \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right)} - ٨٥$$

$$y = \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x - ٨٦$$

$$y = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) - ٨٧$$

١١ - ١٠ : - التفاضل المتتالى للدوال المثلثية : successive derivatives

$$\begin{aligned} y &= \sin x && \text{لتكن} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \cos x \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\sin x \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= -\cos x \\ \frac{d^4 y}{dx^4} &= \sin x \end{aligned}$$

فإذا ما واصلنا هذه العملية فإن المشتقات السابق حسابها تستمر فى التكرار دون ما نهاية .

ونعلم من حساب المثلثات أن :-

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

وبذلك فإنه يمكن كتابة المشتقات المتتالية السابقة كالتالى :-

$$\begin{aligned} \therefore y &= \sin x \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left\{ \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ &= \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \sin \left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \sin \left(x + \frac{2\pi}{2} \right) \\ &= \sin(x + \pi) \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{d}{dx} [\sin(x + \pi)] \end{aligned}$$

$$= \cos x (x + \pi) = \sin \left(x + \pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \sin \left(x + \frac{3\pi}{2} \right)$$

وسوف تستمر العملية هكذا وذلك بزيادة قدرها $\frac{\pi}{2}$ فى كل مرة وتظهر لنا دورياً دالة الجيب مما يدعونا إلى الاستنتاج التالى : -

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على التفاضل المتالى للدالة $\cos x$ أما الدوال التالية فهي أكثر تعقيداً مثل : -

$$\tan x , \sec x , \operatorname{cosec} x , \cot x$$

فبعد عدة تفاضلات ستصبح العملية بحيث يصعب وضعها فى صيغة عامة

١١ - ١١ : - القيم العظمى والصغرى للدوال المثلثية :

Maximum and minimum values of trigonometric functions

$$(1) \quad y = \sin x , y = \cos x$$

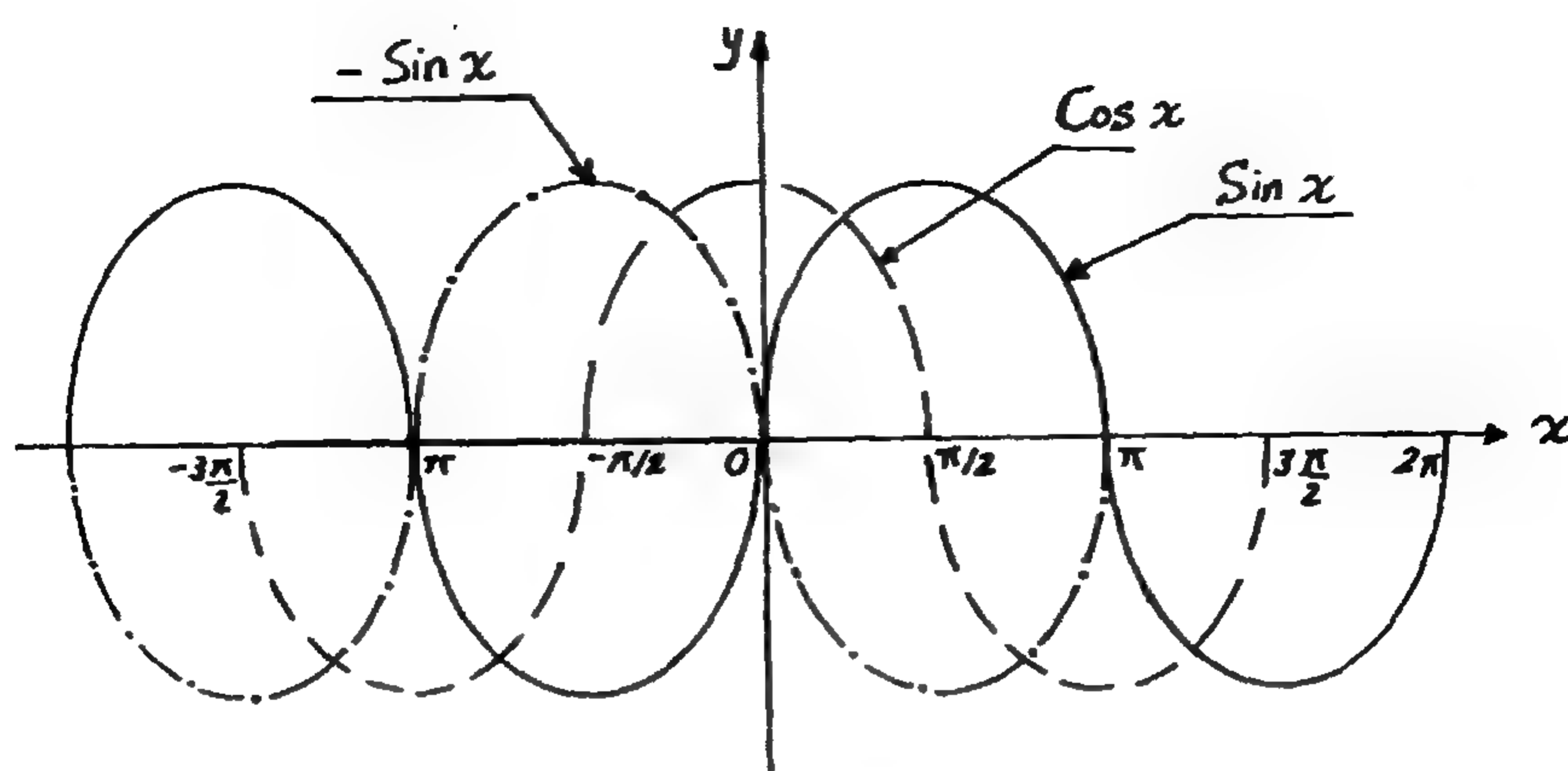
$$(1) \quad \dots\dots\dots y = \sin x \quad \text{عندما تكون}$$

$$(2) \quad \dots\dots\dots \therefore \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$(3) \quad \dots\dots\dots , \frac{d^2 y}{dx^2} = -\sin x$$

والشكل (١١-٤) يوضح هذه الدوال الثلاث فالمنحنى ذو الخط السميك هو منحنى

$$\sin x , \text{ بينما الخط المتقطع يمثل } \frac{dy}{dx} \text{ فى حين يمثل الخط الرفيع } \frac{d^2 y}{dx^2}$$



شكل (١١ - ٤)

الدالة الدورية : - Aperiodic Function

حيث أن : $\sin x = \sin (x + 2\pi)$ لذلك فإن جزء المنحنى فيما بين $x=0$ ، $x=2\pi$ سوف يتكرر لدورات أو لفترات مقدارها 2π كلما زادت x ونفس الشيء يتكرر فى الاتجاه السالب لمحور السينات ($x-axis$) .
وعليه فإن جزء المنحنى فيما بين 0 ، 2π سوف يتكرر عدداً لا نهائياً من المرات فيما بين $(-\infty , +\infty)$ وكلها متصلة على شكل منحنى موجى .
، الدالة $y = \sin x$ مثال لما يُطلق عليه بالدوال الدورية ، ويُطلق على العدد 2π بدورة الدالة .

وفيما يلى سنتعرض لشرح منحنى $\sin x$ بحيث يزداد وضوح ما سبق دراسته عن تزايد وتناقص الدوال:

(١) أنواع تقوس المنحنى $\sin x$:

نلاحظ من الرسم أن المنحنى فيما بين 0 ، 2π يشتمل على أربعة أنواع من التقوس السابق شرحها فى الباب السابع بينما المنحنى الممثل للدالة $\frac{dy}{dx}$ فهو يوضح العلاقة بين صور التقوس هذه وإشارة المعامل التفاضلى .

(ب) نقط التحول على المنحنى $\sin x$: -

يتضح من الرسم أنه توجد نقطتا تحول فيما بين $x=0$, $x=2\pi$ عند A , B وقيمها $+1$, -1 على الترتيب

$$\text{ف عند } A \text{ حيث } x = \frac{\pi}{2} , \frac{dy}{dx} = 0 , \frac{d^2y}{dx^2} = (-ve)$$

فإنه توجد نهاية عظمى

$$\text{وعند } B , x = \frac{3\pi}{2} , \frac{dy}{dx} = 0 , \frac{d^2y}{dx^2} = (+ve)$$

فإنه توجد نهاية صغرى .

وهذا الشئ يتكرر مع زيادة x كل فترة قدرها 2π من $-\infty$ إلى $+\infty$ وبالتالي فهناك عدد لا نهائى من نقط النهايات العظمى والصغرى على التوالى .

(ج) نقط الانقلاب على المنحنى $\sin x$: -

وفى خلال هذه الدورة (2π) توجد هنالك نقطتا انقلاب وهما (C , D) فعند " C " يتغير المنحنى من مقعر للأسفل إلى مقعر للأعلى وتكون $\frac{dy}{dx}$ أقل ما يمكن

$$(-1) \text{ بينما تكون } \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ وتتغير من سالب إلى موجب .}$$

وبالتالى فإن " C " تكون ذات أقل ميل ومقداره يعادل قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند هذه النقطة (-1)

$$\text{أى أن المنحنى يعبر محور } OX \text{ بزاوية } 135^\circ = \frac{3\pi}{4} .$$

وعند نقطة " D " يحدث العكس حيث يتغير شكل المنحنى من مُقعر للأعلى إلى مقعر

للأسفل وتكون $\frac{dy}{dx}$ أكبر ما يمكن ، $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ وتتغير إشارتها من موجب إلى سالب

وبذلك فإن " D " تكون نقطة ذات أكبر ميل وهو يساوى $+1$ ويقطع المنحنى المحور

OX على زاوية $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ كما أنه توجد نقطة انقلاب عند $x=0$ (نقطة الأصل) .

والشكل يُفسر كل ما هو مدون بجدول (٧ - ١) بالباب السابع .

أما بالنسبة لمنحنى $\cos x$ فهو نفسه منحنى $\sin x$ إلا أنه متحركاً (متزاحاً) لليسار على محور OX بمقدار $\frac{\pi}{2}$.

ويمثله فى الشكل السابق (١١ - ٤) منحنى $\frac{dy}{dx}$ المتقطع وهو يقطع محور OX عند $\dots, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

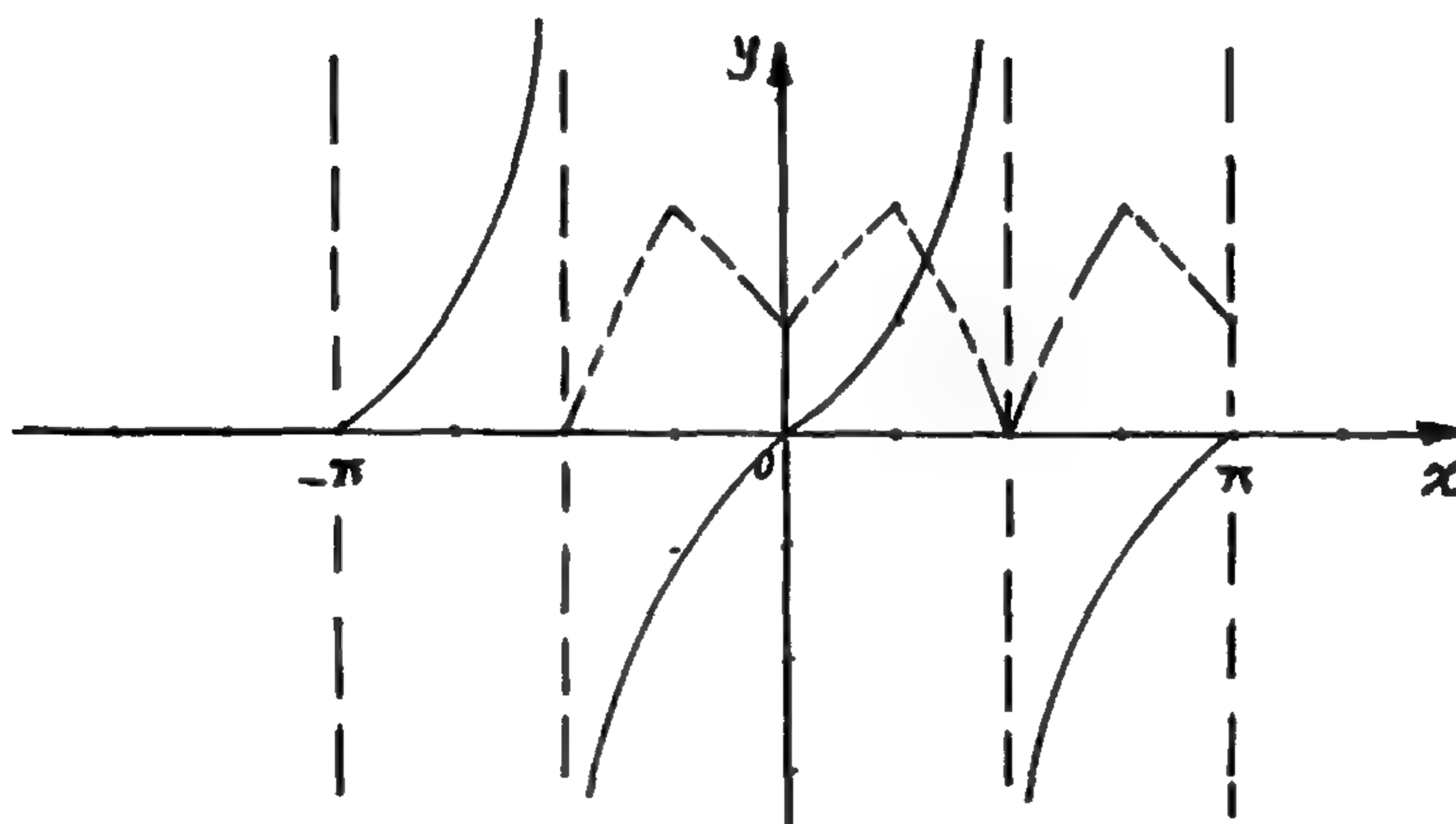
$$(2) \quad y = \tan x, \quad y = \cot x$$

$$\therefore y = \tan x, \quad \therefore y = \cot x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec^2 x, \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \sec^2 x \tan x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \operatorname{cosec}^2 x \cot x$$

ويوضح الشكل (١١ - ٥) منحنى $\tan x$ وكذلك منحنى مشتقتها الأولى $\sec^2 x$ (المتقطع بالشكل).



شكل (١١ - ٥)

وفيما يلى بعض خواص منحنى $y = \tan x$:

(١) المنحنى غير متصل وعندما $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ فإن $\tan x \rightarrow +\infty$ وعند الاقتراب من $\frac{\pi}{2}$

فإن كل زيادة طفيفة فى x ينشأ عنها زيادة كبيرة فى قيمة y (تصل فى النهاية إلى ما لا نهاية) . وعند عبور $\frac{\pi}{2}$ فإن أى زيادة طفيفة فى x تؤدي إلى أن تكون الزاوية فى الربع الثانى وبذلك يكون الميل سالب ، بينما تبقى قيمته كبيرة جداً (لا نهائية) .

وتؤدي هذه الزيادة الطفيفة فى x إلى تغير قيمة y من $-\infty$ إلى $+\infty$.

وهذا هو السبب الرئيسى فى عدم استمرارية المنحنى واتصاله وتكرر العملية عند $x = \frac{3\pi}{2}$ ، عند $x = \frac{5\pi}{2}$ ، ... الخ .

(ب) منحنى $\tan x$ هو منحنى دورى ودورته مقدارها π .

(ج) الدالة دائماً متزايدة بزيادة x وهذا يُعرف من أن $\frac{dy}{dx}$ هى تساوى $\sec^2 x$ دائماً موجبة .

(د) توجد نقطة انقلاب عندما $x = \pi$ ويتغير شكل المنحنى من مقعر للأسفل إلى مقعر للأعلى ويكون المعامل التفاضلى أى $\sec^2 x$ أقل ما يمكن وبقية $= +1$.

وهذا يعنى أن المنحنى يقطع محور OX على زاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ كما وتظهر نقط انقلاب أخرى عند $x=0$ وعند أى مضاعفات صحيحة لـ π أى عند $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

وحيث أن $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ لذلك فإن منحنى $\cot x$ يكون معكوس أو مقلوب

منحنى $\tan x$ ، فهو دائماً متناقص لأن $(-\operatorname{cosec}^2 x)$ دائماً سالبة كما أنه منحنى دورى كذلك وتكون نقط انقلابه عند $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, \dots$

وعلى القارئ أن يحاول رسم هذا المنحنى كتدريب له

$$(3) \quad y = \operatorname{cosec} x, \quad y = \sec x$$

يمكن معرفة نقط تحول هذه المنحنيات من مقلوباتها التى سبق دراستها فعندما تكون $\sin x$ فى أقصى قيمة لها تكون $\operatorname{cosec} x$ فى أقل قيمها ، كما وأن هذه المنحنيات دورية وتظهر نقط النهاية العظمى والصغرى على التابع .

فإذا كانت :

$$y = \operatorname{cosec} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

$$\text{وعندما } x = \frac{\pi}{2} \text{ فإن } -\operatorname{cosec} x = -1, \cot x = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

كما وأن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تكون موجبة

وعليه فإنه توجد نهاية صغرى عندما $x = \frac{\pi}{2}$ ، وكلاً من المنحنيين غير متصلين

ودوريين .

١١ - ٢ : أمثلة محلولة :-

اوجد نقط التحول على المنحنى :-

$$y = \sin x + \cos x$$

الحل :-

$$\therefore y = \sin x + \cos x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$$

$$\text{وعند نقط التحول تكون } \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \cos x - \sin x = 0$$

$$\therefore \sin x = \cos x$$

$$\therefore \frac{\sin x}{\cos x} = 1 = \tan x = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

وهي أصغر زاوية في سلسلة من الزوايا التي يكون الميل عندها $+1 =$ وهذه الزوايا

تجمعها صيغة رياضية عامة كالتالى :-

$$n\pi + \frac{\pi}{4}$$

وبوضع $n = 0, 1, 2, \dots$

∴ الزوايا التي تظهر عندها نقط تحول في الدالة المعطاة هي : $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots$

$$\because \frac{d^2y}{dx^2} = -(\sin x + \cos x)$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots$$

وهي سالبة عندما تكون :

$$x = \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$$

وتكون موجبة عندما تكون :

وواضح أن المنحنى دورى وتظهر قيمته العظمى والصغرى على التوالى كالتالى : -

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots$$

أقصى قيم عند

$$x = \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \dots$$

أقل قيم عند

وعندما تكون $x = \frac{\pi}{4}$ فإن أقصى قيمة للدالة :

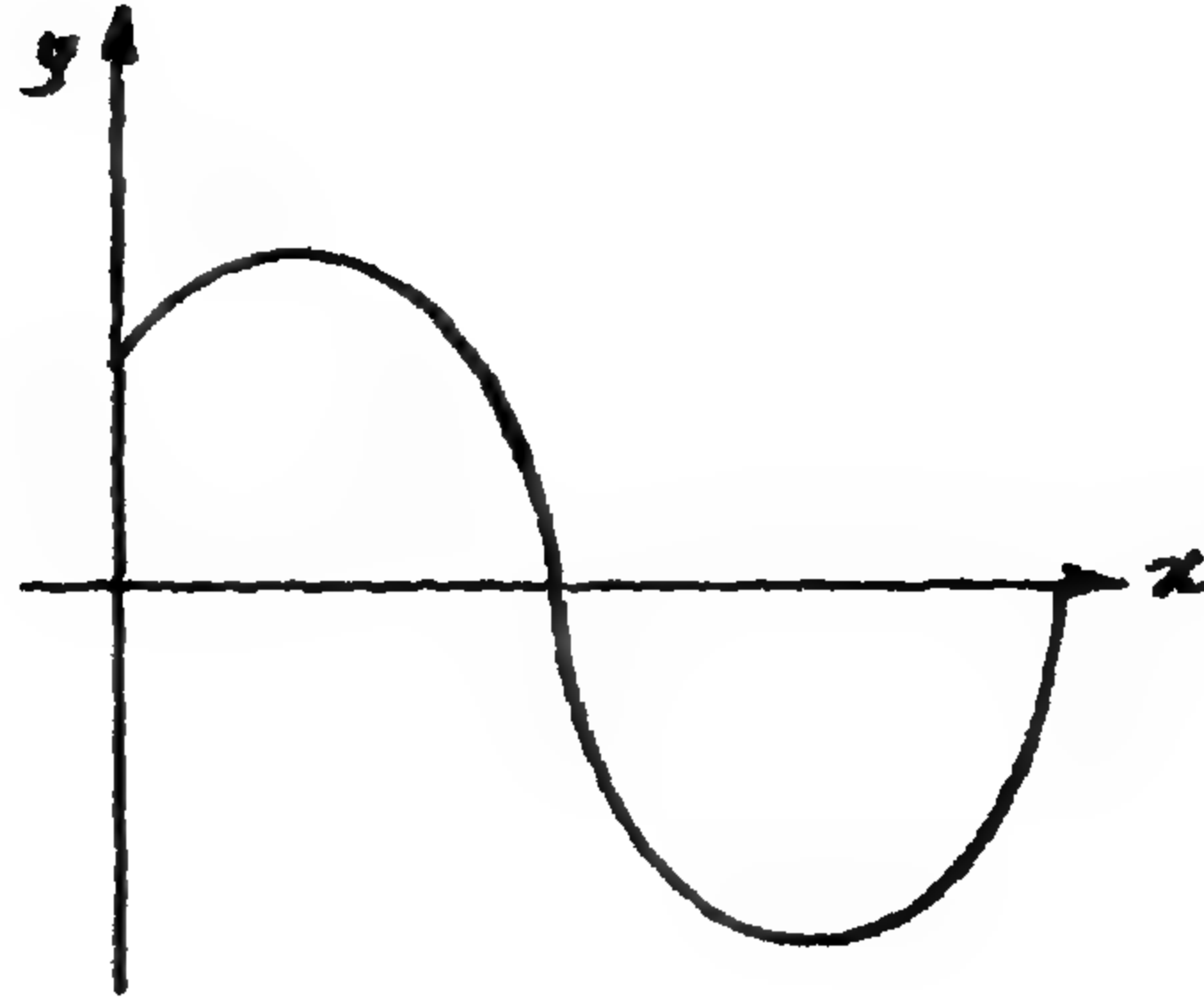
$$\begin{aligned} \max \text{ value} &= \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

وبنفس الطريقة فإن أقل قيمة للدالة .

$$\begin{aligned} \min. \text{ value} &= \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

ويوضح الشكل (١١ - ٦) ، المنحنى حيث P أقصى قيمة للدالة ، Q أقل قيمة

وواضح أن A هي نقطة انقلاب .



شكل (١١ - ٦)

ويكون رسم المنحنى ، برسم منحنى $\sin x$ ، منحنى $\cos x$ ثم يتم جمع المنحنيين في منحنى واحد وذلك بجمع قيم y عند كل نقطة .

ومثل هذا المنحنى يعتبر مثال لما يُطلق عليه بالمنحنى الهارمونى Harmonic Curve أو منحنى موجى Wave diagram .

وهى ذات أهمية كبيرة خاصة فى مجال الهندسة الكهربائية .

Exercise 12

عند أى قيم لـ x ، فى خلال المدى $0 < x < \pi$ توجد قيم عظمى أو صغرى للدوال التالية ثم حدد نوعيتها .

$$\sin 2x - x \quad (١)$$

$$\sin^2 x \cos^2 x \quad (٢)$$

$$\sin x + \cos 2x \quad (٣)$$

$$\sin x + \sin x \cos x \quad (٤)$$

$$\frac{\sin x}{1 + \tan x} \quad (٥)$$

$$2 \sin x + \cos x \quad (٦)$$

(٧) حدد أصغر قيمة لـ x والتي تجعل الدالة : -

$$2 \sin x + 3 \cos x$$

فى أقصى قيمة لها .

(٨) حدد أصغر قيمة لـ x والتي تجعل الدالة : -

$$\tan^2 x - 2 \tan x$$

ذات قيمة عظمى أو صغرى .

الباب الثانى عشر

تفاضل الدوال المثلثية العكسية

Differentiation of The inverse trigonometric (circular) functions

١٢ - ١ : - عام :

إذا اعتبرنا الدالتين $y = \sin x$ ، الدالة $x = \sin y$

سنجد أن منحنى الدالة $y = \sin x$ يتموج حول محور السينات كما سبق وأن بينا .
وبنفس الطريقة سنجد أن منحنى الدالة $x = \sin y$ يتموج حول محور الصادات تماماً
مثل المنحنى الأول عند إدارة المحاور حول نقطة الأصل بزاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ في عكس
اتجاه عقارب الساعة .

وفى الدالة $y = \sin x$ حيث الجيب دالة فى الزاوية وعند تغير قيمة x فإن قيمة
الجيب تتغير بالتبعية وهذا يعنى أن x هى المتغير المستقل بينما y هى المتغير التابع .
وفى الدالة $x = \sin y$ فإن الزاوية هنا دالة فى الجيب وبذلك فإن الجيب هنا هو
المتغير المستقل بينما الزاوية x هى المتغير التابع وعليه فإنه عند تغير جيب الزاوية فإن x
تتغير بالتبعية .

ويمكن التعبير عن الدالة $x = \sin y$ بالدالة $x = \sin^{-1} y$ ، هنا تعنى الزاوية التى
جيبها x .

أى أن $x = \sin y$ هى نفسها $x = \sin^{-1} y$.

، (-1) هنا لا تعنى أن الجيب مرفوعاً للأس (-1) مثل $[Z^{-1}$ أو $\frac{1}{Z}$ ومثل Z^{-2} أو $\frac{1}{Z^2}$]
ولكنها تعنى الدالة العكسية للجيب .

وبالمثل فإن كل الدوال المثلثية الأخرى لها دوال مثلثية عكسية مثل : -

$$y = \cos^{-1} x , y = \tan^{-1} x , y = \sec^{-1} x , y = \cot^{-1} x , y = \operatorname{cosec}^{-1} x .$$

١٢ - ٢ : - تفاضل الدالة $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$

لتكن : $y = \sin^{-1} x$

$$\therefore x = \sin y$$

وبتفاضل x بالنسبة إلى y :

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\therefore \sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$\therefore \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

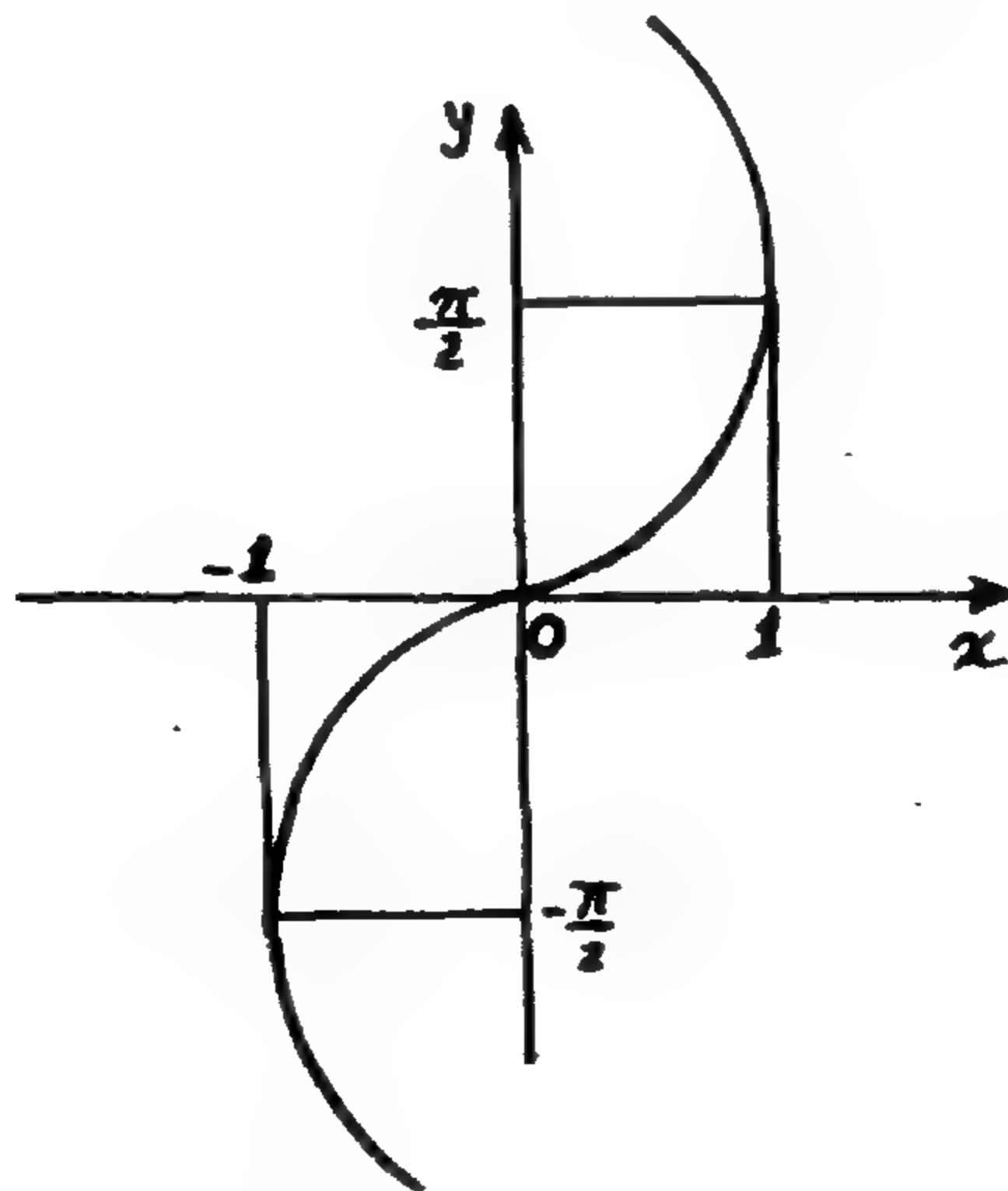
$$y = \cos^{-1} x$$

وبالمثل فإنه إذا كانت :

$$\therefore \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

وبمساعدة رسم الدالة $y = \sin^{-1} x$ ، نلاحظ الآتي على هذه الدوال وعلى معاملاتها

التفاضلية . ، انظر الرسم شكل (١٢ - ١) .



شكل (١٢ - ١)

(١) الدالة متعددة القيم بمعنى أنه لأي قيمة لـ x ، يوجد عدد لا نهائي لقيم y بينما الدالة $y = \sin x$ وحيدة القيمة حيث أنه لكل قيمة لـ x توجد قيمة واحدة لـ y وتساوى $\sin x$

(٢) حيث أن $\sin y$ تقع بين -1 , $+1$ لذلك فالدالة $\sin^{-1} x$ تكون موجودة فقط بين قيمتي x هذه

(٣) حيث أنه يوجد عدد لا نهائي من الزوايا لها نفس الجيب لذلك فإنه لأي قيمة لـ x تقع فيما بين -1 , $+1$ ، يوجد عدد لا نهائي من النقاط على المنحنى . فمثلاً : -
إذا كانت $x = +\frac{1}{2}$ فإن قيم y عند P, Q, R, \dots تمثل ثلاث من الزوايا التي جيب كل منها $= +\frac{1}{2}$ وعند Q تكون الزاوية هي أصغر زاوية موجبة .

(٤) المعامل التفاضلي للمقدار $\sin^{-1} x$ وهو $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، يكون موجباً أو سالباً ،

فبالرجوع للشكل (١٢ - ١) نجد أن كل النقط مثل Q حيث يكون ميل المنحنى ممثلاً في المماس ، صانعاً زاوية حادة ، فإن $(d.c.)$ ، المعامل التفاضلي يكون موجباً .
بينما في نقطة مثل P وكذلك R فإن زاوية ميل المماس تكون منفرجة وبالتالي فإن المعامل التفاضلي $(d.c.)$ يكون سالباً .

(٥) حيث أن x تقع بين -1 , $+1$ ، لذلك فإن المقدار $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، لا يمكن أن ينعدم

" أي أن قيمة ما تحت الجذر دائماً أكبر من الصفر "

وبالتالي فإنه لا توجد نقط نهاية عظمى أو صغرى على المنحنى (مناظرة لقيم x التي تقل عن $+1$ وتزيد عن -1 أي $-1 < x < 1$)

وعندما تكون $x = \pm 1$ تماماً فإن قيمة المقدار : $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ تساوى الصفر مثل النقط

A, B

حيث يكون مماس المنحنى عمودياً على محور $X'OX$

١٢ - ٣ : - تفاضل الدالة : $\tan^{-1} x$, $\cot^{-1} x$

إذا كانت

$$y = \tan^{-1} x$$

$$\therefore x = \tan y$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة إلى y

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

وبالمثل ، إذا كانت :

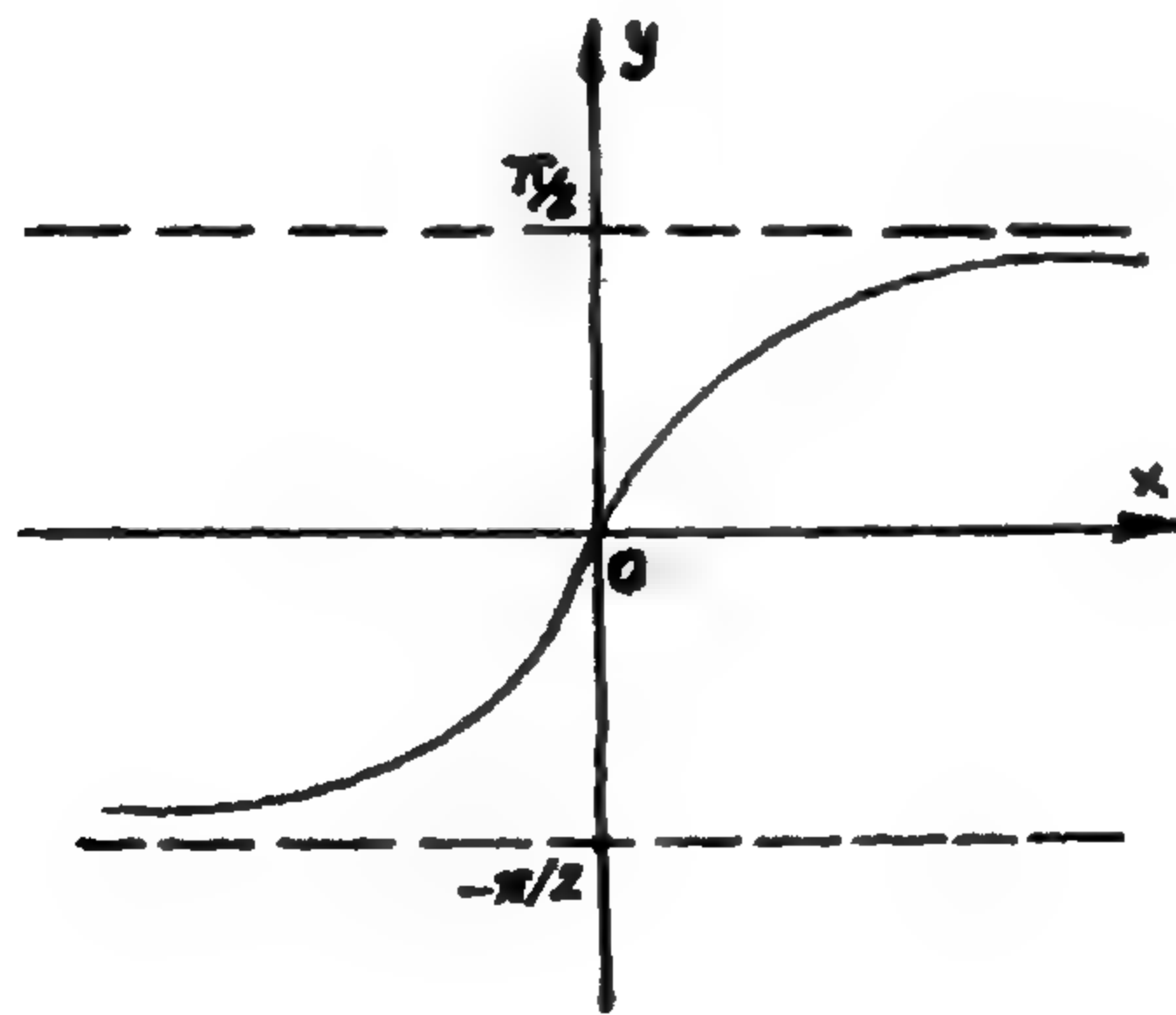
$$y = \cot^{-1} x$$

$$\therefore x = \cot y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 + x^2}$$

وبمساعدة رسم الدالة $y = \tan^{-1} x$ ، نلاحظ الآتي على هذه الدوال :

$[\tan^{-1} x , \cot^{-1} x]$ انظر الرسم شكل (١٢ - ٢) .



شكل (١٢ - ٢)

(١) $\frac{dy}{dx}$ دائماً موجبة ، وعليه فإن y دائماً تتزايد

(٢) $\frac{dy}{dx}$ لا تنعدم أبداً لأى قيمة لـ x وبذلك فلا توجد نقط تحول (عظمى أو صغرى)

(٣) تظهر نقط الانقلاب عندما : $y = 0, \pi, 2\pi, -\pi, \dots$ ويكون ميل المماس عندها موجباً .

كما وأن منحنى $y = \cot^{-1} x$ هو عكس هذا المنحنى (١٢ - ٢) حيث تكون $\frac{dy}{dx}$ دائماً سالبة وبالتالي فالدالة دائماً تتناقص ولا توجد نقط تحول (عظمى أو صغرى) ولكن توجد مجموعة من نقط الانقلاب عندما يكون الميل سالباً ويمكن للقارئ أن يتدرب على رسم هذا المنحنى ($y = \cot^{-1} x$)

١٢ - ٤ : - تفاضل الدالة : $y = \sec^{-1} x, y = \operatorname{cosec}^{-1} x$

إذا كانت : $y = \sec^{-1} x$

$$\therefore x = \sec y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec y \tan y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

$$, \tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{ولكن :}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

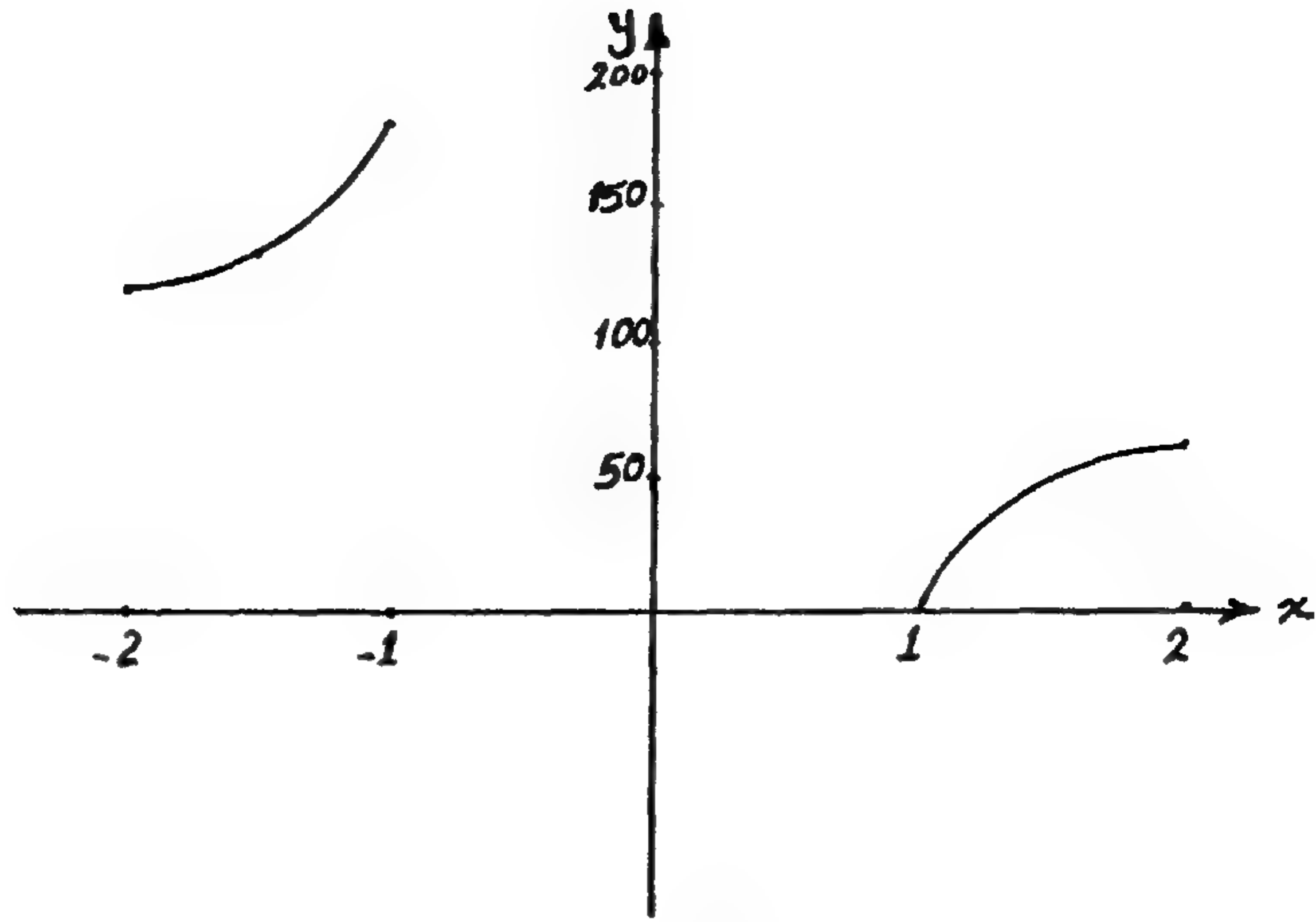
وبالمثل إذا كانت : $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

ويمثل الشكل (١٢ - ٣) ، أجزاء من هذا المنحنى $[y = \sec^{-1} x]$ ويلاحظ أنه

متعدد القيم وغير متصل ولا يوجد أى جزء من المنحنى فيما بين قيم x :

$$(x = -1, x = +1) \text{ أى أن } -1 > x > +1 .$$



شكل (١٢ - ٣)

كما أن $\frac{dy}{dx}$ أى $\left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \right)$ ؛ لا تنعدم لأى قيمة محددة لـ x وبذلك فلا توجد هنالك نقط تحول إلا أنه عندما تكون $x = \pm 1$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تصبح مساوية لما لا نهاية (أى المقام يصبح صفراً)

كما فى حالة منحنى $y = \sin^{-1} x$ وكذلك منحنى $y = \cos^{-1} x$

خلاصة :-

فيما يلى بيان لتفاضل الدوال العكسية المثلثية ، يمكن الرجوع إليها عند الحاجة إلا أنه يفضل (حفظها) كتفاضلات رئيسية .

الدالة	dy / dx
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot^{-1} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{cosec}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

جدول رقم (١٢ - ١)

ونذكر فيما يلي موجز لبيان مجال domain الدوال المثلثية العكسية "الستة" :

$y = \sin^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \cos^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$
$y = \tan^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$
$y = \cot^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < \cot^{-1} x < \pi$
$y = \sec^{-1} x$	$ x \geq 1$	$0 \leq \sec^{-1} x \leq \pi$
$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$	$ x \geq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{cosec}^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$

جدول (١٢ - ٢)

كما يجب كذلك ملاحظة أن : -

$$\sin^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\tan^{-1} \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

$$\sec^{-1} \frac{x}{a} = \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\cos^{-1} \frac{x}{a} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\cot^{-1} \frac{x}{a} = \frac{-a}{a^2 + x^2}$$

$$\operatorname{cosec}^{-1} \frac{x}{a} = -\frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$$

١٢ - ٥ : - أمثلة محلولة :

(١) أوجد مشتقة الدالة : $y = \sin^{-1} x^2$

الحل : -

باستخدام قاعدة دالة الدالة :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} \times \frac{d}{dx} x^2 \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}} \end{aligned}$$

(٢) أوجد مشتقة الدالة $y = \tan^{-1} \frac{1}{x^2}$

الحل : -

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2} \times \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{x^4}} \times \frac{-2}{x^3} \\ &= \frac{x^4}{x^4 + 1} \times \frac{-2}{x^3} = \frac{-2x}{x^4 + 1}\end{aligned}$$

(٣) اوجد مشتقة الدالة $y = x^2 \sin^{-1} (1 - x)$

الحل : - باستخدام قاعدة حاصل الضرب :

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= 2x \sin^{-1} (1 - x) + x^2 \times \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}} \times \frac{d}{dx} (1 - x) \\ &= 2x \sin^{-1} (1 - x) + \frac{x^2}{\sqrt{1 - (1 - 2x + x^2)}} \times -1 \\ &= 2x \sin^{-1} (1 - x) - \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}}\end{aligned}$$

(٤) إذا كانت $y = \sin^{-1} (x^2 - 1)$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل : -

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{d}{dx} (x^2 - 1)}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}} = \frac{2}{\sqrt{2 - x^2}}\end{aligned}$$

(٥) فاضل الدالة : $y = (\tan^{-1} \sqrt{x})^3$

الحل : -

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3 \left(\tan^{-1} \sqrt{x} \right)^2 \times \frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \sqrt{x} \right) \\ &= 3 \left(\tan^{-1} \sqrt{x} \right)^2 \times \frac{\frac{d}{dx} \sqrt{x}}{1+x} \\ &= \frac{3 \left(\tan^{-1} \sqrt{x} \right)^2}{2\sqrt{x} (1+x)}\end{aligned}$$

$$y = x \cos^{-1} \frac{1}{x} \quad - \text{ (٦) فاضل :}$$

الحل : -

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{-x \left(-1/x^2 \right)}{\sqrt{1 - 1/x^2}} + \cos^{-1} \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x \sqrt{1 - 1/x^2}} + \cos^{-1} 1/x \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \cos^{-1} \frac{1}{x}\end{aligned}$$

$$y = \arcsin 4x \quad \text{أوجد تفاضل الدالة (٧)}$$

الحل : -

$$\because \arcsin x \text{ means } \sin^{-1} x, u = 4x \therefore \frac{du}{dx} = 4$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d}{dx} \sin^{-1} 4x &= \frac{d}{dx} \sin^{-1} u \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (4x)^2}} \times 4 \\ &= \frac{4}{\sqrt{1 - 16x^2}}\end{aligned}$$

$$(٨) \text{ اوجد ميل الدالة : } y = 4x \arctan 2x \text{ عند النقطة } x = \frac{1}{2}$$

الحل : - لإيجاد ميل الدالة نوجد مشتقتها ، والدالة y هى عبارة عن حاصل ضرب دالتين فى x $[arc \tan 2x ، 4x]$ ولذلك نستخدم قاعدة الضرب فى إيجاد مشتقة هذه الدالة .

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 4x \left[\frac{1}{1+(2x)^2} \cdot \frac{d}{dx} (2x) \right] + arc \tan 2x \times \frac{d}{dx} (4x) \\ &= \frac{8x}{1+4x^2} + 4 arc \tan 2x\end{aligned}$$

وبوضع $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{4}{2} + 4 arc \tan 1 \\ &= 2 + 4 \left(\frac{\pi}{4} \right) = 5.14\end{aligned}$$

(٩) اوجد مشتقة الدالة : $y = \sqrt{arc \sin 2x}$

الحل : - لحل المسألة نستخدم القاعدة :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (u^n) &= n u^{n-1} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \sin^{-1} u &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (arc \sin 2x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (arc \sin 2x)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \right] 2$$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{1}{\sqrt{arc \sin 2x}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{arc \sin 2x - 4x^2} arc \sin 2x}\end{aligned}$$

(١٠) اوجد مشتقة الدالة : $y = arc \tan \frac{x-a}{1+ax}$ حيث a ثابت .

الحل : - نستخدم فى حل هذه المسألة ، مشتقة الدالة العكسية للظل $(arc \tan)$:

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

وكذلك قاعدة القسمة :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{V \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{x-a}{1+ax} \right) = \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{x-a}{1+ax} \right)^2} \right] \left[\frac{(1+ax)(1) - (x-a)(a)}{(1+ax)^2} \right]$$

$$= \left[\frac{1}{1 + \frac{x^2 - 2ax + a^2}{1 + 2ax + a^2 x^2}} \right] \left[\frac{1 + ax - ax + a^2}{1 + 2ax + a^2 x^2} \right]$$

$$= \frac{1 + a^2}{1 + 2ax + a^2 x^2 + x^2 - 2ax + a^2}$$

$$= \frac{1 + a^2}{(1 + a^2)(1 + x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(١١) اوجد تفاضل الدالة : $y = \operatorname{arcsec} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \frac{U}{V} = \frac{V \frac{du}{dx} - U \frac{dv}{dx}}{V^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)}{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \sqrt{\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^2 - 1}}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(x^2-1)2x - (x^2+1)2x}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{\frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x}{x^2-1}}{\frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x}{x^2-1}} \\
&= \frac{-2}{x^2+1}
\end{aligned}$$

(١٢) إذا علمت أن :

$$y = (x-a) \sqrt{2ax-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x-a}{a}$$

فاوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث a ثابت .

الحل : - لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ نستخدم قاعدة السلسلة فى الضرب بالنسبة للحد الأول ،
كما نستخدم القاعدة : -

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

فى الحد الثانى .

أولا : -

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \left[(x-a)(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= (x-a) \times \frac{1}{2} (2ax-x^2)^{-\frac{1}{2}} (2a-2x) + (2ax-x^2)^{\frac{1}{2}} \times 1 \\
&= \frac{(x-a)(a-x)}{\sqrt{2ax-x^2}} + \sqrt{2ax-x^2} \\
&= \frac{(x-a)(a-x) + (2ax-x^2)}{\sqrt{2ax-x^2}} \\
&= \frac{-x^2 + 2ax - a^2 + 2ax - x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} \\
&= \frac{2(-x^2 + 2ax) - a^2}{\sqrt{2ax-x^2}}
\end{aligned}$$

ثانيا : - نوجد :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[a^2 \arcsin \frac{x-a}{a} \right] &= a^2 \left[\frac{1 \left[\frac{1}{a} \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{a} \right)^2}} \right] = \frac{a}{\sqrt{1 - \left[\frac{x^2 - 2ax + a^2}{a^2} \right]}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{\frac{-x^2 + 2ax}{a^2}}} = \frac{a^2}{\sqrt{-x^2 + 2ax}} \end{aligned}$$

ويجمع النواتج فى أولا وثانيا : -

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{2(-x^2 + 2ax) - a^2}{\sqrt{2ax - x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{2ax - x^2}} \\ &= \frac{2(-x^2 + 2ax)}{\sqrt{2ax - x^2}} \\ &= 2\sqrt{2ax - x^2} \end{aligned}$$

(١٣) عبر بالتقدير الدائرى عن الزوايا فيما يلى :

$$\begin{aligned} \sin^{-1} \left(\frac{-1}{2} \right) &, \quad \tan^{-1} \sqrt{3} \\ \cos^{-1} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) &, \quad \cot^{-1} (-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

الحل : -

$$\begin{aligned} \sin^{-1} \left(\frac{-1}{2} \right) &= \frac{-\pi}{6} \\ \tan^{-1} (\sqrt{3}) &= \frac{\pi}{3} \\ \cos^{-1} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) &= \frac{3\pi}{4} \\ \cot^{-1} (-\sqrt{3}) &= \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

Exercise 13

عبر بالتقدير الدائرى عن كل من الزوايا فى المسائل التالية : -

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (١)$$

$$\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (٢)$$

$$\tan^{-1}(-1) \quad (٣)$$

$$\tan^{-1}(0) \quad (٤)$$

$$\operatorname{cosec}^{-1}(2) \quad (٥)$$

فى الزوايا التالية عبر عنها إلى أقرب درجة بالتقدير الستينى للزوايا .

$$\sin^{-1}(-0.7839) \quad (٦)$$

$$\sin^{-1}(0.2851) \quad (٧)$$

$$\cos^{-1}(-0.3729) \quad (٨)$$

$$\cos^{-1}(0.9247) \quad (٩)$$

$$\tan^{-1}(-0.8423) \quad (١٠)$$

$$\tan^{-1}(0.4385) \quad (١١)$$

$$(١٢) \text{ عبر عن } \cos^{-1}(-x) \text{ بدلالة } \cos^{-1}(x)$$

فاضل الدوال التالية : -

$$\sin^{-1}(4x) \quad (١٣)$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \quad (١٤)$$

$$b \cos^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) \quad (١٥)$$

$$b \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (١٦)$$

$$y = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (١٧) \text{ (أ)}$$

$$y = \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad \text{(ب)}$$

$\sin^{-1} \sqrt{x}$	(18)
$\cos^{-1} 2x^2$	(19)
$\tan^{-1}(a-x)$	(20)
$\sin^{-1}(2x-1)$	(21)
$\cos^{-1}(1-x)$	(22)
$x \sin^{-1} x$	(23)
$\sin^{-1}(3x-1)$	(24)
$\sin^{-1} \frac{1}{x}$	(25)
$\operatorname{cosec}^{-1} \frac{x}{2}$	(26)
$x^2 \sin^{-1} x$	(27)
$\tan^{-1} \frac{x-1}{2}$	(28)
$\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	(29)
$\operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{2x^2-1}$	(30)
$2 \sec^{-1} ax$	(31)
$\tan^{-1} \sqrt{x}$	(32)
$\sec^{-1} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$	(33)
$\sec^{-1} \frac{x^2+1}{x^2-1}$	(34)
$\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$	(35)
$\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	(36)
$\tan^{-1} \frac{2x+1}{3}$	(37)

$x^3 \cot^{-1} \frac{x}{3}$	(३८)
$\tan^{-1}(x+1)$	(३९)
$\sec^{-1} 5x$	(४०)
$\sin^{-1} \sqrt{\sin x}$	(४१)
$(x^2+1)\tan^{-1} x$	(४२)
$\tan^{-1} \frac{x}{2-\sqrt{4-x^2}}$	(४३)
$\tan^{-1} \frac{x+1}{x-1}$	(४४)
$x^2 \cos^{-1}(1-x^2)$	(४५)
$x \tan^{-1} x$	(४६)
$\tan x \sin^{-1} x$	(४७)
$[\sin^{-1}(x^2-2)]^2$	(४८)
$\sin^{-1} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$	(४९)
$y = (2x^2-1) \operatorname{arc} \cos (x-x\sqrt{1-x^2})$	(५०)

الباب الثالث عشر

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and logarithmic functions

١٣-١ :- عام

وقد سبق لنا دراسة القوانين التالية في الجبر الأولى ،

$$1 - a^m a^n = a^{m+n} \quad 4 - (a^m)^n = a^{mn}$$

$$2 - \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad 5 - (ab)^m = a^m b^m$$

$$3 - \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad 6 - a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

وللتحدث عن الأسس الكسرية فإنه يلزم التعرض لجذور الأعداد ومن ثم يجب معرفة ما هو جذر العدد .

فإذا كان لدينا عددين a , b بحيث أن الأس النوني (n) للعدد a [عدد موجب] أى a^n يساوى b

فإنه يقال أن a هى الجذر النوني للعدد b أى أنه :-

$$\text{if } a^n = b$$

$$\therefore a = \sqrt[n]{b}$$

وكما نعلم فإن أى عدد لا صفري $nonzero number$ ، يكون له جذران تربيعيان وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور من الدرجة الرابعة وهكذا ؛ وتشتمل جذور الأعداد على قيم حقيقية وتخيلية .
فإذا فرضنا أن عدداً له جذر نوني واحد حقيقى فإنه يُطلق على هذا الجذر بالجذر النوني الرئيسى .

وعليه فإن الجذر التكعيبى الرئيسى للعدد ٢٧- هو ٣- بينما الجذران الآخران فهما تخيليان

والجذر الرئيسى الرابع للعدد ١٦ هو ٢

كما وأن الجذور الزوجية الرتبة للأعداد السالبة تكون كلها تخيلية .

مثل : $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-256}$ ، وفي هذه الحالات فإنه لا يمكننا أخذ وتحديد أحد الجذور كجذر رئيسى للعدد السالب .

وعموماً فإن $\sqrt[n]{a}$ يرمز للجذر الرئيسى النونى للعدد a فإذا ما افترضنا أن m عدداً موجباً أو سالباً وأن n عدداً موجباً . وأن a عدداً موجباً ، عندما تكون n عدداً زوجياً .

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad - : \text{ فإنه } -$$

وبعد هذا التقديم السريع للأسس ، فإن الطريق يصبح مفتوحاً أمامنا ، لدراسة اللوغاريتمات والتعرف على خواصها .

تعريف :- إذا كانت b عدداً موجباً بخلاف الواحد ، وأن y عدد حقيقى فى المعادلة :-
 $x = b^y$

فإن y تُعرف بأنها لوغاريتم x للأساس b أى أن لوغاريتم العدد x ، هو الأس الذى يرفع له عدد ما (الأساس) لكى يصبح مساوياً للعدد x

أى أن y وهى اللوغاريتم للعدد x هى الأس الذى يرفع إليه العدد y لكى تصبح النتيجة هى العدد x .

وتكتب : $y = \text{Log}_b x$ أى أنه يتم التعبير عن معنى y هذا بكتابة $\text{Log}_b x$

وبذلك فإن :- $b^y = x$, $y = \text{Log}_b x$

تُعبّر عن نفس العلاقات الرابطة بين y , x , b والصورة $b^y = x$ هى معادلة فى الصورة الأسية بينما $y = \text{Log}_b x$ هى معادلة فى الصورة اللوغاريتمية .

ونذكر هنا ثلاثة قوانين هامة للوغاريتمات والتى يتم استنتاجها من قوانين الأسس :-

$$\text{Log}_b MN = \text{Log}_b M + \text{Log}_b N$$

$$, \text{Log}_b \frac{M}{N} = \text{Log}_b M - \text{Log}_b N$$

$$, \text{Log } M^p = p \text{Log}_b M$$

ويوجد نظامان للوغاريتمات يستخدمان بكثرة فى الرياضيات ؛

فى النظام الأول (اللوغاريتمات العددية) الأساس هو العدد ١٠ وتستخدم فى الحسابات .
أما فى الأعمال النظرية وحساب التفاضل فإنه يفضل استعمال أساس آخر خلاف الرقم ١٠
وهو ما يرمز له بالرمز e وهو عدد تقريبي ويرمز لهذه اللوغاريتمات باللوغاريتمات الطبيعية
كما سيرد بالتفصيل فيما بعد ؛

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

سبق لنا دراسة قانون الفائدة البسيطة والفائدة المركبة وفى نظام استثمار الأموال بالفائدة
البسيطة فإن رأس المال يبقى ثابتاً من عام لآخر دون أى زيادة .

إلا أنه فى نظام الاستثمار بالفائدة المركبة فإن الأرباح تضاف إلى رأس المال فى نهاية العام
(أو كل فترة متفق عليها) ويصبح رأس المال للعام التالى عبارة عن رأس المال السابق مضافاً
إليه ربح العام (أو الفترة) وهكذا ، .

فإذا افترضنا أن :- رأس المال المستثمر p

النسبة المئوية للربح فى العام r

وبذلك يكون الربح المضاف عند نهاية السنة الأولى $p \times \frac{r}{100}$

∴ رأس المال عند نهاية السنة الأولى $p + \frac{pr}{100}$

$$p \left(1 + \frac{r}{100} \right) =$$

ويعتبر هذا المبلغ رأس المال الجديد للعام التالى وبنفس الطريقة كما اتبعنا فى العام الأول :-

∴ رأس المال عند نهاية السنة الثانية $p \left(1 + \frac{r}{100} \right)^2$

، رأس المال عند نهاية السنة الثالثة $p \left(1 + \frac{r}{100} \right)^3$

، رأس المال عند نهاية السنة t $p \left(1 + \frac{r}{100} \right)^t$

فإذا افترضنا أن الفائدة تضاف عند نهاية كل نصف عام بدلاً من عند نهاية العام :-

∴ رأس المال المستثمر عند نهاية نصف العام الأول $p \left(1 + \frac{r}{2 \times 100} \right)$

$$p \left(1 + \frac{r}{2 \times 100} \right)^2 = \text{رأس المال المستثمر عند نهاية العام الأول} ،$$

$$p \left(1 + \frac{r}{2 \times 100} \right)^4 = \text{رأس المال المستثمر عند نهاية العام الثانى} ،$$

$$p \left(1 + \frac{r}{2 \times 100} \right)^{2t} = \text{رأس المال المستثمر عند نهاية العام } t ،$$

أما إذا أضيفت الأرباح بمعدل ٤ مرات سنوياً :-

$$p \left(1 + \frac{r}{4 \times 100} \right)^4 = \text{رأس المال المستثمر فى نهاية العام الأول} \therefore$$

$$p \left(1 + \frac{r}{4 \times 100} \right)^{4t} = \text{رأس المال المستثمر فى نهاية العام } t ،$$

وبالمثل إذا ما أضفنا الفائدة بمعدل ١٢ مرة سنوياً أى مرة كل شهر :-

$$p \left(1 + \frac{r}{12 \times 100} \right)^{12t} = \text{رأس المال المستثمر فى نهاية العام } t \therefore$$

وإذا أضفنا الأرباح m من المرات فى العام :-

$$p \left(1 + \frac{r}{m \times 100} \right)^{mt} = \text{فإن رأس المال المستثمر فى نهاية العام } t$$

ولنفترض أن :-

$$\frac{r}{m \times 100} = \frac{1}{h}$$

$$\therefore m = \frac{nr}{100}$$

$$p \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{nrt}{100}} = \text{رأس المال المستثمر فى نهاية العام } t \therefore$$

$$p \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{rt}{100}} =$$

فإذا ما افترضنا أن n أصبحت كبيرة جداً جداً أى أن الفائدة تُضاف عند نهاية فترات زمنية صغيرة جداً بحيث أن عملية نمو رأس المال تبدو كما لو كانت متصلة (بعكس الوضع السابق فهي ساكنة طوال العام أو الفترة ثم تزيد فجأة فى نهايتها) .

وعليه فإن الكمية التى يصل لها رأس المال تصبح عبارة عن نهاية المقدار :-

$$p \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{n}{100}}$$

وذلك عندما تصبح n كبيرة جداً .

ولإيجاد ذلك فإنه يلزم إيجاد نهاية $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ عندما تقترب n من ∞ أى $n \rightarrow \infty$

$$\therefore \text{المقدار} = p \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{n}{100}}$$

وسنبداً فيما يلى فى إيجاد نهاية المقدار $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ عندما $n \rightarrow \infty$

$$\text{١٣-٢ :- قيمة } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

نقوم بفك هذا المقدار بنظرية ذات الحدين Binomial theorem :-

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots$$

ثم نختصر بحذف n^5 فى البسط مع n^5 فى المقام :-

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= 1 + 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right)}{2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right)}{3} + \dots \\ &\quad + \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n} \right)}{r} + \dots \end{aligned}$$

ونهاية المقدار $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ هى بلا شك عبارة عن مجموع نهايات هذه الحدود مجتمعة ،

وذلك كالتالى :-

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n})}{r} = \frac{1}{r}$$

وهكذا .

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

وبذلك فإن النهاية عبارة عن متوالية لا نهائية ، إلا أنه يمكن إثبات أنه إذا زاد عدد الحدود بدون حد (زيادة لا نهائية)

فإن مجموع كل من الحدود يقترب من نهاية محددة . أى أن المتوالية تقاربية ، وقد تم حساب قيمتها بدرجة بالغة الدقة ويمكن حسابها بدرجة الدقة المطلوبة (تزداد الدقة كلما جمعنا عدداً أكبر من الحدود) .

ويمكن حسابها بحساب كل حد على حدة وذلك بقسمة البسط على المقام .

الحد الأول =	١,٠٠٠٠٠٠
الحد الثانى =	١,٠٠٠٠٠٠
الحد الثالث =	٠,٥٠٠٠٠٠ (بقسمة الحد الثانى ÷ ٢)
الحد الرابع =	٠,١٦٦٦٦٧ (بقسمة الحد الثالث ÷ ٣)
الحد الخامس =	٠,٠٤١٦٦٧
الحد السادس =	٠,٠٠٨٣٣٣
الحد السابع =	٠,٠٠١٣٨٩
الحد الثامن =	٠,٠٠٠١٩٨
الحد التاسع =	٠,٠٠٠٠٢٥
الحد العاشر =	٠,٠٠٠٠٠٣
∴ مجموع عشرة حدود =	٢,٧١٨٢٨٣

وبذلك فإن قيمتها لأقرب خمسة أرقام عشرية : ٢,٧١٨٢٨

وهذا الرقم الثابت يرمز له بالحرف e (أو "هـ")

وتعرف بالقيمة التقريبية ؛

$$i.e: \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

فإذا رمزنا لقيمة المقدار : $p \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{\frac{rt}{100}}$ بالمقدار A باعتبار أن إضافة الربح مستمرة على فترات صغيرة جداً ، بعد t من السنوات وبأن n تصبح كبيرة جداً :-

$$\therefore A = p \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

وبوضع

$$\therefore A = p e^{\frac{rt}{100}}$$

$$x = \frac{rt}{100}$$

وبوضع

$$\therefore A = p e^x$$

وتُعرف e^x بالدالة الأسية الطبيعية وذلك لأن الأس هو المقدار المتغير في الدالة ($e =$ ثابت) وهنا يلزم أن نفرق بين الدوال العادية التي سبق التعرض لها في هذا الكتاب وبين الدوال الأسية واللوغاريتمية التي هي أساس هذا الباب .

فالدوال العادية مثل :- $y = x^5$, المتغير التابع ، x هي المتغير المستقل [والأساس هو x متغير والأس $5 =$ ثابت]

وعند دراسة القوى في هذه الحالة ، نلاحظ الأساس (x) فعندما يكون الأساس واحداً فإنه يتم جمع القوى عند الضرب وطرحها عند القسمة وضربها عند الرفع إلى قوى أعلى كالتالي :-

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$, x^m \div x^n = x^{m-n}$$

$$, [x^m]^n = x^{mn}$$

، أن الدوال الأسية العادية هي تلك الدوال التي يكون الأساس فيها متغير والقوة أو الأس
بت ؛ $[y = x^5]$ فيها x الأساس متغير والقوة 5 ثابتة . أى أن x يمكن أن تتغير بينما
قوة ثابتة ومثل $y = 5 (\sin x)^2$

بينما الدوال الأسية الطبيعية أو موضوع هذا الباب ، فهي الدوال التي تكون قيمة الأساس
فيها ثابتة بينما القوة أو الأس متغيرة .

$$\text{مثل } y = e^x \text{ [} e \text{ ثابت ، } x \text{ متغير]}$$

$$\text{ومثل } y = a^{(x^2 - 5x)}$$

وتبين هذه الدوال النمو في ظاهرة معينة في فترات زمنية متتالية سنة ، سنتين ، أو
شهر وشهران

ويمثل هذا النوع من الدوال معدلات نمو ظاهرة معينة بصورة منتظمة ومستمرة أى تلك التي
يكون فيها النمو جارياً بصورة مستمرة وليس في فترات غير متصلة كسنوات أو شهور أو
أسابيع مثل حسابات البنوك .

والنمو المتواصل المستمر وليس المتقطع على فترات يكون مثل ظاهرة تآكل الشواطئ ونمو
السكان في مجتمع ما وزيادة وزن الحيوانات مع زيادة التغذية .

وفي كثير من الظواهر الكيميائية والفيزيائية وفي الهندسة الكهربائية نجد أن القيمة التقريبية
[$e = 2.71828$] ذات أهمية كبيرة رياضياً ، لأن هذه الظواهر كثيراً ما تربطها
علاقات تحتوى على دوال أسية .

ويمكننا الآن التعبير عن الدالة e^x كمتسلسلة تحتوى على قوة متزايدة تصاعدياً في x ،
لأنها تبين أن القيمة التقريبية e إذا رفعت لأى قوة x مثلاً فإن الناتج يكون عبارة عن
متسلسلة تقاربية convergent

ولهذا تستخدم e كأس للوغاريتمات الطبيعية كما سيرد فيما بعد ، .

$$\therefore e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\therefore e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$$

وبفك هذا المقدار بنظرية ذات الحدين :-

$$\begin{aligned} \therefore \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} &= 1 + nx \cdot \frac{1}{n} + \frac{nx(nx-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &\quad + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right)}{2} + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{2}{n}\right)}{3} + \dots \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$i.e \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

وكما هو واضح فهي متسلسلة تقاربية ، فإذا ما وضعنا $(-x)$ بدلاً من (x) :-

$$\therefore e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$$

وبالمثل فإن :-

$$\begin{aligned} e^{ax} &= 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^3 x^3}{3} + \frac{a^4 x^4}{4} + \dots \\ e^{-ax} &= 1 - ax + \frac{a^2 x^2}{2} - \frac{a^3 x^3}{3} + \frac{a^4 x^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

١٣-٣ :- تفاضل e^x :-

يمكن إجراء وإيجاد تفاضل e^x بسهولة وذلك بوضع مفكوك e^x ثم تفاضله حداً حداً :-

$$\therefore e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d}{dx} e^x &= 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3} + \frac{4x^3}{4} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\end{aligned}$$

وهي نفسها مفكوك e^x

$$\therefore \frac{d}{dx} (e^x) = e^x$$

وهذه الخاصية أى أن المعامل التفاضلى للمقدار e^x يساوى نفس المقدار أى e^x لا تتوفر

فى أى دالة أخرى فى x

وبالمثل فإنه إذا كانت $y = e^{-x}$

$$\therefore \frac{d}{dx} (e^{-x}) = -e^{-x}$$

وكذلك إذا كانت $y = e^{ax}$

$$\therefore y' = a e^{ax}$$

وإذا كانت $y = e^{-ax}$

$$\therefore y' = -a e^{-ax}$$

كما وأنه يمكن إيجاد تفاضل e^x باستخدام المبادئ الأولية .

$$\therefore y = \text{Log}_b x$$

$$\therefore y + \Delta y = \text{Log}_b (x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = \text{Log}_b (x + \Delta x) - \text{Log}_b x$$

$$= \text{Log}_b \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \text{Log}_b \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \text{Log}_b \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \text{Log}_b \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

وبلاحظ أن $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ في الصورة $(1+h)^{\frac{1}{h}}$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e \quad \text{وعليه فإن :-}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow u} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_b e$$

فإذا ما كانت u دالة قابلة للتفاضل في x فيمكننا كتابة :-

$$\frac{d}{dx} (\log_b u) = \frac{1}{u} \log_b e \cdot \frac{du}{dx}$$

وإذا ما وضعنا $b = e$ فإن $\log_e e = 1$ ، وسوف نستخدم الرمز \ln بدلاً من \log والرمز \ln هنا يعني الأساس e

$$\therefore \frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

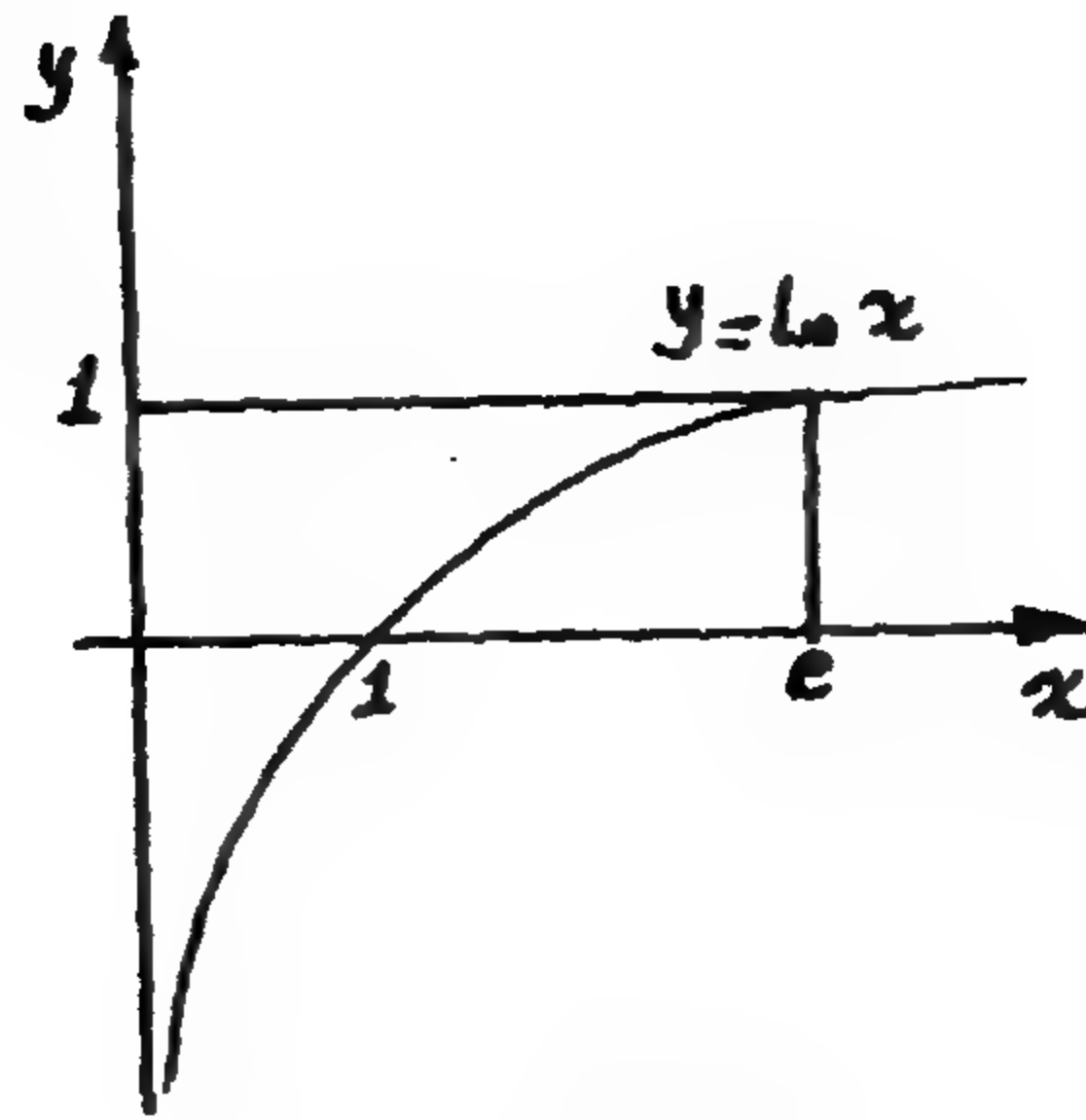
ويمكننا بيان أن ميل المنحنى $y = \ln x$ ، يكون موجباً دائماً وأن المنحنى مقعر للأسفل ، وبإجراء التفاضل للدالة :-

$$y = \ln x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad , \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-1}{x^2}$$

وحيث أن مدى أو مجال $y = \ln x$ دائماً أكبر من الصفر ($x > 0$) ، فإن المشتقة الأولى وبالتالي ميل المنحنى يكون موجباً دائماً

كما أن الإشارة السالبة للمشتقة الثانية تؤكد أن التقعر للأسفل ويوضح هذا الشكل (١-١٣) .



شكل (١٣-١)

١٣-٤ : رسم منحنى e^x , e^{-x} :-

إذا كانت

$$y = e^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x ,$$

وحيث أن $\frac{dy}{dx}$ دائماً موجبة فإن منحنى الدالة e^x يكون موجباً وفى زيادة دائمة وبذلك فليس عليه نقط تحول .

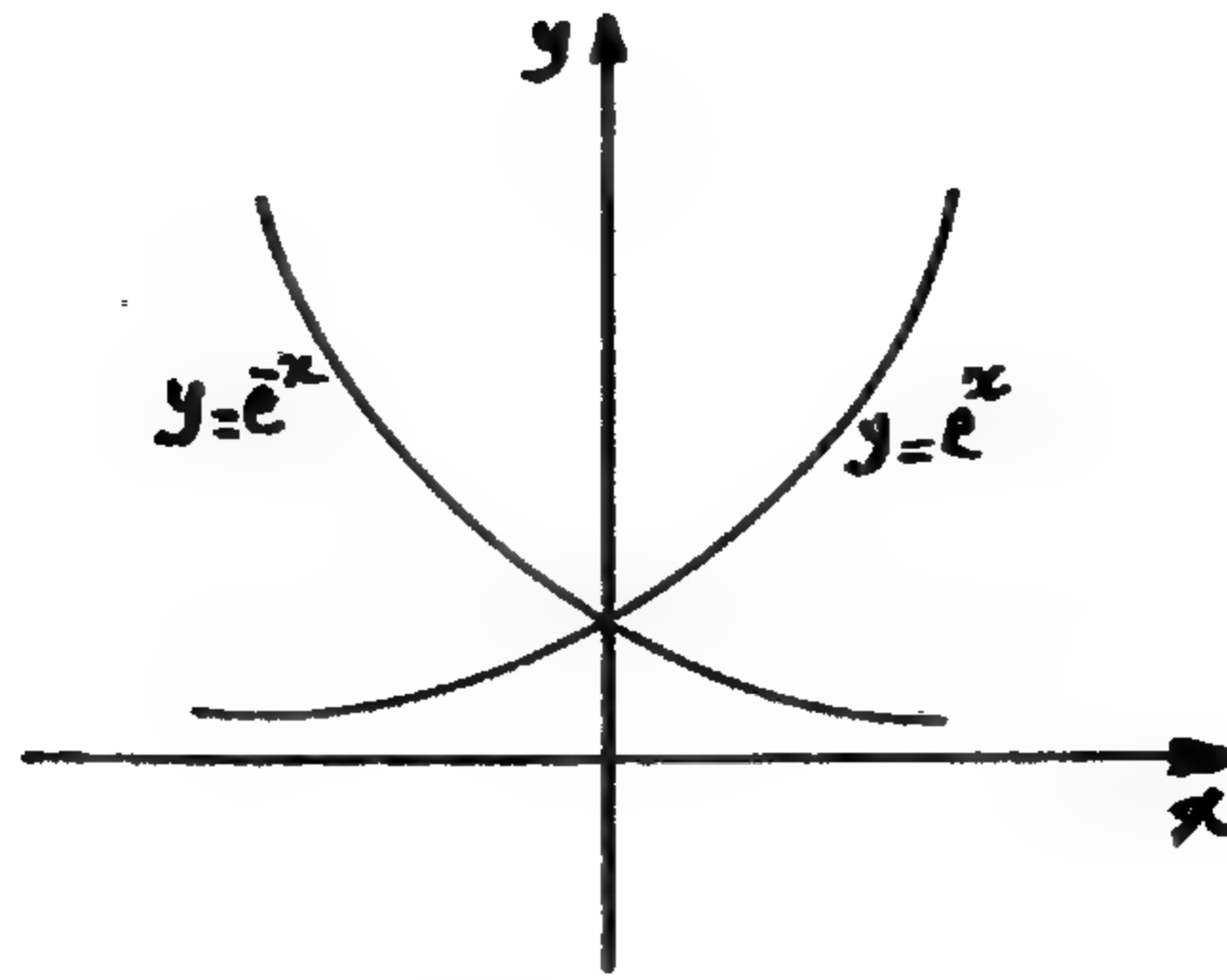
وحيث أنه كذلك $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$ فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ لا تتلاش أبداً عند أى قيم محددة لـ x وعليه فإنه لا توجد نقط انقلاب على المنحنى وبالمثل :

$$y = e^{-x}$$

$$y' = -e^{-x} , \quad y'' = e^{-x}$$

وبذلك فإن y' دائماً متناقصة وبالتالي فإن المنحنى يكون سالباً (متناقصاً) ولا توجد نقط تحول ، كما أنه لا توجد نقط انقلاب .

ويوضح الشكل منحنى كل من e^x , e^{-x} .
انظر الرسم شكل (١٣-٢) .



شكل (١٣-٢)

ويوضح شكل e^x الزيادة المستمرة في الدالة (كما في حالة الفائدة المركبة) بينما يوضح شكل e^{-x} التناقص المستمر في الدالة مثلما يحدث في التفاعلات الكيميائية وفي الفيزياء ، مثلما يحدث في حالة فقد الحرارة المستمر عند تبريد جسم (كمثال)

١٣-٥ :- " اللوغاريتمات النابيرية ، اللوغاريتمات الزائدية " أو اللوغاريتمات الطبيعية

' Napierian , Hyperbolic ' or Natural Logarithms

اللوغاريتم هو القوة التي نرفع لها أساس معين لنحصل على عدد معين فمثلاً

$$4^2 = 16$$

الأساس المعين = ٤ ، القوة هي ٢ والعدد المعين = ١٦

ولذلك تعرف ٢ بأنها لوغاريتم العدد ١٦ للأساس ٤

وبالمثل : ٣ هي لوغاريتم $[5^3 = 125]$ للأساس ٥

، ٦ هي لوغاريتم $[2^6 = 64]$ للأساس ٢

إلا أنه من المتعارف عليه تثبيت الأساس وجعله ١٠ وتُعرف اللوغاريتمات للأساس ١٠

باللوغاريتمات العادية

وحيث أنه قد تم التعارف على جعل الأساس ١٠ ، لذلك لا يتم كتابته عند استخدام هذه

اللوغاريتمات العادية .

فمثلاً : عند أخذ لوغاريتم ١٠٠ للأساس ١٠ ، تكتب هكذا $\log 100 = 2$

أى أن ٢ هى أس المقدار ١٠ (الأساس) لكى يصبح المقدار = ١٠٠

$$\log 10 = 1 , \quad \log 1 = 0$$

ولما كان $\log 10 = 1$ ، $\log 100 = 2$ لذلك فإن لوغاريتم أى عدد يقع بين ١٠٠ ،

١٠ ينحصر فيما بين ١ ، ٢ ،

ولوغاريتم أى عدد ينحصر فيما بين ١٠٠٠ ، ١٠٠ ينحصر بين ٣ ، ٢ وهكذا ؛ وقد سبق

للقارئ دراسة هذه اللوغاريتمات العادية .

أما موضوعنا فى هذا الكتاب فهو اللوغاريتمات الطبيعية التى أتفق على أن يكون أساسها

العدد التقريبى (e) وقد تعرف أحياناً بلوغاريتمات نايبير نسبة إلى عالم الرياضيات الذى

وضعها عام 1614 ميلادية .

ولما كانت $e = 2.718281$ ، فإن تركيب اللوغاريتمات الطبيعية يُصبح معقداً جداً ،

وتوجد جداول رياضية تعطينا لوغاريتمات الأعداد الطبيعية من صفر حتى ٩٩٩ تبسيطاً

لهذا التعقيد .

وقواعد اللوغاريتمات الطبيعية هى نفس قواعد اللوغاريتمات العادية فى عمليات الضرب

والقسمة والرفع لقوى .

$$\log_{10} 10 = \log 10 = 1 \quad \text{ومثلما :}$$

$$\log_e e = 1 \quad \text{فكذلك :}$$

وتُعرف هذه اللوغاريتمات كذلك باللوغاريتمات الزائدية Hyperbolic logs

١٣-٦ :- تفاضل $\log_e x$:-

$$\text{Let } y = \log_e x$$

أى أن y هى القوة للأساس e لكى نحصل على العدد x

$$i, e \quad x = e^y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = e^y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} [\text{Log}_e x] = \frac{1}{x}$$

أما إذا كان اللوغاريتم لأساس آخر غير e وليكن الأساس a مثلاً فإنه يمكن تحويله إلى
لوغاريتم للأساس e ببساطة

$$y = \text{Log}_a x \quad \text{فإذا كانت}$$

$$\therefore y = \text{Log}_e x \times \text{Log}_a e$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{Log}_a e$$

$$[a = 10 \text{ الأساس}] \quad y = \text{Log}_{10} x \quad \text{وإذا كانت}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{Log}_{10} e = \frac{1}{x} \times 0.4343$$

١٣-٧: تفاضل الدوال الأسية في الصورة العامة :-

$$y = a^x \quad \text{لتكن}$$

$$\therefore \text{Log}_e y = \text{Log}_e a^x = x \text{Log}_e a$$

$$\therefore x = \frac{\text{Log}_e y}{\text{Log}_e a} = \text{Log}_e y \times \frac{1}{\text{Log}_e a}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \times \frac{1}{\text{Log}_e a}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y \times \text{Log}_e a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a^x \times \text{Log}_e a$$

$$y = 5^x \quad \text{فمثلاً :}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5^x \cdot \text{Log}_e 5 \cong 1.609 \times 5^x$$

وكحالة خاصة :-

$$y = 10^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 10^x \text{Log}_e 10 = 2.303 \times 10^x$$

ويمكن إيجاز ما سبق في الجدول التالي -

الدالة	معاملها التفاضلي
e^x	e^x
e^{-x}	$-e^{-x}$
a^x	$a^x \text{Log}_e a$
$\text{Log}_e x$	$\frac{1}{x}$

١٣-٨ :- أمثلة محلولة :-

$$y = e^{4x^2}$$

(١) إجر التفاضل للدالة :-

الحل :- بتطبيق قاعدة الدالة .

$$\therefore y = e^{4x^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= e^{4x^2} \times \frac{d}{dx} (4x^2) \\ &= 8x \times e^{4x^2} \end{aligned}$$

$$y = \text{Log } x^7$$

(٢) إجر تفاضل

الحل :-

$$\therefore y = \text{Log } x^7$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x^7} \frac{d}{dx} x^7 \\ &= \frac{7x^6}{x^7} = \frac{7}{x} \end{aligned}$$

أو يمكننا إيجادها بمعرفة أن $\text{Log } x^7 = 7 \text{Log } x$

$$\therefore y = 7 \text{Log } x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 7 \times \frac{1}{x} = \frac{7}{x}$$

$$y = \text{Log } \frac{x^3}{\sqrt{x^3 - 1}}$$

(٣) فاضل

الحل :-

$$\therefore \operatorname{Log} \frac{a}{b} = \operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b$$

$$\therefore y = \operatorname{Log} x^3 - \operatorname{Log} (x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3} \times 3x^2 - \frac{1}{(x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{d}{dx} (x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{x} - \frac{1}{(x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{2(x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}} \times 3x^2$$

$$= \frac{3}{x} - \frac{3x^2}{2(x^3 - 1)} = \frac{6(x^3 - 1) - 3x^3}{2x(x^3 - 1)}$$

$$= \frac{3(x^3 - 2)}{2x(x^3 - 1)}$$

$$y = e^{-ax} \sin (bx + c) \quad (4) \text{ فاضل :}$$

الحل :-

وهى مسألة ذات أهمية فى الفيزياء والهندسة الكهربائية

$$\therefore y = e^{-ax} \times \sin (bx + c)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = [e^{-ax} \times \cos (bx + c) \times b] + [\sin (bx + c) \times -e^{-ax} \times a]$$

$$= e^{-ax} [b \cos (bx + c) - a \sin (bx + c)]$$

$$y = \operatorname{Ln} (3x + 5) \quad (5) \text{ أوجد } \frac{dy}{dx} \text{ ، إذا كانت :}$$

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x + 5} \times \frac{d}{dx} (3x + 5) = \frac{3}{3x + 5}$$

$$y = \operatorname{Ln} \sqrt{5 + 7x} \quad (6) \text{ أوجد } \frac{dy}{dx} \text{ ، إذا كانت :}$$

الحل :-

$$y = \text{Ln} (5 + 7x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{Ln} (5 + 7x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5 + 7x} \times \frac{d}{dx} (5 + 7x)$$

$$= \frac{7}{2(5 + 7x)}$$

$$y = \text{Ln} \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + 3} : \text{إذا علمت أن } \frac{dy}{dx}$$

الحل :-

$$y = \text{Ln} x^2 \sqrt{x^2 - 1} - \text{Ln} (x^2 + 3)$$

$$= \text{Ln} x^2 + \text{Ln} \sqrt{x^2 - 1} - \text{Ln} (x^2 + 3)$$

$$= 2 \text{Ln} x + \text{Ln} (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - \text{Ln} (x^2 + 3)$$

$$= 2 \text{Ln} x + \frac{1}{2} \text{Ln} (x^2 - 1) - \text{Ln} (x^2 + 3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{1 \times 2x}{2(x^2 - 1)} - \frac{1 \times 2x}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x^2 + 3}$$

$$y = a^{3x^2}$$

(٨) أوجد تفاضل

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} a^u = a^u \frac{du}{dx} \text{Ln} a$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x^2, u = 3x^2 \text{ نضع}$$

$$\therefore y = a^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a^{3x^2} \times \text{Ln} a \times 6x^2$$

$$y = 3^{5x}$$

(٩) أوجد تفاضل

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} 3^{5x} = 3^{5x} \times \ln 3 \times 5 = 5 \times 3^{5x} \ln 3$$

$$y = x^x$$

(١٠) أوجد تفاضل

الحل :-

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x$$

$$\therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \times 1$$

$$= 1 + \ln x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (1 + \ln x) x^x$$

$$y = e^{\frac{1}{x^2}}$$

(١١) أوجد تفاضل

الحل :-

$$\frac{du}{dx} = \frac{-2}{x^3} \quad \therefore \quad u = \frac{1}{x^2} \text{ بوضع}$$

$$, y = e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^u \times \frac{du}{dx}$$

$$= e^{\frac{1}{x^2}} \times \frac{-2}{x^3} = \frac{-2 e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

$$y = a e^{b^2 + x^2}$$

(١٢) فاضل :

الحل :-

$$u = b^2 + x^2 \text{ بوضع}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 2x$$

$$, y = a e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a e^u \frac{du}{dx} = a e^{b^2 + x^2} \times 2x$$

$$= 2 a x e^{b^2 + x^2}$$

$$y = e^{\sqrt{x^4+a}} \quad (١٣) \text{ أوجد تفاضل :}$$

الحل :-

$$u = \sqrt{x^4 + a} \text{ نضع}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1 \times 4x^3}{2\sqrt{x^4+a}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+a}}$$

$$, y = e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x^4+a}} \times \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+a}}$$

$$y = x e^{\tan x} \quad (١٤) \text{ أوجد تفاضل}$$

الحل :-

$$d(uv) = v du + u dv$$

نستخدم هنا القاعدة :-

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= x \left[e^{\tan x} \times \sec^2 x \right] + e^{\tan x} \\ &= e^{\tan x} [x \sec^2 x + 1] \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ إذا كانت } y = \text{Log } 9x \text{ فأوجد} \quad (١٥)$$

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} \text{Log}_a u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx} \text{Log}_a e$$

$$\frac{du}{dx} = 9 \quad \therefore u = 9x \text{ وبوضع}$$

وبوضع $a = 10$ وفي هذه الحالة لا تكتب ١٠

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{9x} \times 9 \text{Log } e \\ &= \frac{1}{x} \cdot \text{Log } e = \frac{0.4343}{x} [\text{log } e = 0.4343] \end{aligned}$$

$$y = \text{Log } \frac{5x}{3+2x^2} \quad (١٦) \text{ أوجد تفاضل}$$

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx} \log_a e$$

$$u = \frac{5x}{3 + 2x^2} \text{ وبوضع}$$

ومن الواضح هنا أن $a = 10$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{3 + 2x^2}{5x} \times \frac{(3 + 2x^2)(5) - (5x)(4x)}{(3 + 2x^2)^2} \times \log e \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{(3 - 2x^2)}{(3 + 2x^2)} \times \log e . \end{aligned}$$

$$y = \ln 4x^3 \quad (١٧) \text{ أوجد تفاضل}$$

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 12x^2 \quad \therefore$$

$$u = 4x^3 \text{ وبوضع}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x^3} \times 12x^2 = \frac{3}{x}$$

$$(١٨) \text{ إذا كانت } y = \ln(a + x^5) \text{ فأوجد } \frac{dy}{dx}$$

الحل :-

$$\frac{du}{dx} = 5x^4 \quad \therefore$$

$$u = (a + x^5) \text{ , وبوضع}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(a + x^5)} \times 5x^4 = \frac{5x^4}{(a + x^5)}$$

$$y = \ln(2 - 3x^2)^3 \quad (١٩) \text{ أوجد تفاضل}$$

الحل :-

يمكن إعادة كتابة الدالة كالتالى :-

$$y = 3 \ln(2 - 3x^2)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = -6x \quad \therefore$$

وبوضع $u = (2 - 3x^2)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3 \times 1}{(2 - 3x^2)} \times -6x = \frac{-18x}{(2 - 3x^2)}$$

$$y = \ln \sqrt{3 - 4x^2}$$

(٢٠) أوجد تفاضل

الحل :-

يمكن كتابة المسألة في صورة خالية من الجذور كالتالى :-

$$y = \ln (3 - 4x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln (3 - 4x^2)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = -8x \quad \therefore$$

وبوضع $u = 3 - 4x^2$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 - 4x^2} \times -8x = \frac{-4x}{(3 - 4x^2)} \\ &= \frac{4x}{(4x^2 - 3)} \end{aligned}$$

$$y = \ln \tan x$$

(٢١) أوجد تفاضل

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \quad \therefore$$

وبوضع $u = \tan x$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\tan x} \times \sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \operatorname{cosec} x \sec x \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{\ln x}$$

(٢٢) أوجد تفاضل

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x \times 0 - 1 \times \left(\frac{1}{x}\right)}{[\ln x]^2} = \frac{-1}{x (\ln x)^2}$$

$$y = \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \quad (٢٣) \text{ أوجد تفاضل :-}$$

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$u = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{نضع}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{(x^2 + 1)(2x) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)}} \times \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2}$$

(٢٤) أوجد تفاضل الدالة :-

$$f(x) = \ln [3x^2 + 2 \ln x]$$

الحل :-

$$u = 3x^2 + 2 \ln x \quad \text{نضع}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x + \frac{2}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(3x^2 + 2 \ln x)} \times \frac{(6x^2 + 2)}{x}$$

$$= \frac{2}{x} \times \frac{(3x^2 + 1)}{(3x^2 + 2 \ln x)}$$

$$y = \ln [\sin e^{3x}]$$

(٢٥) أوجد تفاضل

الحل :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sin e^{3x}} \times [\cos e^{3x}] [e^{3x}] [3] \\ &= 3e^{3x} \cot e^{3x}\end{aligned}$$

$$y = x^{e^x} \quad (26) \text{ أوجد تفاضل}$$

الحل :-

يمكن تبسيط هذه المسألة بأخذ لوغاريتمات الطرفين :

$$\therefore \ln y = \ln x^{e^x} = e^x \ln x$$

$$\therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = e^x \times \frac{1}{x} + \ln x \times e^x$$

$$= e^x \left[\frac{1}{x} + \ln x \right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y \times e^x \left[\frac{1}{x} + \ln x \right]$$

$$= x^{e^x} \times e^x \left[\frac{1}{x} + \ln x \right]$$

$$y = (2x + 5)^2 \sqrt{x^2 - 4} \quad (27) \text{ إذا كانت}$$

فاوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام اللوغاريتمات

الحل :-

بأخذ اللوغاريتمات لطرفي المعادلة :-

$$\therefore \ln y = 2 \ln (2x + 5) + \frac{1}{2} \ln (x^2 - 4)$$

$$\therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{2x+5} \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x^2 - 4)} \times 2x$$

$$= \frac{4}{2x+5} + \frac{x}{(x^2 - 4)}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{dy}{dx} &= (2x+5)^2 (x^2-4)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4(x^2-4) + x(2x+5)}{(2x+5)(x^2-4)} \right] \\
&= \frac{(2x+5)}{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}} [6x^2 + 5x - 16] \\
&= \frac{12x^3 + 40x^2 - 7x - 80}{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

(٢٨) إذا كانت $y = \left[\frac{1}{a^{2x}} \right]^{2ax}$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل :-

بأخذ اللوغاريتمات لطرفي المعادلة :-

$$\therefore \ln y = 2ax \ln \frac{1}{a^{2x}}$$

$$\begin{aligned}
, \ln \frac{1}{a^{2x}} &= \ln 1 - \ln a^{2x} \\
&= 0 - \ln a^{2x}
\end{aligned}$$

$$\therefore \ln \frac{1}{a^{2x}} = -2x \ln a$$

$$\therefore \ln y = 2ax \times -2x \ln a = -4ax^2 \ln a$$

$$\therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -8ax \ln a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y (-8ax \ln a)$$

$$= \left[\frac{1}{a^{2x}} \right]^{2ax} \times [-8ax \ln a]$$

$$= \frac{1}{4ax^2} \times -8ax \ln a$$

$$= -8x a^{1-4ax^2} \ln b$$

$$(٢٩) \text{ أوجد تفاضل } y = (3x^2 - 5)^{4+\sqrt{2x^3+3}}$$

الحل :-

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين :-

$$\therefore \ln y = 4 + \sqrt{2x^3 + 3} \times \ln (3x^2 - 5)$$

ثم نفاضل كلا الطرفين بالنسبة إلى x باستخدام قاعدة الضرب .

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \left(4 + \sqrt{2x^3 + 3}\right) \times \left[\frac{1}{(3x^2 - 5)} \times 6x\right] + \\ &+ \ln (3x^2 - 5) \times \left[\frac{1}{2} (2x^3 + 3)^{-\frac{1}{2}} \times 6x^2\right] \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= y \left[4 + \sqrt{2x^3 + 3} \times \frac{6x}{(3x^2 - 5)} + \ln (3x^2 - 5) \times \frac{3x^2}{(2x^3 + 3)^{\frac{1}{2}}}\right] \\ &= (3x^2 - 5)^{4+\sqrt{2x^3+3}} \left[\frac{6x (4 + \sqrt{2x^3 + 3})}{(3x^2 - 5)} + \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + 3}} \cdot \ln (3x^2 - 5)\right] \end{aligned}$$

$$(٣٠) \text{ اوجد } \frac{dy}{dx} \text{ إذا علمت أن } \ln (x + y) = \tan^{-1} \left(\frac{x}{y}\right)$$

الحل :-

هذه دالة ضمنية في x, y لذلك نفاضل ضمناً بالنسبة إلى x كلا من الطرفين :

$$\therefore \frac{1}{x + y} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \times \frac{y - x \frac{dy}{dx}}{y^2}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين cross - multiplying

$$\therefore y^2 + x^2 + (y^2 + x^2) \frac{dy}{dx} = xy + y^2 - (x^2 + xy) \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} [y^2 + x^2 + (x^2 + xy)] = xy + y^2 - y^2 - x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} [2x^2 + xy + y^2] = x(y - x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x(y - x)}{(2x^2 + xy + y^2)}$$

قاعدة :

وإذا كانت a أى عدد موجب ومطلوب إيجاد a^u حيث u دالة قابلة للتفاضل
فى x فإن :

$$\therefore \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$, \text{Ln } a^u = u \text{Ln } a$$

$$\therefore a^u = e^{u \text{Ln } a}$$

$$, \frac{d}{dx} a^u = \frac{d}{dx} (e^{u \text{Ln } a}) = e^{u \text{Ln } a} \times \text{Ln } a \frac{du}{dx}$$

ومنها نصل لصيغة عامة :-

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \text{Ln } a \frac{du}{dx} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(31) \text{ أوجد } \frac{dy}{dx} \text{ إذا علمت أن } y = e^{2x^2} \text{ :-}$$

الحل :-

باستخدام القاعدة (1) السابقة :-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{2x^2} \frac{d}{dx} (2x^2) = 4x e^{2x^2}$$

$$(32) \text{ أوجد } \frac{dy}{dx} \text{ ، إذا كانت } y = e^{-x} \text{Ln } x \text{ :-}$$

الحل :-

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{-x} \frac{d}{dx} (\text{Ln } x) + \text{Ln}(x) \frac{d}{dx} (e^{-x}) \\ &= \frac{e^{-x}}{x} + -e^{-x} \text{Ln}(x) \end{aligned}$$

$$(33) \text{ إذا كانت } y = 3^{2x-3} \text{ فأوجد } \frac{dy}{dx}$$

الحل :-

باستخدام الصيغة العامة السابقة رقم (٢)

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= 3^{2x-3} \ln 3 \times \frac{d}{dx} (2x - 3) \\ &= 3^{2x-3} (\ln 3) (2)\end{aligned}$$

Exercise . 14

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من المسائل التالية :-

$$y = e^{6x} \quad (١)$$

$$y = e^{\sqrt{x}} \quad (٣)$$

$$y = e^{\frac{7}{3}x} \quad (٥)$$

$$y = e^{-ax} \quad (٧)$$

$$y = e^{ax+c} \quad (٩)$$

$$y = e^{\sin x} \quad (١١)$$

$$y = \ln(e^x - 1) \quad (١٣)$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (١٥)$$

$$y = e^{x^2} \quad (١٧)$$

$$y = x e^{-x} \quad (١٩)$$

$$y = (x + 4) e^x \quad (٢١)$$

$$y = 2^x \quad (٢٣)$$

$$y = e^x \sin x \quad (٢٥)$$

$$y = 10 \cdot 2^x \quad (٢٧)$$

$$y = a^{2x+1} \quad (٢٩)$$

$$y = a^{bx^2} \quad (٣١)$$

$$y = e^{\frac{x}{3}} \quad (٢)$$

$$y = e^{-3x} \quad (٤)$$

$$y = e^{(4-3x)} \quad (٦)$$

$$y = e^{\frac{x}{a}} \quad (٨)$$

$$y = e^{-9x} \quad (١٠)$$

$$y = x^2 e^x \quad (١٢)$$

$$y = e^{-2x} \sin x \quad (١٤)$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (١٦)$$

$$y = x e^x \quad (١٨)$$

$$y = x^2 e^{-x} \quad (٢٠)$$

$$y = \sin^{-1} e^x \quad (٢٢)$$

$$y = x^3 e^{\frac{1}{x}} \quad (٢٤)$$

$$y = 10 e^x \quad (٢٦)$$

$$y = x^n \cdot a^x \quad (٢٨)$$

$$y = e^{\cos x} \quad (٣٠)$$

$$y = (a + b)^x \quad (٣٢)$$

$$y = \text{Ln} (x^3 e^{-3x}) \quad (٣٤)$$

$$y = e^{\tan x} \quad (٣٣)$$

$$e^x \sin y - e^y \cos x = 1 \quad (٣٦)$$

$$x^2 e^y + y^2 e^x = 2 \quad (٣٥)$$

$$y = \text{Log} (ax^2 + bx + c) \quad (٣٨)$$

$$y = \text{Log} \frac{x}{a} \quad (٣٧)$$

$$y = \text{Log} \sin x \quad (٤٠)$$

$$y = x \text{Log} x \quad (٣٩)$$

$$y = \text{Log} (e^x + e^{-x}) \quad (٤٢)$$

$$y = \text{Log} \frac{a+x}{a-x} \quad (٤١)$$

$$y = \text{Log} \tan \frac{x}{2} \quad (٤٤)$$

$$y = \text{Log} (x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (٤٣)$$

$$y = ae^{-bx} \sin bx \quad (٤٦)$$

$$y = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \quad (٤٥)$$

$$y = \text{Log} \frac{e^x}{e^x + 1} \quad (٤٨)$$

$$y = \text{Log} [\sqrt{(x-1)} + \sqrt{(x+1)}] \quad (٤٧)$$

$$y = \cos^{-1} e^{-x} \quad (٥٠)$$

$$y = \text{Log} \frac{\sqrt{b} + \sqrt{x}}{\sqrt{b} - \sqrt{x}} \quad (٤٩)$$

$$y = \sin^{-1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (٥٢)$$

$$y = \text{Log} \frac{x}{b - \sqrt{b^2 - x^2}} \quad (٥١)$$

أوجد المشتقة الثانية والثالثة والرابعة والمشتقة النونية للآتي :-

$$y = e^{ax} \quad (٥٣)$$

$$y = e^{-ax} \quad (٥٤)$$

$$y = \text{Log} x \quad (٥٥)$$

فاضل كل من الدوال التالية باستخدام طريقة اللوغاريتمات :-

$$y = x^{-x} \quad (٥٧)$$

$$y = x(x-1)^{\frac{3}{2}} \quad (٥٦)$$

$$y = x^{\text{Ln} x} \quad (٥٩)$$

$$y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x\sqrt{4+x^2}} \quad (٥٨)$$

$$y = e^{-x^2} \sin^2 3x \quad (٦١)$$

$$y = (\sin^{-1} x)^x \quad (٦٠)$$

(٦٢) إذا كانت $y = u^v$ حيث كل من u, v دوال في x فبين أن :-

$$\frac{dy}{dx} = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \text{Ln} u \frac{dv}{dx}$$

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :-

$$y = e^{-x^2} \quad (٦٤)$$

$$y = x^2 + 3^x \quad (٦٣)$$

$$y = (e^{ax} - e^{-ax})^2 \quad (٦٦)$$

$$y = \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \quad (٦٥)$$

$$y = x^2 \cdot 2^x \quad (٦٨)$$

$$y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \text{Log} \left(\tan \frac{x}{2} \right) \quad (٦٧)$$

$$y = a^{\sin x} \quad (٧٠)$$

$$y = e^{\frac{x}{a}} \cos \frac{x}{a} \quad (٦٩)$$

$$y = x^2 e^{-2x} \quad (٧٢)$$

$$y = \text{Log} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right] \quad (٧١)$$

$$y = \text{Log} \frac{x^2}{\sqrt{1 - ax^4}} \quad (٧٤)$$

$$y = \text{Log} (\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) \quad (٧٣)$$

عين مشتقات الدوال التالية بعد أخذ اللوغاريتم للطرفين :-

$$y = \text{Log} \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (٧٦)$$

$$y = \text{Log} \cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x \quad (٧٥)$$

$$y = \cos^{-1} (1 - 2x) \quad (٧٨)$$

$$y = x^{\frac{1}{x}} \quad (٧٧)$$

$$y = x \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \text{Log} (x^2 + a^2) \quad (٧٩)$$

$$y = \sin^{-1} \sqrt{1 - 4x} \quad (٨٠)$$

$$y = \frac{1}{2} \text{Log} \tan x + \text{Log} \cos x \quad (٨١)$$

$$y = \sqrt{1 - x^2} + \sin^{-1} x \quad (٨٢)$$

$$y = x \sqrt{1 - x^2} + \sin^{-1} x \quad (٨٣)$$

$$y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + \sin^{-1} e^x \quad (٨٤)$$

$$y = \sin^{-1} e^{3x} \quad (٨٦)$$

$$y = \text{Log} \left[e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1} \right] \quad (٨٥)$$

$$y = \cos^{-1} \sqrt{1 - 2x} + \sqrt{2x + 4x^2} \quad (٨٧)$$

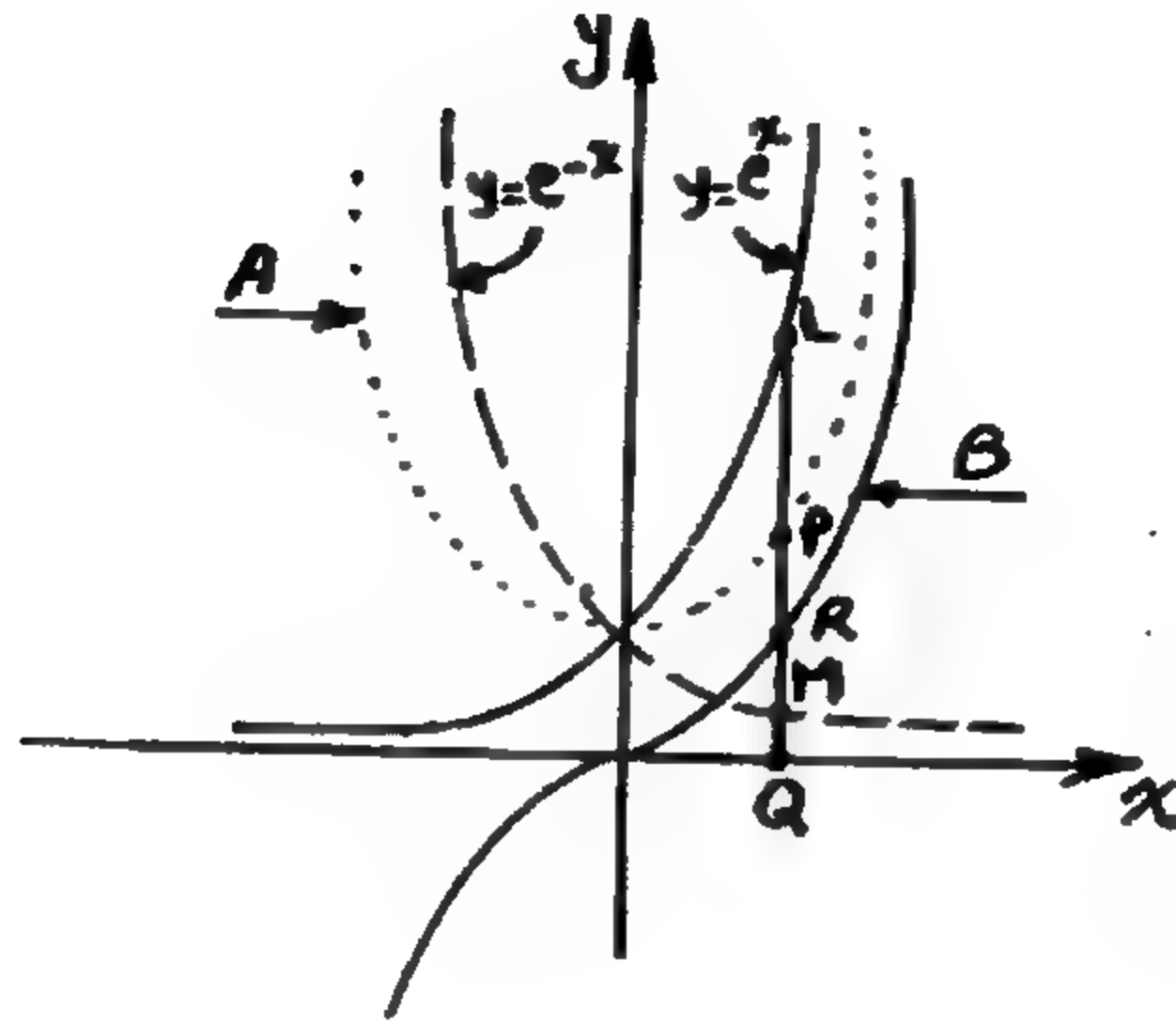
$$y = \tan^{-1} e^{2x} + \text{Log} \sqrt{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}} \quad (٨٨)$$

الباب الرابع عشر

الدوال الزائدية Hyperbolic Functions

١٤-١ :- عام :-

يوضح شكل (١٤-١) ، كلاً من منحنى e^x ، e^{-x} بالإضافة إلى منحنين آخرين وهما A ، B بالشكل .



شكل (١٤-١)

ويلاحظ ما يلي على هذه المنحنيات :-

(١) الإحداثى الرأسى (الصادى) لأى نقطة على المنحنى A يعادل نصف مجموع

الإحداثى الصادى للنقطتين المناظرتين للنقطة الأولى على منحنى e^x ، e^{-x}

فمثلاً النقطة P على المنحنى A ، إحداثيها الصادى PQ يعادل نصف

مجموع كل من LQ ، MQ

وعليه فإنه لأى نقطة على المنحنى A :-

$$\therefore y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(٢) الإحداثى الصادى (الرأسى) لأى نقطة على المنحنى B ، يعادل نصف الفرق بين

الإحداثى الصادى لكل من المنحنين الآخرين e^x ، e^{-x}

$$RQ = \frac{1}{2} [LQ - MQ]$$

∴ لأي نقطة على المنحنى B :-

$$\therefore y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

وعليه فإن المنحنيين يمثلان دالتان في x ومعادلتها كالتالي :-

$$y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad , \quad y = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

وقد وجد أن خواص هاتين الدالتين تماثل خواص $y = \cos x$, $y = \sin x$ ويطلق

على الدالة $y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$ ، بجيب التمام الزائدي Hyperbolic cosine

بينما يُطلق على الدالة $y = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$ بالجيب الزائدي Hyperbolic sine

وقد اختصرت إلى $\sinh x$, $\cosh x$

وتعني إضافة " h " بآخر الرمز إلى الزائدي (Hyp . cos , Hyp . sin)

$$\therefore \cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$, \sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

ومنها نصل إلى :-

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

وهناك أربع دوال زائدية أخرى :-

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$, \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$, \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$, \operatorname{coth} x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

وفى الرسم (١٤-١) يوضح المنحنى A ، الذى يمثل أهمية كبيرة ويُطلق عليه منحنى الكتيه Catenary وهو يأخذ الشكل الذى تأخذه سلسلة منتظمة مرنة معلقة بحرية مع تثبيت نهايتها .

ويمكن التعبير عن $\sinh x$, $\cosh x$ فى صورة متسلسلة باستخدام مفكوك e^x السابق ذكره فى الباب السابق .

$$\therefore e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\therefore e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\therefore \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

١٤-٢ :- بعض العلاقات للدوال الزائدية :-

هنالك تشابه كبير بين العلاقات التى تربط الدوال الزائدية وتلك التى تربط الدوال المثلثية ولنعتبر المثالين التاليين :-

$$1) \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \left[(e^{2x} + e^{-2x} + 2) - (e^{2x} + e^{-2x} - 2) \right] = 1$$

$$\therefore [\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1]$$

$$[\cos^2 x + \sin^2 x = 1]$$

وهى تشبه العلاقة المثلثية الشهيرة :-

$$2) \cosh^2 x + \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh 2x$$

$$\therefore \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$

وهى تشبه العلاقة المثلثية الشهيرة :- $[\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x]$

وبالمثل فإن أى علاقة مثلثية لها نظير فى الدوال الزائدية ويُلاحظ من الحالتين السابقتين أن هنالك اختلافاً فى الإشارات .

وهذا ينطبق فقط على $\sinh^2 x$

وقد وضعت قاعدة تُعرف بقاعدة أوسبورن Osborn's rule ، والتي عن طريقها يمكننا كتابة أى دالة زائدية مباشرة من الدوال المثلثية المناظرة لها ، حيث يتم تغيير إشارة أى

عنصر فى الدوال المثلثية محتوى على $[\sin^2 \text{ أو } \sin \times \sin]$ كما يلي :-

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad \text{الدالة المثلثية :-}$$

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x \quad \text{تُصبح :-}$$

$$\tanh^2 x = \frac{\sinh x \times \sinh x}{\cosh x \times \cosh x} \quad \text{وذلك لأن :-}$$

وفيما يلي جدول يوضح أهم العلاقات فى الدوال الزائدية وما يقابلها من دوال مثلثية :

الدوال الزائدية	الدوال المثلثية
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$	$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
$\operatorname{cosech}^2 x = \coth^2 x - 1$	$\operatorname{cosec}^2 x = \cot^2 x + 1$
$\sinh (x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$	$\sin (x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$
$\cosh (x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$	$\cos (x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

جدول (١٤-١)

كما توجد بعض العلاقات بين مجموعتى الدوال المثلثية والزائدية :-

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), \sin x = \frac{1}{2} i (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$, \sinh x = \frac{1}{i} \sin ix$$

$$, \cosh x = \cos ix$$

حيث : $i = \sqrt{-1}$

٤-٣ :- تفاضل الدوال الزائدية :-

(١) $\sinh x$:-

لتكن : $y = \sinh x$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\sinh x) = \cosh x$$

(٢) $\cosh x$:-

لتكن :- $y = \cosh x$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\cosh x) = \sinh x$$

(٣) $\tanh x$:-

يمكن إيجاد مشتقتها من التعريف بها في الصورة الأسية :-

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{\sinh x}{\cosh x} \text{ ، أو كالتالي :-}$$

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

وباستخدام قاعدة القسمة :-

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x \\ \therefore \frac{d}{dx} (\tanh x) &= \operatorname{sech}^2 x\end{aligned}$$

وبالمثل فإنه يمكن إثبات التالي :-

$$\begin{aligned}y &= \operatorname{cosech} x & \therefore \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{cosech} x \coth x \\ , y &= \operatorname{sech} x & \therefore \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{sech} x \tanh x \\ , y &= \coth x & \therefore \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{cosech}^2 x\end{aligned}$$

ويجب على القارئ الرجوع إلى مُشتقة الدوال المثلثية المشابهة للمقارنة .

(١٤) : منحنيات الدوال الزائدية :-

ارجع لشكل (١٤-١) الذى يوضح منحنى $y = \sinh x$, $y = \cosh x$

$$(1) \quad y = \cosh x , \quad \frac{dy}{dx} = \sinh x , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \cosh x$$

، $\frac{dy}{dx}$ ، تساوى الصفر فقط عندما $x = 0$ ولذلك توجد نقطة تحول على المنحنى (A) وحيث أن $\sinh x$ ، سالبة قبل هذه النقطة وموجبة بعدها ، بينما $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، موجبة فتكون النقطة نهاية صغرى ولا توجد نقط تحول أخرى أو نُقط انقلاب على المنحنى (A) .

$$(2) \quad y = \sinh x : \quad \frac{dy}{dx} = \cosh x , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \sinh x$$

، $\frac{dy}{dx}$ أى $\cosh x$ دائماً موجبة ولا تساوى الصفر أبداً وبالتالي فإن $\sinh x$ تتزايد دائماً وليس لها نقط تحول .

إلا أنه عندما $x = 0$ ، فإن $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ وهى سالبة قبل 0 وموجبة بعدها

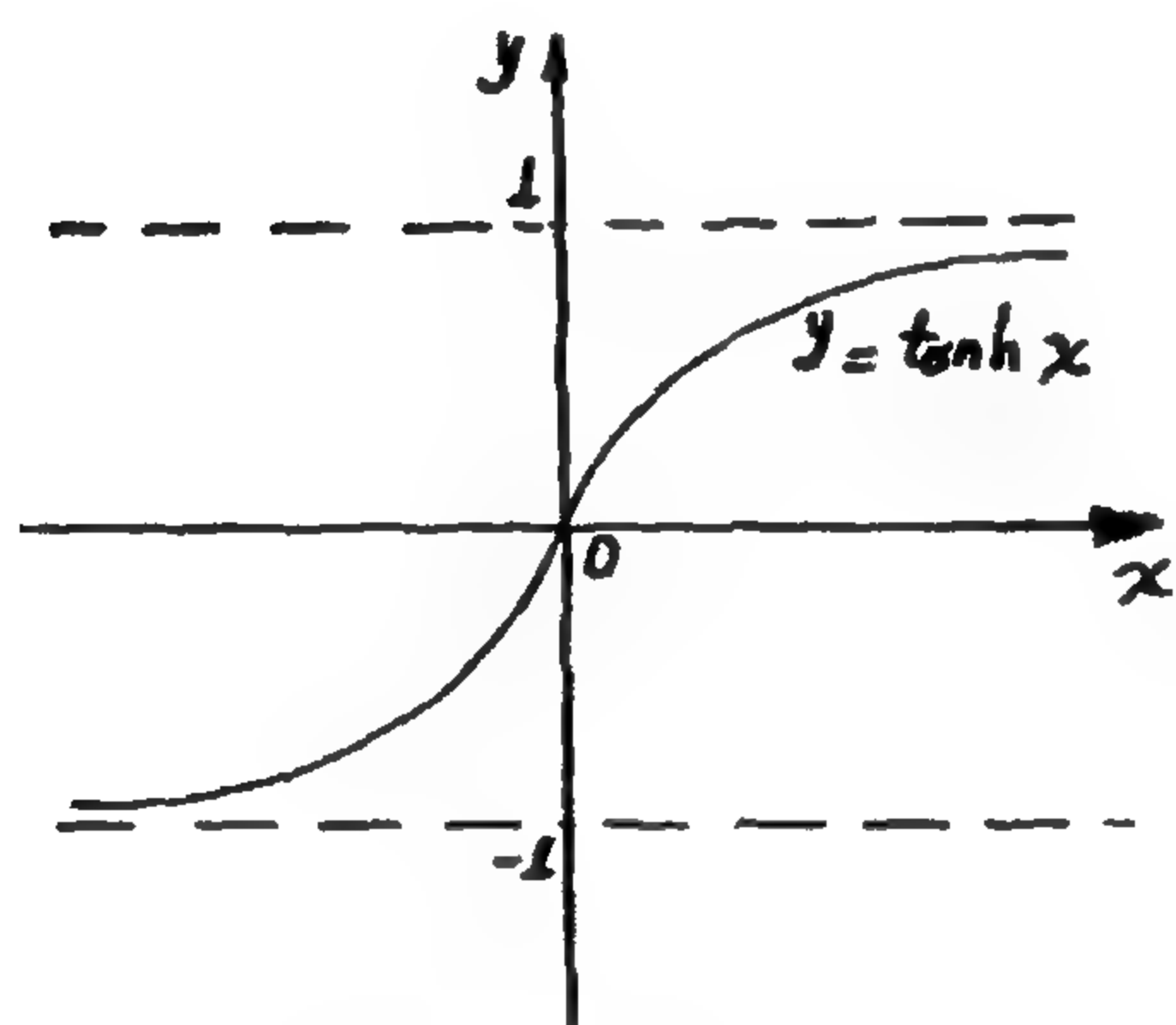
(0 = نقطة الأصل) .

ولذلك فإنه توجد نقطة إنقلاب عندما $x = 0$

ويكون الميل عند نقطة 0 مساوياً للواحد والزاوية $\frac{\pi}{4}$

$$(3) \quad y = \tanh x : \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

وحيث أن $\operatorname{sech}^2 x$ دائماً موجبة فإن $\tanh x$ تتزايد دائماً فيما بين $-\infty$, $+\infty$ وحيث أن كلاً من $\sinh x$, $\cosh x$ مستمرة دائماً (متصلة) كما وأن $\cosh x \neq 0$ تساوى الصفر أبداً ، لذلك فإن $\tanh x$ ، يجب أن تكون دالة متصلة .
ويوضح الشكل (١٤-٢) منحنى $\tanh x$.



شكل (١٤-٢)

كما يمكن كتابة $\tanh x$ في الصورة :

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

ويتضح من هذه الصورة أنه عندما تزداد x من $-\infty$ إلى $+\infty$ فإن e^{2x} تتزايد من صفر إلى ١ .

$$\therefore 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

أو $\tanh x$ تتزايد من - ١ إلى صفر .

وبالمثل فإنه عندما تزيد x من صفر إلى $+\infty$ فإن $\tanh x$ تزيد من صفر إلى الواحد .
ولهذا فإن المنحنى له خطى تقارب asymptotes وهما $y = \pm 1$ وموضحين بالشكل .

١٤-٥ :- تفاضل الدوال الزائدية العكسية

تتشابه الدوال الزائدية العكسية مع نظيرتها (الدوال المثلثية)
ولذلك فإنه يتم استخراج المعادلات التفاضلية (للأولى) بطريقة مشابهة لما تم فى
(الثانية) .

(١) تفاضل $\sinh^{-1} x$:

$$\because y = \sinh^{-1} x$$

$$\because x = \sinh y$$

$$\because \frac{dx}{dy} = \cosh y$$

$$\because \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\because \frac{d}{dx} \sinh^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(٢) تفاضل $\cosh^{-1} x$:

باستخدام نفس الطريقة كما سبق فإن :

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

(٣) تفاضل $\tanh^{-1} x$:

$$\because y = \tanh^{-1} x$$

$$\because x = \tanh y$$

$$\because \frac{dx}{dy} = \operatorname{sech}^2 y$$

$$\because \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y} = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\because \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}$$

(٤) تفاضل $\operatorname{sech}^{-1} x$, $\operatorname{cosech}^{-1} x$, $\operatorname{coth}^{-1} x$:-

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x \sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \operatorname{cosech}^{-1} x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x \sqrt{1+x^2}}$$

$$y = \operatorname{coth}^{-1} x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 - 1}$$

وفيما يلي صيغتان هامتان :-

$$\text{if } y = \sinh^{-1} \frac{x}{a} :-$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\text{if } y = \cosh^{-1} \frac{x}{a} :-$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

٤-٦ :- المكافئ اللوغاريتمي للدوال الزائدية العكسية

$$\sinh^{-1} x = \operatorname{Log} \left[x + \sqrt{1+x^2} \right] \quad (١)$$

$$y = \sinh^{-1} x$$

لتكن

$$\therefore x = \sinh y$$

$$\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$$

ولكن

$$= 1 + x^2$$

$$\cosh y = + \sqrt{1+x^2}$$

($\cosh y$ دائماً موجبة)

$$\therefore \sinh y + \cosh y = x + \sqrt{1+x^2}$$

$$\sinh y + \cosh y = e^y$$

ولكن

$$\therefore e^y = x + \sqrt{1+x^2}$$

وبأخذ اللوغاريتمات للطرفين

$$\therefore y = \text{Log} \left[x + \sqrt{(1 + x^2)} \right]$$

$$\therefore \sinh^{-1} x = \text{Log} \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right]$$

$$\cosh^{-1} x = \pm \text{Log} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right] \quad (2)$$

$$y = \cosh^{-1} x$$

لتكن

$$\therefore x = \cosh y$$

$$\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$$

ولكن

$$= x^2 - 1$$

$$\therefore \sinh y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

[ويمكن أخذ كل من الإشارتين (\pm) لجذر المقدار $(x^2 - 1)$]

$$\therefore e^y = \sinh y + \cosh y$$

$$= \pm \sqrt{x^2 - 1} + x$$

$$= x \pm \sqrt{(x^2 - 1)}$$

$$\therefore y = \text{Log} \left[x \pm \sqrt{(x^2 - 1)} \right]$$

وبأخذ اللوغاريتم للطرفين :-

$$\therefore \cosh^{-1} x = \text{Log} \left[x \pm \sqrt{(x^2 - 1)} \right]$$

ويجمع هاتين الكميتين [(\pm) مرة بالزائد ومرة بالناقص]

$$\therefore \text{Log} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right] + \text{Log} \left[x - \sqrt{x^2 - 1} \right]$$

$$= \text{Log} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) \right]$$

$$= \text{Log} \left[x^2 - (x^2 - 1) \right] = \text{Log} 1 = 0$$

أى أن كلاً من قيمتى $\cosh^{-1} x$ متساويتين ومختلفتين فقط فى الإشارة

$$\therefore \cosh^{-1} x = \pm \text{Log} \left[x + \sqrt{(x^2 - 1)} \right]$$

[ملحوظة : x تقع بين $1, +\infty$]

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+x}{1-x}$$

(3)

لتكن

$$y = \tanh^{-1} x$$

$$\therefore x = \tanh y$$

x تقع بين -1 , $+1$) كما ذكرنا سابقاً في نهاية البند (٤-١٤)

$$\therefore x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$\therefore x (e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1$$

$$\therefore e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore 2y = \text{Log} \frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+x}{1-x}$$

$$i.e \quad \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+x}{1-x}$$

٧-١ :- موجز لتفاضل الدوال الزائدية العكسية :-

الدالة	تفاضلها
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1 - x^2}$
$\text{cosech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x \sqrt{1 + x^2}}$
$\text{sech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x \sqrt{1 - x^2}}$
$\text{coth}^{-1} x$	$\frac{-1}{x^2 - 1}$

كما وأن الصيغ التالية ذات أهمية ، كذلك ؛

$$\begin{aligned} \text{when } y &= \sinh^{-1} \frac{x}{a} & \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ , y &= \cosh^{-1} \frac{x}{a} & \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ , y &= \tanh^{-1} \frac{x}{a} & \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{a}{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

وفيما يلي المكافئ اللوغاريتمي للثلاث دوال العكسية السابقة :-

$$\begin{aligned} \sinh^{-1} \frac{x}{a} &= \text{Log} \left[\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right] \\ \cosh^{-1} \frac{x}{a} &= \pm \text{Log} \left[\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right] \\ \tanh^{-1} \frac{x}{a} &= \frac{1}{2} \text{Log} \left[\frac{a + x}{a - x} \right] \end{aligned}$$

٨-١٤ :- أمثلة محلولة :-

(١) إذا علمت أن :-

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ , \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ , \tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ , \text{sech } x &= \frac{2}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

فبين أن :-

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x \\ , \frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x \\ , \frac{d}{dx} \tanh x &= \text{sech}^2 x \end{aligned}$$

الحل :-

$$a) \because \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dx} \sinh x &= \frac{2(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \times 0}{2^2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \end{aligned}$$

$$b) \because \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dx} \cosh x &= \frac{2(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) \times 0}{2^2} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \end{aligned}$$

$$c) \because \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dx} \tanh x &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{[e^x + e^{-x}]^2} \\ &= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{[e^x + e^{-x}]^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \left[\frac{2}{(e^x + e^{-x})} \right]^2$$

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x} = \operatorname{sech} x$$

ولكن لدينا :-

$$\therefore \frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\sinh^{-1} x = \operatorname{Ln} [x + \sqrt{1 + x^2}]$$

(٢) إذا علمت أن :-

$$, \cosh^{-1} x = \pm \operatorname{Ln} [x + \sqrt{x^2 + 1}]$$

$$, \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left[\frac{1+x}{1-x} \right]$$

فأثبت أن :-

$$1) \frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$2) \frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$3) \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}$$

الحل :-

$$1) \because \sinh^{-1} x = \text{Ln} \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right]$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{d}{dx} \text{Ln} \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right]$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left[1 + \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x \right]$$

$$= \left[\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right] \times \left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right] = \left[\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right] \left[\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right]$$

$$= \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{(\sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$2) \because \cosh^{-1} x = \pm \text{Ln} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right]$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{d}{dx} \left[\pm \text{Ln} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \right]$$

$$= \pm \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \times \left[1 + \frac{1}{2} (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x \right]$$

$$= \pm \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right) \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$$

$$= \pm \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \times \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \pm \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{(x + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 - 1})}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$3) \quad \therefore \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \times \frac{d}{dx} \left[\operatorname{Ln} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \left[\frac{(1-x)(1) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \right]$$

$$= \frac{(1-x) [(1-x) + (1+x)]}{2(1+x)(1-x)^2} = \frac{2(1-x)}{2(1+x)(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

Exercise 15

فاضل كل من الدوال التالية :-

$$\sinh 3x \quad (٢)$$

$$\sinh \frac{x}{4} \quad (١)$$

$$\tanh bx \quad (٤)$$

$$\cosh \frac{x}{3} \quad (٣)$$

$$\sinh bx + \cosh bx \quad (٦)$$

$$\tanh \frac{x}{2} \quad (٥)$$

$$\sinh^2 x \quad (٨)$$

$$\sinh \frac{1}{x} \quad (٧)$$

$$\sinh (ax + b) \quad (١٠)$$

$$\cosh^3 x \quad (٩)$$

$$\tanh^2 x \quad (١٢)$$

$$\sinh^n ax \quad (١١)$$

$$x^3 \sinh 3x \quad (١٤)$$

$$x \sinh x - \cosh x \quad (١٣)$$

$$e^{\tanh x} \quad (١٦)$$

$$\operatorname{Log} (\sinh x + \cosh x) \quad (١٥)$$

$$\tanh^{-1} \frac{2x}{1+x^2} \quad (18)$$

$$\tan^{-1} \left(\tanh \frac{x}{2} \right) \quad (19)$$

$$y = \tanh x + \coth x \quad (20)$$

$$y = x - \coth x \quad (21)$$

$$y = \sin^{-1} (\tanh x) \quad (22)$$

$$\sinh^{-1} \frac{1-x}{1+x} \quad (23)$$

$$\tan^{-1} x + \tanh^{-1} x \quad (24)$$

$$y = x - \tanh x \quad (25)$$

$$y = \sqrt{1 + \sinh^2 4x} \quad (26)$$

$$y = 2 \sqrt{\coth x - 1} \quad (27)$$

$$y = \text{Log} (\tanh x) \quad (28)$$

الباب الخامس عشر

التفاضل الجزئى

Partial Differential .

١٥-١ - عام

يجب أن لا يغيب عن الذهن فى كل ما درسناه سابقاً أن عمليات إيجاد المشتقة الأولى كانت للدوال ذات المتغير المستقل الواحد أى أن : $y = f(x)$ إلا أنه فى كثير من الحالات تكون الكمية y مرتبطة بأكثر من متغير مستقل (إثنين أو أكثر) .

وفى هذه الحالة فإن عملية إيجاد المشتقات الجزئية تكون بنفس أسلوب إيجاد مشتقات الدوال ذات المتغير الواحد مع الاختلاف فى طريقة التعامل مع باقى المتغيرات المستقلة عند إجراء التفاضل أو الاشتقاق لأحد هذه المتغيرات .

فمثلاً إذا كانت $y = f(x, z)$ فإنه عند حساب المعامل التفاضلى الجزئى لها بالنسبة للمتغير x فإن المتغير الآخر z يعامل معاملة المقدار الثابت طبقاً لقواعد التفاضل المعتادة. وعند إجراء التفاضل بالنسبة إلى المتغير z ، فإنه وبالمثل ، يُعامل x معاملة المقدار الثابت.

وعموماً فإنه إذا كانت ' y ' دالة فى أكثر من متغيرين فإنه عند إيجاد المشتقة الجزئية لأحد هذه المتغيرات ، فإن بقية المتغيرات تُعامل معاملة المقدار الثابت .

١٥-٢ :- التفاضل الجزئى للدوال ذات المتغيرين :-

(١) المشتقة الجزئية الأولى :-

وفى الدوال ذات المتغير الواحد مثل $y = f(x)$

فإن المشتقة الأولى لهذه الدالة y بالنسبة للمتغير المستقل x تعبر عن معدل التغير اللحظى فى المتغير التابع y والذى يحدث نتيجة لتغير طفيف فى المتغير المستقل x .

والآن ماذا تعنى المشتقة الأولى لدالة فى متغيرين مستقلين مثل x, z أى أن :-

$$y = f(x, z)$$

سنجد أن المشتقة الأولى الجزئية عبارة عن معدل التغير في المتغير التابع "y" الذى يحدث نتيجة لتغير طفيف في المتغيرين المستقلين x , z ولكن كل منهما على حدة . ولنعتبر الحالة التالية :-

حجم الغاز يعتمد على كل من الضغط ودرجة الحرارة المعرض لها فإذا فرضنا أن :-

V = حجم الغاز

P = ضغط الغاز

t = درجة حرارة الغاز

ويُعبر عن العلاقة هذه فى الصيغة التالية :-

$$V = k \frac{t}{p}$$

حيث k ثابت " حجم الغاز يتناسب طردياً مع درجة حرارته بينما يتناسب عكسياً مع الضغط المعرض له فإذا زادت الحرارة زاد الحجم والعكس بالعكس وإذا زاد الضغط قل الحجم والعكس بالعكس " .

(١) ولنفترض أن الحرارة متغيرة وأن الضغط يبقى ثابتاً .

$$\therefore \frac{dv}{dt} = k \times \frac{1}{p} \quad \dots\dots\dots (١)$$

(٢) ولنفترض أن الضغط يتغير مع بقاء درجة الحرارة ثابتة .

$$\therefore \frac{dv}{dp} = k \cdot \frac{t}{-p^2} = -k \frac{t}{p^2} \quad \dots\dots\dots (٢)$$

ومن ذلك نلاحظ فى هذه الحالة أنه لما كان هنالك متغيران فقد تكونت لنا مشتقتان

$$\frac{dv}{dp} , \frac{dv}{dt} \text{ أى (٢) ، (١)}$$

ويطلق على هذه المشتقات بالمشتقات الجزئية

Partial derivatives or Partial differential coefficients

وقد اختيرت رموز خاصة للتعبير عن هذه المشتقات الجزئية . فبدلاً من الحرف d (كما

فى $\frac{dy}{dx}$) نضع الرمز "∂" ويُقرأ [التفاضل الجزئى] Partial differential

وبذلك فإن المشتقات الجزئية السابقة في (١) ، (٢) يُعبر عنها كالتالى :-

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \cdot \frac{1}{p} \quad \dots\dots\dots (٣)$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{kt}{p^2} \quad \dots\dots\dots (٤)$$

وتعنى (٣) أن الحجم V قد تم تفاضله بالنسبة إلى t مع بقاء p ثابتة فى حين تعنى (٤)

أن الحجم V قد تم تفاضله بالنسبة إلى p مع بقاء t ثابتة .

وعموماً إذا كانت z دالة فى x , y أى $z = f(x, y)$ فإن :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ عندما } x \text{ متغيرة ، } y \text{ ثابتة}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ عندما } y \text{ متغيرة ، } x \text{ ثابتة}$$

ويمكن تعريف المعامل التفاضلى الجزئى كالتالى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(y + \Delta y, x) - f(x, y)}{\Delta y}$$

أمثلة :-

(١) اوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :

$$y = 5x^2 + 6z^3$$

الحل :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 10x + 0 = 10x \quad \text{" ثابت } 6z^3 = \text{"}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0 + 18z^2 = 18z^2 \quad \text{" ثابت } 5x^2 = \text{"}$$

(٢) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$y = 8x^2z + 4x^3z^2 - 5z^3x$$

الحل :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (8z) \times 2x + (4z^2) \times 3x^2 - (5z^3) \times 1$$

$$= 16xz + 12x^2z^2 - 5z^3 \quad (z = \text{ثابت})$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = (8x^2) \times 1 + (4x^3) \times 2z - (5x) \times 3z^2$$

$$= 8x^2 + 8x^3z - 15xz^2 \quad (x = \text{ثابت})$$

(٣) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = 2x^3 + 5x^2y + xy^2 + y^3$$

الحل :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 10xy + y^2 + 0 \quad (y = \text{ثابت})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 5x^2 \times 1 + 2xy + 3y^2 \quad (x = \text{ثابت})$$

(٤) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = \sin x + y^2 \cos x + e^{2y}$$

الحل :-

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos x + 2e^{2y} \quad (x = \text{ثابت})$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x - y^2 \sin x \quad (y = \text{ثابت})$$

(٥) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = f(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

الحل :-

باستخدام قواعد تفاضل الدالة الأسية فإن :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \times 2x = 2x e^{x^2+y^2} \quad (y = \text{ثابت})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \times 2y = 2y e^{x^2+y^2} \quad (x = \text{ثابت})$$

(٦) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$y = (4x^2 - 3z^3)^4$$

الحل :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4 (4x^2 - 3z^3)^3 \times 8x$$

$$= 32x (4x^2 - 3z^3)^3, (z = \text{constant})$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 4 (4x^2 - 3z^3)^3 \times -6z$$

$$= -24z (4x^2 - 3z^3)^3, (x = \text{constant})$$

(٧) فى دراسة لخطّة تسويق منتجات أحد المصانع وُجد أن عدد الوحدات التى يبيعها المصنع سنوياً تعتمد على تطوير الأبحاث والإنفاق عليها وعلى تطوير الماكينات كذلك . وكانت العلاقة بين كمية المبيعات "y" ومصاريف الأبحاث "x" بالآلف جنيه " ومصاريف تطوير الماكينات " z بالآلف جنيه " كالتالى :-

$$y = f(x, z) = 1200x + 5000z - 10x^2 - 7z^3 - 30xz$$

فإذا افترضنا أن الشركة تنفق ما مقداره وحدة واحدة على الأبحاث (أى ألف جنيه) وخمس وحدات على تطوير الماكينات (خمسة آلاف جنيه) فإنه من المتوقع أن يكون عدد الوحدات المباعة كالتالى :-

$$y_{(1,5)} = 1200 \times 1 + 5000 \times 5 - 10 \times 1^2 - 7 \times 5^3 - 30 \times 1 \times 5$$

$$= 1200 + 25000 - 10 - 7 \times 125 - 150$$

$$= 26200 - 1035$$

$$= 25165 \text{ وحدة}$$

فإذا ما فرضنا أن المصنع يرغب فى زيادة المبالغ المخصصة على الأبحاث وتطويرها مما يساعد بالتبعية على رفعة جودة المنتج وسرعة بيعه . ونريد أن نعرف مدى تأثير الزيادة المخصصة للأبحاث هذه على عدد الوحدات المتوقع بيعها .

فإنه بالتفاضل الجزئي الأول للدالة y بالنسبة إلى x يمكن الحصول على رقم تقديري (قريباً من الواقع) كما يلي :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1200 - 20x - 30z$$

ولما كان المطلوب هو حساب معدل التغير اللحظي عندما $z = 5$, $x = 1$:-

$$\begin{aligned} \therefore \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_{(1,5)} &= 1200 - 20 \times 1 - 30 \times 5 \\ &= 1200 - 170 \\ &= 1030 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن زيادة الأبحاث بمقدار وحدة واحدة (ألف جنيه) تؤدي إلى زيادة متوقعة في كمية الوحدات المباعة قدرها 1030 وحدة .

ولكن كيف يمكننا معرفة مدى دقة هذا التوقع

لذلك ، يلزم إيجاد قيمة y عندما $z = 5$, $x = 2$:

أي عندما تزيد x من 1 وحدة إلى 2 وحدة نقدية .

$$\begin{aligned} \therefore y_{(2,5)} &= 1200 \times 2 + 5000 \times 5 - 10 \times 2^2 - 7 \times 5^3 - 30 \times 2 \times 5 \\ &= 2400 + 25000 - 40 - 7 \times 125 - 300 \\ &= 27400 - 1215 \\ &= 26185 \quad \text{وحدة} \end{aligned}$$

فإذا ما قارنا $y_{2,5}$ وهي تساوي 26185 وحدة بـ (1030 + 25165) أي 26185

بـ : 26195

سنجد أن الفرق ضئيل جداً ومن هنا نجد أن المشتقة الجزئية قد أعطت نتائج قريبة جداً من المتوقع وبنسبة لا تتعدى 10 وحدات .

$$\text{أي } \frac{10}{26185} \text{ أي حوالي } \% 38 \times 10^{-5} \text{ أقل من } \% 0.04$$

والآن إذا ما رغبتنا في زيادة المبالغ المخصصة لتطوير المعدات والآلات بهذا المصنع بمقدار وحدة نقدية واحدة (1000 جنيه) أي أن Z ستزيد بمقدار واحد ، فإنه يمكن حساب

الزيادة المتوقعة في عدد الوحدات المباعة بحساب معدل التغير في y نتيجة لتغير z بمقدار وحدة واحدة .

∴ معدل التغير اللحظي :-

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial z} &= 5000 - 21z^2 - 30x \\ \therefore \left[\frac{\partial y}{\partial z} \right]_{(1,5)} &= 5000 - 21 \times 5^2 - 30 \times 1 \\ &= 5000 - 525 - 30 \\ &= 4445 \quad \text{وحدة}\end{aligned}$$

بمعنى أن زيادة المبالغ المخصصة بمقدار وحدة واحدة في تطوير الماكينات قد أدى إلى زيادة في المبيعات بحوالى 4445 وحدة .

والآن يراد معرفة مدى الدقة في تقدير المبيعات المتوقعة عندما تكون مصاريف الأبحاث ١ وحدة . بينما تزداد مصاريف تطوير المعدات بمقدار وحدة واحدة لتُصبح 6 وحدات .

$$\begin{aligned}\therefore y_{(1,6)} &= 1200 \times 1 + 5000 \times 6 - 10 \times 1^2 - 7 \times 6^3 - 30 \times 1 \times 6 \\ &= 1200 + 30000 - 10 - 1512 - 180 \\ &= 31200 - 1702 \\ &= 29498 \quad \text{وحدة,}\end{aligned}$$

وبمقارنة هذه الكمية مع الكمية (29610 = 4445 + 25165)

نجد أن الفرق حوالى 112 وحدة وهو ليس كبيراً لأن نسبة الخطأ لا تتعدى $\frac{112}{29498} = 37 \times 10^{-4}$ أقل من 0.4 %

لاحظ أن الزيادة نشأت عن أن الدالة تربيعية في x بينما تكعيبية في z وكلما زادت درجة أو قوة أحد المتغيرات ازداد الفرق المتوقع .

٢- المشتقة الجزئية الثانية :-

إن إيجاد المشتقة الثانية الجزئية للدوال ذات المتغيرين المستقلين لا يختلف فى حسابه عن قواعد التفاضل المعروفة غير أنه يجب ملاحظة ما يلى :-

فى حالة $y = f(x)$ كان المتغير المستقل واحد وكانت المشتقة الأولى y' واحدة وكذلك المشتقة الثانية واحدة فقط للدالة .

أما فى حالتنا هذه حيث يوجد متغيران مستقلان فإن المشتقة الجزئية الأولى عبارة عن

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x} \right) \text{ مشتقتين}$$

ومن هنا فإنه عند إيجاد المشتقة الجزئية الثانية سيكون لدينا الاشتقاقات التالية :-

$$Z = f(x, y) \quad \text{نفرض :-}$$

$$\left[\begin{array}{l} \therefore \frac{\partial z}{\partial x} , \quad y = \text{ثابت} \\ \frac{\partial z}{\partial y} , \quad x = \text{ثابت} \end{array} \right] \text{ هى المشتقة الجزئية الأولى}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right]$$

وهذا يعنى أن الاشتقاق الجزئى الأول بالنسبة إلى $x \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]$ ، سيشتق جزئياً مرة ثانية

$$\text{بالنسبة إلى } x \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] \text{ ومرة ثانية بالنسبة إلى } y \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right]$$

كما وأن الاشتقاق الجزئى الأول بالنسبة إلى $y \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]$ ، سيشتق جزئياً مرة ثانية بالنسبة

$$\text{إلى } x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \right] \text{ ومرة ثانية بالنسبة إلى } y \text{ أى } \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] \text{ أى أن المشتقة الجزئية الثانية}$$

لدالة فى متغيرين مستقلين عبارة عن أربعة اشتقاقات .

أمثلة :-

(٨) أوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة :-

$$Z = f(x, y) = 6x^3 - 5x^2y + 10xy + 8y^3$$

الحل :-

المشتقات الجزئية الأولى كالتالى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 18x^2 - 10xy + 10y \quad (, y = \text{constant})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -5x^2 + 10x + 24y^2 \quad (, x = \text{constant})$$

والمشتقات الجزئية الثانية تكون كالتالى :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 36x - 10y \quad (, y = \text{constant})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -10x + 10 \quad (, x = \text{constant})$$

بالإضافة إلى :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -10x + 10 \quad (, y = \text{constant})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y \quad (, x = \text{constant})$$

ولاحظ أن عددها أربعة مشتقات جزئية

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -10x + 10 \right] \text{ لاحظ كذلك أن}$$

(٩) أوجد المشتقة الجزئية الأولى والثانية للدالة :-

$$Z = f(x, y) = -3x^3 + 5y^4 - 3x^2y^2$$

الحل :-

المشتقات الجزئية الأولى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -9x^2 - 6xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 20y^3 - 6x^2y$$

والمشتقات الجزئية الثانية :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -18x - 6y^2 \quad \dots\dots\dots (١)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12xy \quad \dots\dots\dots (٢)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12xy \quad \dots\dots\dots (٣)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 60y^2 - 6x^2 \quad \dots\dots\dots (٤)$$

لاحظ أن (٣) تساوى (٤) وقد لاحظنا هذا فى المثال السابق وتعرف هذه بالمشتقات

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

وهى متساوية لكل الدوال التى ستعرض لها هنا .

وتساعد هذه الملاحظة فى التأكد من صحة كل المشتقات الجزئية الأولى والثانية المتقاطعة.

١٥-٣ :- التفاضل الجزئى للدوال فى أكثر من متغيرين :-

نفترض أن الدالة : $G(x, y, z) = (G)$ فى ثلاث متغيرات مستقلة هى x, y, z

سنجد أن عدد المشتقات الجزئية الأولى = ٣ مشتقات

بينما عدد المشتقات الجزئية الثانية = ٩ مشتقات

١- المشتقات الجزئية الأولى فى ثلاث متغيرات :-

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}$$

٢- المشتقات الجزئية الثانية فى ثلاث متغيرات :-

تفاضل جزئى بالنسبة إلى x للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى y للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى z للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x}$$

بالإضافة إلى :-

تفاضل جزئى بالنسبة إلى x للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى y

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى y للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى z للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى y

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y}$$

وأخيراً :-

تفاضل جزئى بالنسبة إلى x للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى z

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى y للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى z

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى z للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى z

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$$

وهكذا الأمر فى حالة دالة فى أربعة متغيرات مستقلة ، سنجد أن :-

المشتقات الجزئية الأولى عددها ٤ بينما المشتقات الجزئية الثانية عددها ١٦ (كل واحدة

من الأربعة اشتقاقاً بالأولى تُشتق أربع مرات للمرة الثانية) .

وعموماً :-

عدد المشتقات الجزئية الأولى لأى دالة = عدد المتغيرات المستقلة فى هذه الدالة

بينما عدد المشتقات الجزئية الثانية لهذه الدالة = مربع عدد المتغيرات المستقلة بها

أى أنه إذا كانت : $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

فإن عدد المشتقات الجزئية الأولى = n

، عدد المشتقات الجزئية الثانية = n^2

أمثلة :-

(١٠) إذا كانت :

$$G = \text{func.}(x, y, z) = 5x^3 + 12x^2 y^3 + 8yz^3 + 7y^4$$

فأوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية لهذه الدالة :

الحل :-

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 15x^2 + 24xy^3 \quad \dots\dots\dots (A)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 36x^2 y^2 + 8z^3 + 28y^3 \quad \dots\dots\dots (B)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 24yz^2 \quad \dots\dots\dots (C)$$

وليجاد المشتقات الجزئية الثانية :-

نفاضل المعادلة " A " ثلاث مرات بالنسبة إلى " x , y , z "

، نفاضل المعادلة " B " ثلاث مرات بالنسبة إلى " x , y , z "

، نفاضل المعادلة " C " ثلاث مرات بالنسبة إلى " x , y , z "

∴ بالنسبة إلى A :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 30x + 24y^3 \quad \dots\dots\dots (١)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} = 72xy^2 \quad \dots\dots\dots (٢)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} = 0 \text{ (zero)} \quad \dots\dots\dots (٣)$$

، بالنسبة إلى (B) :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 72xy^2 \quad \dots\dots\dots (٤)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 72x^2y \quad \dots\dots\dots (٥)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y} = 24z^2 \quad \dots\dots\dots (٦)$$

وبالنسبة إلى (C) :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} = 0 \text{ (zero)} \quad \dots\dots\dots (٧)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} = 24z^2 \quad \dots\dots\dots (٨)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 48yz \quad \dots\dots\dots (٩)$$

لاحظ أن عددها ٩ مشتقات جزئية ولاحظ التالي أيضاً :-

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} = 72xy^2 \quad \text{رقم (٢) = رقم (٤) =}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} = 0 \text{ (zero)} \quad \text{رقم (٣) = رقم (٧) =}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y} = 24z^2 \quad \text{رقم (٦) = رقم (٨) =}$$

١٥-٤ :- مصفوفة هيس والمحدد الهيسى Hessian matrix and determinant

قام هيس بوضع التفاضلات الجزئية الثانية للدالة في مصفوفة مربعة ومحدد المصفوفة المربعة هذه يُطلق عليه بالمحدد الهيسى .

وقد علمنا مما سبق أن عدد المشتقات الجزئية الأولى للدالة في متغيرين هو ٢ بينما المشتقات الجزئية الثانية = 4 = 2² وفي حالة ٣ متغيرات مستقلة فإن المشتقات الجزئية

الثانية = 3² وفي حالة n متغير مستقل فإن المشتقات الجزئية الثانية n² × n =

وتكون مصفوفة هيس كالتالي :-

(١) في حالة متغيرين : Z = f(x , y)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \end{bmatrix} = \text{مصفوفة هيس } 2 \times 2$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

ويمكن اختصارها هكذا :

حيث :-

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} = z_{12} , \quad z_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} , \quad z_1 = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z_{21} , \quad z_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} , \quad z_2 = \frac{\partial z}{\partial y}$$

بينما تكون مصفوفة هيس في حالة دالة في ثلاثة متغيرات كالتالي :-

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفة هيس " } 3 \times 3 \text{ "$$

وفي حالة n متغير مستقل فإن مصفوفة هيس تكون كالتالي :-

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفة هيس } n \times n$$

أى أن الصف الأول عناصره عبارة عن :-

مشتقات $\frac{\partial z}{\partial x}$ بالنسبة إلى كل المتغيرات على الترتيب (x, y, \dots)

، عناصر الصف الثانى عبارة عن :-

مشتقات $\frac{\partial z}{\partial y}$ بالنسبة إلى جميع المتغيرات على الترتيب (x, y, \dots)

بينما عناصر الصف الثالث فهى عبارة عن :-

مشتقات $\frac{\partial z}{\partial m}$ (m) هي المتغير المستقل الثالث مثلاً في الدالة Z خلاف ... (x , y)

بالنسبة إلى جميع المتغيرات على الترتيب (x , y , m ...)

أمثلة :-

(١١) كون مصفوفة هيس ومن ثم احسب قيمة المحدد الهيسى لكل من الدوال

التالية :-

$$Z = f(x, y) = 6x^3 - 5x^2y + 10xy + 8y^2 \quad (أ)$$

$$Z = f(x, y) = -3x^3 + 5y^4 - 3x^2y^2 \quad (ب)$$

الحل :-

الدالة (أ) هي المثال رقم ٨ السابق حله

وسوف نجد أن :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = Z_{11} = 36x - 10y$$

$$Z_{12} = -10x + 10$$

$$, Z_{21} = -10x + 10$$

$$, Z_{22} = 48y$$

∴ مصفوفة هيس لهذه المسألة :-

$$\begin{bmatrix} (36x - 10y) & (-10x + 10) \\ (-10x + 10) & (48y) \end{bmatrix}$$

وقيمة المحدد الهيسى :-

$$\begin{vmatrix} 36x - 10y & -10x + 10 \\ -10x + 10 & 48y \end{vmatrix} = \Delta$$
$$= [(36x - 10y)(48y)] - [(-10x + 10)(-10x + 10)]$$
$$= 1728xy - 480y^2 - [100x^2 - 200x + 100]$$
$$= 1728xy - 480y^2 - 100x^2 + 200x - 100$$

، الدالة (ب) هي المثال رقم (٩) السابق حله :-

وسوف نجد أن :-

$$Z_{11} = -18x - 6y^2$$

$$Z_{12} = -12xy$$

$$Z_{21} = -12xy$$

$$Z_{22} = 60y^2 - 6x^2$$

∴ مصفوفة هيس في هذه الحالة :-

$$\begin{bmatrix} -18x - 6y^2 & -12xy \\ -12xy & 60y^2 - 6x^2 \end{bmatrix}$$

، قيمة المحدد الهيسى Δ =

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{bmatrix} -18x - 6y^2 & -12xy \\ -12xy & 60y^2 - 6x^2 \end{bmatrix} \\ &= [(-18x - 6y^2)(60y^2 - 6x^2)] - [+144x^2y^2] \\ &= -1080xy^2 + 108x^3 - 360y^4 + 36x^2y^2 - 144x^2y^2 \\ &= -360y^4 + 108x^3 - 1080xy^2 - 108x^2y^2 \end{aligned}$$

١٥-٥ :- توضيح معنى التفاضل الجزئى بيانياً وهندسياً

Graphical and Geometrical illustration of partial derivatives

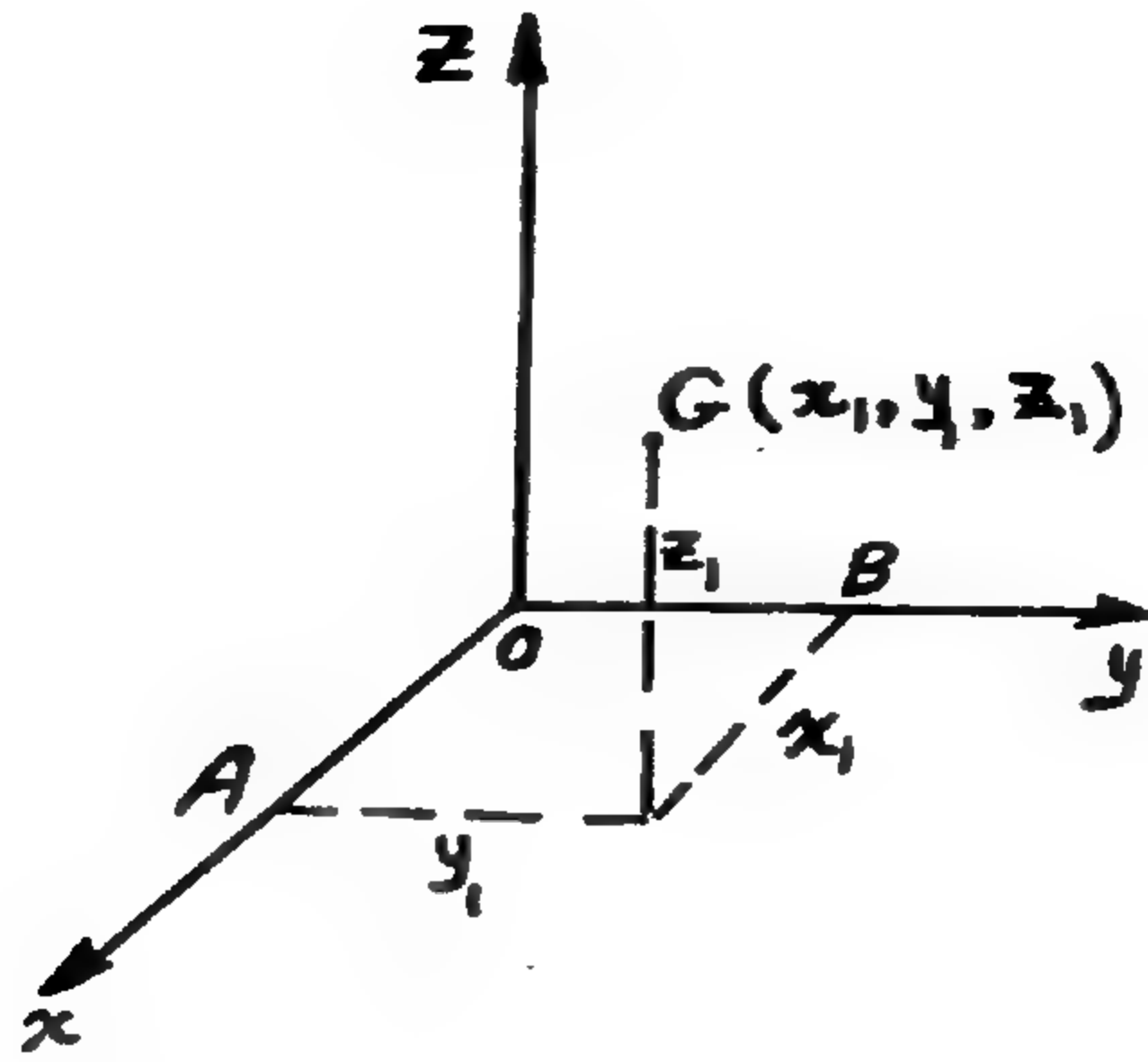
نعلم أن الدالة $y = f(x)$ يمثلها مستقيم عندما تكون x من الدرجة الأولى ويقع هذا المستقيم في المستوى $X O Y$

بينما يمثلها منحنى مستوى يقع في المستوى $X O Y$ كذلك (أو في أى مستوى آخر) إذا كانت درجتها أى x من الثانية فأكثر .

هذا الكلام عندما يكون هنالك متغير واحد مستقل وهو x

ولكن في حالة الدالة $Z = f(x, y)$ ، فهناك متغيرين مستقلين x, y ومتغير تابع وهو Z ويمكن تمثيل هذه الدالة بواسطة سطح Surface أى إحداثيات فراغية (ثلاثية الأبعاد) ، كالتالى :

أنظر الرسم شكل (١٥-١).



شكل (١٥-١)

نعتبر المحورين OX , OY المتعامدين على بعضهما ويمثلهما المستوى (الأفقى) XOY ،
ويمكننا تمثيل متغيرين مستقلين x , y على المحورين OX , OY وسوف نطلق عليه
المستوى xy .

فإذا ما أقمنا العمود OZ على هذا المستوى من O فسينشأ لدينا مستويان YOZ , XOZ
عموديان على المستوى xy ومتعامدان مع بعضهما في نفس الوقت ويطلق عليهما
بالمستويان xz , yz

ويمثل المحور OZ قيم Z المناظرة لقيم كل من x , y .

فإذا افترضنا أن النقطة p (point = p) في المستوى xy والتي إحداثياتها هي :
 (x_1, y_1)

حيث نوقع على المحور ox النقطة B التي إحداثياتها x_1 على المحور OX ونوقع على
المحور oy النقطة A التي إحداثياتها y_1 على المحور OY وبذلك فإن p التي تقع في
المستوى " $xy = XOY$ " وإحداثياتها هما (x_1, y_1)

فإذا ما رسمنا من p عموداً على المستوى XOY وموازياً للمحور OZ وبحيث يكون
طوله مساوياً لقيمة Z أى يساوى Z_1 المناظرة لقيمتي (x_1, y_1) .

وبذلك سنجد أن النقطة C تمثل وضع النقطة في الفراغ عندما تكون المحاور

OZ, OY, OX والإحداثيات هي Z_1, Y_1, X_1

فإذا ما تغيرت قيم x, y وأوجدنا قيم Z المناظرة لهما ، سنجد أنه يمثلها نقطة أخرى على السطح ذاته الذى تقع عليه C .

أولاً :- نعتبر y ثابتة وقيمتها هي y_1 :-

سنجد أن المنحنى GCE يمثل التغيرات في Z بالنسبة إلى x مع ثبوت y

وبالتبعية فإن المشتقة الجزئية الأولى للدالة بالنسبة إلى x أى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{تمثل ميل المماس للمنحنى GCE}$$

المناظرة لأى قيمة محددة لـ x

فمثلاً عندما $x = x_1$ فإن نقطة C هي النقطة المناظرة على المنحنى GCE وتكون قيمة

ميل المماس لهذا المنحنى عند نقطة C التى إحداثياتها $x = x_1$ هو $\frac{\partial z}{\partial x}$

ثانياً :- نعتبر x ثابتة وقيمتها هي x_1 :-

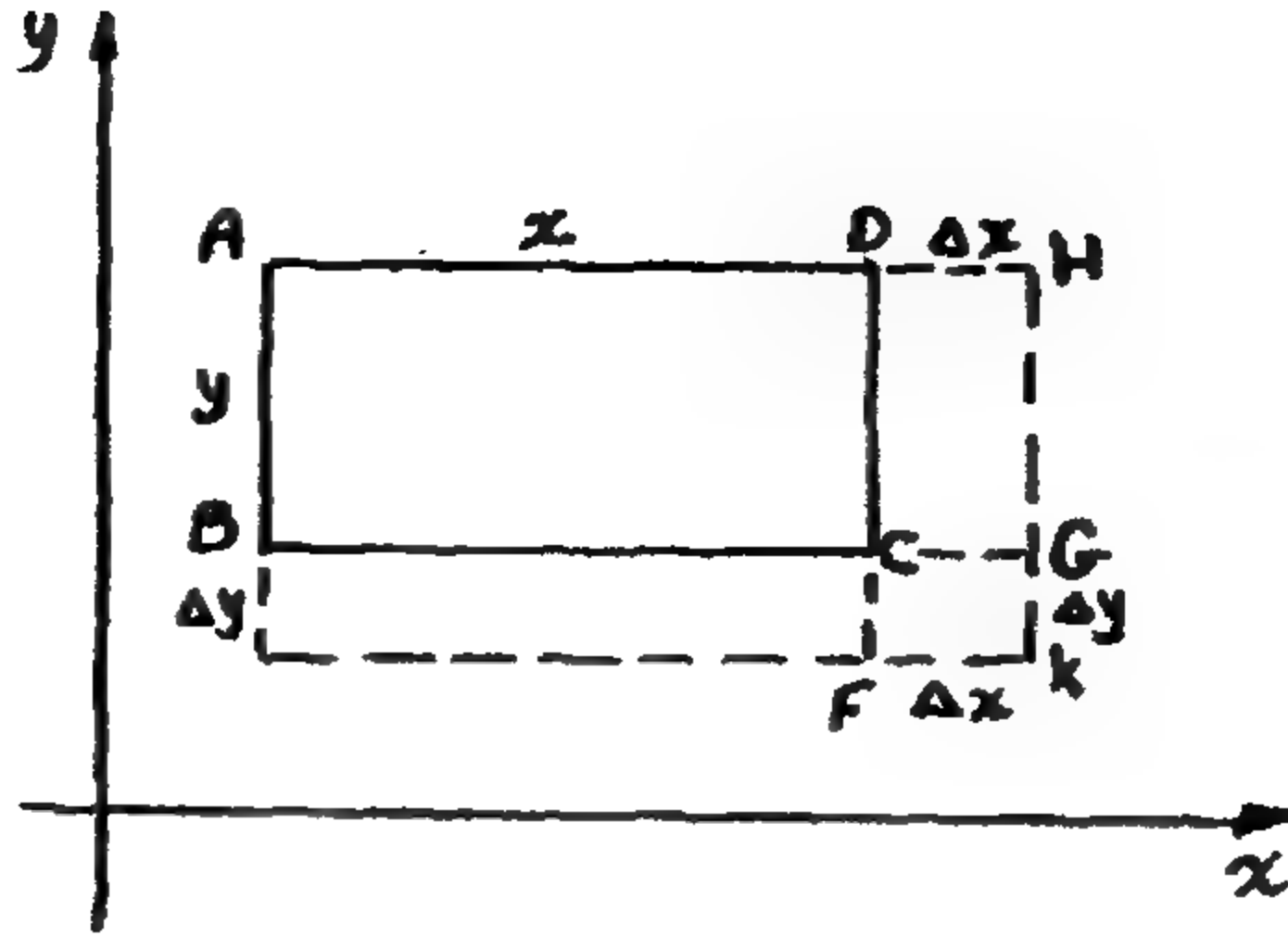
سنجد أن المنحنى FCD يمثل التغيرات في Z بالنسبة إلى y مع ثبوت قيمة x ويكون

المماس لهذا المنحنى FCD عند أى نقطة عليه مساوياً أو معبراً عن $\frac{\partial z}{\partial y}$ لقيم y, z

والآن :- نريد أن نوضح كذلك معنى المشتقة الجزئية الأولى لدالة فى متغيرين هندسياً .

لنعتبر أن لدينا مستطيلاً ، بالطبع مساحته دالة فى متغيرين وهما طوله وعرضه غير المتساويين .

ويوضح شكل (١٥-٢) مستطيل بعده x, y ومساحته A .



شكل (١٥-٢)

$$\therefore A = xy$$

فإذا اعتبرنا ثبوت y مع تغير x بمقدار ضئيل قدره Δx

$$\therefore A + \Delta A = (x + \Delta x) \times y$$

$$, \Delta A = y \cdot \Delta x$$

ويمثلها بالشكل المساحة CGHD

ومعدل زيادة A بالنسبة إلى x مع بقاء y ثابتة يعنى التفاضل الجزئى

$$\frac{\partial A}{\partial x} \text{ أى } \frac{\partial}{\partial x}(xy) \text{ وهى تساوى } y$$

وبالمثل إذا اعتبرنا ثبوت x مع تغير y فإن التغير فى المساحة يمثلها الشكل المستطيل

$$x \Delta y = BEFC$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$$

ومعدل الزيادة فى المساحة :-

أما إذا تغيرت كل من x, y فإن :-

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot dy$$

$$= y dx + x dy$$

وبمقارنة هذا بالشكل (١٥-٢) يتضح أن الزيادة الكلية فى المساحة نتيجة لتغير كل من

x, y بمقدار ضئيل ؛ عبارة عن :-

المستطيل BEFC ، والمستطيل CGHD والمستطيل الصغير CFKG

$$y dx + x dy + dx dy \quad \text{أى :-}$$

وحيث أن $dx dy$ هي حاصل ضرب مقدارين متناهيين فى الصغر . لذلك فإن قيمتها النهائية تكون أكثر تناهياً فى الصغر .

وبذلك فإنه يمكن اعتبار الزيادة الفعلية فى المساحة نتيجة لتغير كل من x , y هي :-
 $y dx + x dy$

فإذا ما افترضنا أن $y = 8m$ ؛ وأنه عند لحظة معينة كانت y تزداد بمعدل $2m/sec$

ونفترض كذلك أن $x = 5m$ وأنه عند نفس اللحظة كانت x تزداد بمعدل $3m/sec$

والمطلوب هو حساب معدل زيادة A عند نفس اللحظة :

فإذا ما أدخلنا فى هذه المسألة عنصراً متغيراً آخر وهو الزمن " t " فسوف نجد أنه بمرور الزمن (أى تغير t) فإن قيم كل من x , y , A تتغير مع الزمن كذلك .

وعليه فإن معدل زيادة A يكون عبارة عن مجموع المعاملات التفاضلية كالتالى :-

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$, \because \frac{\partial A}{\partial x} = y = 8$$

$$, \frac{\partial A}{\partial y} = x = 5$$

$$, \frac{dy}{dt} = 2$$

$$, \frac{dx}{dt} = 3$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = 8 \times 3 + 5 \times 2 = 34 m^2 / sec$$

١٥-٦ :- التفاضل الجزئى والدوال الضمنية :-

نعتبر $Z = f(x, y)$ وتساوى ثابت وليكن قدره C

$$i.e \quad Z = f(x, y) = C$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0 \quad (\text{تفاضل الثابت} = \text{صفر})$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

أمثلة محلولة :-

(١٢) إذا كانت $Z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ فأوجد dz

الحل :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \times \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \times \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \times \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

$$= \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot dy = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

(١٣) إذا كانت :-

$$Z = 4x^3 - xy^2 + y^3 = 0$$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل :-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \div \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$, \frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2 - y^2$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy + 3y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (12x^2 - y^2) \div (-2xy + 3y^2)$$

$$Z = 4x^2 - 3y^2 + 5xy$$

(١٤) إذا كانت

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x} \text{ فاوجد}$$

الحل :-

عند إيجاد المشتقة الجزئية $\frac{\partial z}{\partial x}$ فإننا نفاضل بالنسبة إلى x ونتعامل مع y كما لو كانت ثابتاً .

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 8x + 5y$$

وعند إيجاد المشتقة الجزئية $\frac{\partial z}{\partial y}$ فإننا نفاضل بالنسبة إلى y ونتعامل مع x كما لو كانت ثابتاً .

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -6y + 5x$$

(١٥) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = 2x^2 + 5xy + 4y^2$$

الحل :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 5y$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = 5x + 8y$$

$$(١٦) \text{ إذا كانت } xy = 5Z^2 \text{ فأوجد } \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}$$

الحل :-

$$\therefore xy = 5Z^2$$

$$\therefore y = \frac{5Z^2}{x}$$

ولإيجاد $\frac{\partial y}{\partial x}$ ، نفاضل بالنسبة إلى x ونعامل مع Z كثابت

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-5Z^2}{x^2}$$

ولإيجاد $\frac{\partial y}{\partial z}$ نفاضل بالنسبة إلى Z ونعتبر x ثابت .

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{10}{x} Z$$

(١٧) المطلوب إيجاد المشتقات الجزئية Z_{yx}, Z_{xy} للدالة .

$$Z = x^2y + 2xe^{\frac{1}{y}}$$

$$\text{وبين أن } Z_{yx} = Z_{xy}$$

الحل :-

لإيجاد المشتقة الجزئية الثانية ، يلزم إيجاد المشتقة الجزئية الأولى وهي Z_y, Z_x

$$, Z_x = 2xy + 2e^{\frac{1}{y}} \quad (\text{ثابت } y)$$

$$, Z_y = x^2 - \frac{2xe^{\frac{1}{y}}}{y^2} \quad (\text{ثابت } x)$$

والمشتقات الجزئية الثانية عددها = ٤ لأن عدد المتغيرات = ٢ متغير .

والمطلوب منها اثنتين فقط وهما Z_{xy} أى المشتقة الجزئية الثانية بالنسبة إلى x للمقدار Z_y .

$$\therefore Z_{xy} = 2x - \frac{2e^{\frac{1}{y}}}{y^2} \quad (١) \dots\dots\dots$$

ولإيجاد Z_{yx} ، نفاضل Z_x بالنسبة إلى y

$$\therefore Z_{yx} = 2x - \frac{2e^{\frac{1}{y}}}{y^2} \quad \dots\dots\dots (٢)$$

وبلاحظ أن : (١) = (٢) مما يعنى أن $Z_{xy} = Z_{yx}$

(١٨) أوجد :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \text{ and } \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}$$

علماً بأن $y = e^{xt}$

الحل :-

لإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ نوجد أولاً $\frac{\partial y}{\partial x}$ ونعتبر $t = \text{ثابت}$ للمقدار $y = e^{xt}$

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = te^{xt}$$

ثم نفاضل $\frac{\partial y}{\partial x}$ مرة ثانية بالنسبة إلى x ونعتبر $t = \text{ثابت}$

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = t^2 e^{xt}$$

ولإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ نوجد أولاً المشتقة الجزئية الأولى للمقدار بالنسبة إلى t ونعتبر $x = \text{ثابت}$

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial t} = x e^{xt} \quad \dots\dots\dots , (x = \text{ثابت})$$

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x^2 e^{xt} \quad \dots\dots\dots , (x = \text{ثابت})$$

ولإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}$ نفاضل $\frac{\partial y}{\partial x}$ بالنسبة إلى t مع بقاء $x = \text{ثابت}$ ولإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}$ نفاضل

$\frac{\partial y}{\partial t}$ بالنسبة إلى x مع بقاء $t = \text{ثابت}$

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial t \cdot \partial x} = e^{xt} + xt e^{xt}$$

$$= e^{xt} (1 + xt)$$

$$, \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial t} = e^{xt} + xt e^{xt}$$

$$= e^{xt} (1 + xt)$$

وعليه فإن لأي دالة y فى متغيرين x, t فإن كلاً من $\frac{\partial^2 y}{\partial t \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial t}$ دائماً ،

(١٩) أوجد المشتقات الجزئية للدالة :-

$$A = 2x^2 + 2y^2 - 5xy \cos \theta$$

حيث كل من x, y, θ متغيرات مستقلة

الحل :-

لإيجاد المشتقة الجزئية A_x أى $\frac{\partial A}{\partial x}$ مع بقاء y, θ كتوابت .

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial x} = 4x - 5y \cos \theta$$

ولإيجاد A_y أى $\frac{\partial A}{\partial y}$ نفاضل بالنسبة إلى y مع بقاء x, θ ثوابت .

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial y} = 4y - 5x \cos \theta$$

وبالمثل لإيجاد A_θ أى $\frac{\partial A}{\partial \theta}$ نفاضل بالنسبة إلى θ مع بقاء كل من x, y ثوابت .

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial \theta} = 5xy \sin \theta$$

$$G = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

(٢٠) إذا كانت :

$$x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} + z \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad \text{فبين أن :}$$

الحل :-

لإثبات هذا يلزم إيجاد المشتقات الجزئية الأولى التالية :-

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}$$

ثم نعوض بقيمها في المعادلة المطلوب إثباتها مساوية للصفر :-

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{y} + z \left(\frac{-1}{x^2} \right) = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x \left(\frac{-1}{y^2} \right) + \frac{1}{z} = \frac{-x}{y^2} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = y \left(\frac{-1}{z^2} \right) + \frac{1}{x} = \frac{-y}{z^2} + \frac{1}{x}$$

وبالتعويض نجد أن :-

$$x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} + z \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{x}{y} - \frac{z}{x} - \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 0$$

(٢١) إذا كانت $f(x, y) = x^2y + y^2$ فأوجد $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$ باستخدام طريقة Δ

الحل :-

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ لإيجاد}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x + \Delta x, y) - f(x, y) &= [(x + \Delta x)^2 y + y^2] - (x^2 y + y^2) \\ &= (x + \Delta x)^2 y + y^2 - x^2 y - y^2 \end{aligned}$$

وبالفك والاختصار :

$$\therefore 2xy \Delta x + y (\Delta x)^2$$

$$\therefore f_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

وبالتعويض عن قيمة البسط في النهاية بالمقدار $2xy \Delta x + y (\Delta x)^2$:

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (2xy + y \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2xy + y \Delta x = 2xy$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = x^2 \Delta y + 2y \Delta y + (\Delta y)^2 \quad \text{وبالمثل فإن :-}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = x^2 + 2y$$

(٢٢) إذا اعتبرنا الرقم ١٨ ممثلاً لمجموع ثلاثة أرقام موجبة . فأوجد هذه الأرقام (الأعداد) بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحل :-

نفترض أن أجزاء العدد ١٨ هي $x, y, 18 - x - y$ وحاصل ضربها P

$$P = xy(18 - x - y)$$

ولجعل حاصل الضرب أكبر ما يمكن ، نوجد المشتقات الجزئية الأولى ونساويها بالصفر ونحل المعادلتين الناتجتين آنياً بالنسبة إلى x, y ، بعد ذلك نوجد المشتقات الجزئية الثانية ونحسب قيمها المناظرة لقيم x, y السابق الحصول عليها من حل المعادلتين .

$$\text{نعتبر } C = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, B = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}, A = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

ثم نوجد المقدار $[AC - B^2]$ فإذا كان أكبر من الصفر عندما A أصغر من الصفر فيكون لدينا نهاية عظمى وبذلك :-

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 18y - 2xy - y^2$$

$$, \frac{\partial P}{\partial y} = 18x - x^2 - 2xy$$

$$\text{ثم نضع كل من : } \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\therefore 18y - 2xy - y^2 = 0$$

$$, 18x - 2xy - x^2 = 0$$

وبجملها

$$\therefore 18 - 2x - y = 0$$

$$, 18 - 2y - x = 0$$

$$\therefore 2x + y = 18$$

$$, 2y + x = 18$$

$$\therefore y = x = 6$$

$$, A = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -2y$$

$$, B = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (18x - x^2 - 2xy) = 18 - 2x - 2y$$

$$, C = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2x$$

$$, \text{ at } (6, 6)$$

$$\therefore A = -2 \times 6 = -12$$

$$, B = 18 - 2 \times 6 - 2 \times 6 = -6$$

$$, C = -2 \times 6 = -12$$

$$\begin{aligned} \therefore AC - B^2 &= -12 \times -12 - (-6)^2 \\ &= 144 - 36 = 108 > 0 \end{aligned}$$

وحيث أن $A < 0$ ، " - 12 " ، $AC - B^2 > 0$ فإن P يكون لها نهاية عظمى عند (6 , 6)

∴ العدد ١٨ يُجزأ إلى ثلاثة أعداد 6 , 6 , 6 للحصول على أكبر حاصل ضرب .

Exercise 16

أوجد المعاملات التفاضلية الجزئية $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ في المسائل التالية :-

$$Z = \sin^{-1} \frac{x}{y} \quad (١)$$

$$Z = \frac{ax}{y^2} \quad (٢)$$

$$Z = x^y \quad (٣)$$

$$Z = \tan^{-1} \frac{x}{y} \quad (٤)$$

$$Z = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (٥)$$

$$Z = x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + 2y^3 \quad (٦)$$

$$Z = \cos(x^2 + y^2) \quad (٧)$$

في المسائل التالية احسب التفاضلات الكلية :-

$$Z = x^2y + xy^3 \quad (٨)$$

$$Z = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (٩)$$

$$Z = \frac{x}{y} \quad (١٠)$$

$$Z = \text{Log } x^y \quad (١١)$$

$$Z = e^{xy} \quad (١٢)$$

$$Z = a^x e^y \quad (١٣)$$

$$(١٤) \text{ إذا كانت } Z = 2x^2 + 3y^2$$

فأوجد dz عندما $x=1$, $y=3$, $dx=0.01$, $dy=0.02$

$$(١٥) \text{ إذا كانت } Z = x^5y - \sin y \text{ فأوجد } \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} \text{ وبين أنها تساوى } \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x}$$

(١٦) اسطوانة دائرية قائمة يزيد نصف قطر قاعدتها عند لحظة معينة بمقدار $1m/sec$

في حين يزداد الارتفاع بمعدل $2m/sec$.

فاحسب معدل زيادة حجم الاسطوانة عندما يكون الارتفاع 10 m ونصف القطر 5 m
(١٧) سطح تمثله العلاقة : $Z = a^2 - x^2 - 2y^2$ فما هو مقدار الميل عند نقطة
على السطح المنحني عند مقطعه بمستوى بحيث تكون y ثابتة وما هو مقدار الميل عند
نقطة على السطح المنحني عند مقطعه بمستوى بحيث تكون x ثابتة .

$$(١٨) \text{ إذا كانت } Z_x = \frac{\partial Z}{\partial x} \text{ فأوجد } \frac{\partial Z}{\partial x} \text{ للدالة :-}$$

$$x^2 z^2 + y \sin x z = 2$$

$$(١٩) \text{ إذا كانت } x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \text{ فأوجد قيمة } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$(٢٠) \text{ معلومية أن : } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \text{ فأوجد } \frac{dy}{dx} \text{ للدالة :-}$$

$$f(x, y) = x^2 y + xy^2 = 1$$

(٢١) إذا كان :

$$W = u^2 v + uv^2 + 2u - 3v$$

$$u = \sin(x + y + z)$$

$$, v = \cos(x + 2y - z)$$

فأوجد $\frac{\partial W}{\partial x}$ عندما :-

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$$

(٢٢) إذا كانت :- ثابت $a + b + c$ في حين أن كل العناصر موجبة فمتى تكون:

$a \times b \times c$ ذات أكبر قيمة ؟

أجوبة التمارين

ANSWERS

Exercise (1)

- (1) a) 0 , b) ١ من x القيم الأقل
c) $0.5, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 2, 5, 10, -2, -1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}$
d) infinity
e) المنحنى على شكل قطع زائد
- (2) a) 4.1, 4.01, 4.001 4.000001
b) 4
- (3) a) 5 , b) infinity
- (4) a) 11, 5, 3, 2.5, 2.1, 2.01 b) 2
- (5) 2 (6) 2 (7) $3x^2$
- (8) $\frac{1}{3}$ (9) $\frac{1}{2}$ (10) $\frac{-1}{3}$
- (11) $\frac{-5}{2}$ (12) $\frac{-1}{2\sqrt{x}}$ (13) 7 (14) $\frac{2}{3}$
- (15) $\frac{1}{4}$ (16) a) -0.6 b) 1 (17) 1
- (18) $\frac{3}{2}$ (19) $\frac{1}{2}$ (20) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (21) $\frac{2}{3}$
- (22) $\frac{m}{3}$ (23) $\frac{-1}{2}$ at $a > 0$, ∞ at $a < 0$
- (24) $\frac{2}{3}$ (25) 1 (26) $\frac{-1}{2}$ (27) $\frac{2}{3}$
- (28) -2.5 (29) 0 (30) -2 (31) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- (32) ∞ (33) $\frac{-3}{2}$ (34) $\frac{1}{6}$ (35) $\frac{1}{4}$
- (36) 2.5 (37) -4 (38) -12 (39) $\sqrt{3}$

- (40) -1 (41) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (42) 2 (43) $\frac{-1}{56}$
- (44) $-\sqrt{2}$ (45) 6 (46) $\frac{1}{3}$ (47) $6\sqrt{2}$
- (48) 2 (49) 1 (50) $\frac{1}{9}$
- (51) $2 \cos x$ (52) $\frac{1}{2}$ (53) $\frac{1}{2}$ (54) 1
- (55) $\frac{1}{2}$ (56) $\frac{1}{3}$ (57) $\frac{m^2}{2}$ (58) 3
- (59) $-\sqrt{2}$ (60) 8 (61) 4 (62) $-2 \sin x$
- (63) 1 (64) $\frac{1}{20}$ (65) $2 \left[1 + 2x = n^4 \text{ ضع } \right]$
- (66) 2 (67) $\frac{1}{2}$ (68) $\frac{3}{2}$ (69) 3
- (70) 0.2

Exercise (2)

- (1) $1.5, 1.2$
- (2) $\underline{a)} \frac{5}{3}, \underline{b)} \frac{-3}{4}, \underline{c)} \frac{-b}{2a}, \underline{d)} \frac{2}{3}$
- (3) $y = 1.5x + 1$
- (4) $\Delta s = 9.8t \times (\Delta t) + 4.9 (\Delta t)^2$
 $\frac{s}{t} = 9.8t + 4.9(\Delta t)$
 $, 1) 20.58, 2) 20.09, 3) 19,649$
 $, 4) 19.6049, 19.6 \text{ ms}^{-1}$ السرعة هي
- (5) 6
- (6) $\Delta y = 3x^2 (\Delta x) + 3x (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$
 $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x (\Delta x) + (\Delta x)^2$
 $\therefore 12$

$$(7) \Delta y = \frac{-\Delta x}{x^2 + \Delta x}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x^2 + x \cdot \Delta x}$$

$$135^\circ = \text{الزاوية} , -1 = \text{الميل} ,$$

$$(8) \underline{a) 6} \quad \underline{b) 4} \quad , \underline{c) 3}$$

$$(9) \underline{a) 6} \quad \underline{b) 18} \quad , \underline{c) 10}$$

Exercise (3)

$$(1) 8x^7 , 7 , \frac{1}{5} , 0.007 , \frac{5}{3} \cdot x^4 , 48x^3 , 12x^{13}$$

$$(2) 5c x^4 , \frac{7ab}{c} x^6 , 3b x^{3b-1} , 2(4a+1)x^{4a} , 6\pi x$$

$$(3) 5 , \frac{2}{3} , -5 , a$$

$$(4) \frac{x^2}{2} , x^2 , \frac{x^3}{3} , \frac{x^3}{12} , \frac{x^8}{8} , \frac{1}{4a+1} \cdot x^{4a+1} , \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} , x^5 , \frac{3}{20} x^5$$

$$(5) 2at$$

$$(6) 30t$$

$$(7) 2\pi r$$

$$(8) 4\pi r^2 , 144\pi$$

$$(9) \frac{3}{2\sqrt{x}} , \frac{-2}{x^2} , \frac{-3}{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}} , \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} , \sqrt[4]{3} \times \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}$$

$$(10) \frac{0.6}{x^{0.4}} , \frac{1.05}{x^{0.85}} , -\frac{3.2}{x^{1.4}} , \frac{-9}{x^2} , \frac{-n}{x^{n+1}}$$

$$(11) 7.5 x^{1.5} , -\frac{5.2}{x^{2.3}} , \frac{5.6}{x^{-0.3}} , \frac{-5}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$(12) \frac{-60}{V^3}$$

$$(13) 20.25 , 0$$

$$(14) \frac{4}{3}$$

$$(15) -0.02 , -0.5 , -2 , -8$$

$$(16) \frac{-2}{x^3}$$

$$(17) x = 1$$

$$(18) x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(19) x = \frac{1}{16}$$

$$(20) x = \frac{1}{2}$$

Exercise (4)

$$(1) 18x^2 + 10x$$

$$(2) \frac{-3}{x^2} + 2$$

$$(3) 9x^2 + 1$$

$$(4) \frac{-4}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{4}{x^2} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$$

$$(5) 16x^3 + 6x - 2$$

$$(6) x + \frac{1}{8}$$

$$(7) 3 - 4x + 6x^2$$

$$(8) \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$(9) 10x - \frac{1}{3\sqrt{x^3}}$$

$$(10) \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(11) 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$(12) 2x^2 + x - \frac{10}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$(13) \frac{-21}{x^4} + \frac{10}{x^3} - \frac{3}{x^2}$$

$$(14) x^4 - x^3 + x^2 - x$$

$$(15) \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 2$$

$$(16) u + at$$

$$(17) 5 + 16t$$

$$(18) 4t - 3$$

$$(19) 3a x^2 + 2b x + c$$

$$(20) 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$(21) \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$(22) 3(1+x)^2$$

$$(23) 3n x^{3n-1} - 3n x^2$$

$$(24) \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{5}{x^2}$$

$$(25) \frac{dy}{dx} = \left| 4x - 3 \right|_{x=1.5} = 3, \quad x = \frac{3}{4}$$

$$(26) \frac{dy}{dx} = 6x, \quad x = 0$$

$$(27) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x - 5 \quad , -10 \quad , -9 \quad , -2$$

$$(28) \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} \quad , x = \pm 1 \quad , (1, 2), (-1, -2)$$

Exercise (5)

- (1) $20x + 9$ (2) $\frac{3x^2}{2} + 2x + 1$
- (3) $(2x - 3)(2x + 3) + 2(x^2 + 3) = 3(x^2 - 1)$
- (4) $6x(x^2 + 2) + 2x(3x^2 - 1) = 2x(6x^2 + 5)$
- (5) $(x^2 - 2x)(6x - 1) + (3x^2 - x)(2x - 1) = 3x(4x^2 - 6x + 1)$
- (6) $(x^2 + x - 1) + (x + 1)(2x + 1) = x(3x + 4)$
- (7) $(x^2 - x + 1) + (x - 1)(2x - 1) = 3x^2 - 4x + 2$
- (8) $2x(x^2 + 3x - 2) + (x^2 - 3)(2x + 3) = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 9$
- (9) $2x(x^2 - 2) + 2x(x^2 + 2) = 4x^3$
- (10) $2(2x^3 - x + 1)$ (11) $3(x^2 - 7)$
- (12) $6x^4 + 16x^3 - 7x^2 - 24x - 3$
- (13) $4x(x^2 - 1)$
- (14) $6(3x^2 + 5x + 2)$
- (15) $(ax^2 + bx + c) \times u + (ux + 5v)(2ax + b)$
- (16) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x + 1)(x^2 - 2x + 3) + 2\sqrt{x}(x^2 - 2x + 3)$
 $\quad \quad \quad + \sqrt{x}(2x - 2)(2x + 1)$
- (17) $\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}(\sqrt{x} - 2) + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1) + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 2)$
- (18) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(\sqrt[4]{x^3})(\sqrt[5]{x^2}) + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}(\sqrt[3]{x})(\sqrt[5]{x^2}) +$

$$+ \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} \left(\sqrt[4]{x^3} \right) \left(\sqrt[3]{x} \right)$$

$$(19) 2a \, bx \cdot c \sqrt{x^3} + \frac{3c}{2} \sqrt{x} \cdot ab \, x^2 = 3.5 \, abc \sqrt{x^5}$$

Exercise (6)

$$(1) \frac{-6}{(3x-1)^2}$$

$$(2) \frac{4x}{(1-2x^2)^2}$$

$$(3) \frac{-4}{(x-4)^2}$$

$$(4) \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$(5) \frac{11}{(2x+3)^2}$$

$$(6) \frac{-2b}{(x-b)^2}$$

$$(7) \frac{2b}{(x+b)^2}$$

$$(8) \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$$

$$(9) \frac{-6x}{(x^2-3)^2}$$

$$(10) \frac{-\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x-1)^2}$$

$$(11) \frac{\left[\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]}{2}$$

$$(12) \frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$(13) \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$(14) \frac{2(x^2-x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$(15) \frac{(7x^2-11x)}{(3x^2+x-1)^2}$$

$$(16) \frac{(x^2-1)}{x^2}$$

$$(17) \frac{6b^2 x}{(b^2-x^2)^2}$$

$$(18) \text{ zero}$$

$$(19) \frac{3x^2-2}{(x+2)^2}$$

$$(20) \frac{-(x+\sqrt{3}x)}{x^3}$$

Exercise (7)

- (1) $6(3x+2), -12(1-3x)^3, \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$
- (2) $\frac{3}{(1-3x)^2}, -6(2-3x), \frac{1}{\sqrt{(1-2x)^3}}$
- (3) $10x(x^2-3)^4, -3x\sqrt{1-x^2}, \frac{2x}{\sqrt{2x^2-5}}$
- (4) $\frac{6x}{(1-3x^2)^2}, \frac{-3x}{\sqrt{1-3x^2}}, \frac{-2x^2}{\sqrt{1-2x^2}} + \sqrt{1-2x^2}$
- (5) $\frac{1}{(4-x)^2}, \frac{1}{2(4-x)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2}{(4-x)^3}$
- (6) $\frac{-2x}{(x^2-1)^2}, \frac{-x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
- (7) $\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)^3}}, \frac{-1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$
- (8) $\frac{1-x-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}, \frac{2x}{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$
- (9) $\frac{x}{\sqrt{c^2+x^2}}, \frac{-x}{(c^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
- (10) $\frac{4x-1}{2\sqrt{1-x-2x^2}}, -6nx(1-3x^2)^{n-1}$
- (11) $\frac{x(2c^2-x^2)}{(c^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}, 3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$
- (12) $\frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\left[\frac{2x}{\sqrt{1+4x}} - \sqrt{1+4x}\right]}{x^2}$

$$(13) \frac{-2x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 2\sqrt{1+x^2}}{4x^2}$$

$$(14) \left[\frac{-x^2}{2\sqrt{2-x}} + 2x\sqrt{2-x} \right], \frac{5-6x}{2\sqrt{3x^2-5x+2}}$$

$$(15) \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}, \frac{3x}{2\sqrt{3x+2}} + \sqrt{3x+2}$$

$$(16) \frac{-(4x+5y)}{(5x+14y)}$$

$$(17) -\frac{2x(x^2+y^2)-x}{2y(x^2+y^2)+y}$$

$$(18) -\frac{x^2-y}{y^2-x}$$

$$(19) -\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$$

$$(20) \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3}{2y+4} = \frac{1}{6} \text{ at } (1,1)$$

Exercise (8)

$$(1) 6x(x-1), 6(2x-1), 12$$

$$(2) 2ax^{2a-1}, 2a(2a-1).x^{2a-2}, 2a(2a-1)(2a-2).x^{2a-3}$$

$$(3) (12x^3-12x^2+4x-7), (36x^2-24x+4), 72x-24$$

$$(4) 10x^4-9x^2+4, 40x^3-18x, 120x^2-18$$

$$(5) \frac{-1}{x^2}, \frac{2}{x^3}, \frac{-6}{x^4}$$

$$(6) \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}, \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}, \frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}$$

$$(7) \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, \frac{-1}{\sqrt{(2x+1)^3}}, \frac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$$

$$(8) \frac{-2}{x^3}, \frac{6}{x^4}, \frac{-24}{x^5}$$

$$(9) \frac{n}{2a} \left[\frac{1}{(a-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(a+x)^{n+1}} \right]$$

$$(10) -5, \frac{5}{12}, \text{ أسفل نقطة على المنحنى}$$

$$(11) x=3, x=2, 2.5=0.25 \text{ (أسفل نقطة على المنحنى)}$$

$$(12) -7, 2, 0, \frac{10}{3}$$

Exercise (9)

$$(1) \frac{dy}{dx} = 2x - 2, -4, -2, 2, 4, x=1, \frac{d^2y}{dx^2} = +ve, (\text{min. pt})$$

$$(2) \text{max value} = 4, x=0, \text{min. value} = 0, x=2$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = 3-2x, 3, 1, -1, -3, 1.5, -ve, \text{max.}$$

$$(4) \text{max. value} = -4, x = -\frac{1}{2}, \text{min. value} = 4, x = \frac{1}{2}$$

$$(5) a) \text{min. value} = -16, x=2, \text{max. value} = 16, x=-2$$

$$b) \text{max. value} = 2, x=3, \text{min. value} = -2, x=1$$

$$c) \text{max. value} = 12, x=0, \text{min. value} = -20, x=4$$

$$d) \text{max. value} = 5, x=1, \text{min. value} = 4, x=2$$

$$e) \text{max. value} = 41, x=-2, \text{min. value} = 9\frac{3}{4}, x = \frac{1}{2}$$

$$(6) a) x = \frac{1}{4}, \text{min}$$

$$b) -\frac{1}{4}, \text{min}$$

$$c) x = \frac{1}{3}, \text{max}$$

$$d) x = -2, \text{min}$$

$$(7) a) (-5, 120) \text{max}, (1, 12) \text{min}, (-2, 66) \text{infl}$$

$$b) (-1, 37) \text{max}, (6, -306) \text{min}, \left(\frac{5}{2}, -\frac{269}{2}\right) \text{infl}$$

- c) $(-1, 40)$ max , $(-2, 33)$ and $(2, -95)$ min , infl. at: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}$
- d) No max , No min , $(1, -1)$ infl
- e) $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$ max , $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$ min
- f) No max , No min , $(0, 5)$ infl
- (8) 5 , 5 : هما العددين (9) $x = -3$, $x = 2$, $x = \frac{-1}{2}$
- (10) $x = 0$ (11) max "0.385", min "-0.385", gradient = -1
- (12) (a) 6 , 6 , (B) 6 , 6 , (C) 4 , 8 , (D) 3 , 9
- (13) $12\sqrt{2} \times 12\sqrt{2}$ (14) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (15) $\frac{1}{2} = \frac{\text{القطر}}{\text{العرض}}$
- (16) $\frac{1}{\pi} = \frac{\text{القطر}}{\text{الطول}}$ (17) $3a$ (18) 20 cm
- (19) R^2 at height = $\frac{R}{\sqrt{2}}$
- (20) $r = 2$ inch , $h = 4$ inch (21) decr . at $\frac{35}{\sqrt{29}}$ km / h
- (22) $86.4 \text{ cm}^2 / \text{min}$ (23) 8 m / sec
- (24) 60° (25) $\cong 2.42 \text{ cm}$ (26) الإرتفاع = القطر
- (27) 1 (28) العرض = الطول (29) نصف القطر = العمق
- (30) مرة $\sqrt{3}$ (31) $\frac{x}{2} \text{ km} =$ بعد $\frac{x}{2v}$ ساعة ويكون أقل بعد
- (32) 2.52 m , 1.26 m (33) $10 \text{ cm}^2 / \text{sec}$
- (34) $\frac{\pi}{8} \text{ m} / \text{min}$ (35) 33.2 ft / sec
- (36) 50 km / h (37) $5\frac{5}{7} \text{ ft} / \text{sec}$, $1\frac{5}{7} \text{ ft} / \text{sec}$
- (38) $\frac{5}{18} \pi \text{ ft} / \text{min}$
- (39) $L = 5.6 \text{ m}$

$$L = \frac{2.4}{\sin \alpha} + \frac{1.6}{\cos \alpha} :$$

ويتم تحديده باعتبار النهاية العظمى للدالة

$$(40) 4 \times 4 \times 2m$$

$$(41) 6 \times 6 \times 3 \text{ ft}$$

$$(42) 4 \text{ cm} , \sqrt{3} = 1.732$$

$$(43) x = 1.5$$

$$(44) 75 \times 100 , 75 \times 100 \text{ i.e } 150 \times 100 \text{ or } 3 \times 100 + 2 \times 150$$

$$(45) 1 , 2\sqrt{2}$$

$$(46) 2\sqrt{5} \text{ mile}$$

$$(47) 2(1 + \sqrt{6}) \times 3(1 + \sqrt{6}) \text{ inch} .$$

$$(48) \alpha = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ زاوية نصف قطرية ؛}$$

$$(49) \frac{18}{\pi + 4} \cong 2.52$$

$$(50) \text{ على بعد } 18m \text{ من مصدر الضوء الأقوى}$$

$$(51) V_{\max} \frac{128}{9} \times 1000 \text{ cm}^3$$

عند ارتفاع 20 cm

$$(52) \frac{1}{m} \leq \frac{a}{AB} \text{ ولكن بشرط أن يكون } \frac{1}{m} = \cos \alpha$$

حيث a مسقط AB على اتجاه الخط الحديدي .

Exercise (10)

$$(1) \tan^{-1} 3$$

$$(2) 40^\circ 54' \text{ or } 139^\circ 6'$$

$$(3) x - y + 2 , x + y + 2 = 0$$

$$(4) (-2 , -4)$$

$$(5) 18x - y = 27 , x + 18y = 489$$

$$(6) 3y - 5x + 16 = 0$$

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} y + 2x + 7 = 0 \text{ معادلة المماس} \\ x - 2y + 1 = 0 \text{ معادلة العمودي} \end{array} \right\}$$

$$(8) \tan^{-1} \frac{4}{3}$$

$$(9) 45^\circ , 135^\circ$$

$$(10) y = 3 - x , y = x - 1$$

$$(11) 16$$

$$(12) \left(\frac{5}{2} , \frac{25}{4} \right) , x = \frac{5}{2} , (1 , 13) , x = 1$$

$$(13) 2x + 9y = 20$$

$$(14) y = x^2 - 3x + 4$$

ثم نحدد "b" من الشرط : $y' = 2x + b = 4 + b = 1$

وتُعين "c" من الشرط : أن النقطة (٢ , ٢) هي نقطة التماس

$$(15) b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 1$$

$$(16) -\frac{b}{a^2}$$

$$(17) 2y + x + 3 = 0, 2y - x - 1 = 0$$

$$(18) (-6, 10, 15)$$

$$(19) y - 1 = \frac{-3}{2}(x - 1)$$

$$(20) y - \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

$$(21) 3x - y - 1 = 0, \quad x + 3y - 17 = 0$$

$$(22) m = \tan \theta = \pm 4$$

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} y = -4x + 8 \\ y = -\frac{x}{4} - 2 \end{array} \right\}, \quad \Phi = \tan^{-1} \frac{15}{8} \cong 62^\circ$$

$$(24) x + 2y = 4\sqrt{2}$$

$$(25) [n\pi, n = 0, 1, 2, \dots]$$

$$(26) y = 8 - 4x, \quad x - 4y = 2$$

$$(27) (3, 2), \quad (-3, -2)$$

قيم x تخيلية فلا يوجد مماس (٢٨)

$$(29) 34^\circ, 36^\circ \quad (30) 83^\circ, 14^\circ \quad (31) 53^\circ, 0^\circ \quad (32) 90^\circ$$

$$(33) y = 4x, \quad y = -4(x - 4)$$

$$(34) x = \pm 4, \quad y = 8 \quad (35) y = \pm 3x + 8, \quad y = 0$$

$$(36) y = \pi - x \quad (37) y = x + \frac{2}{3}$$

$$(38) y = \frac{-x}{2} + 2 \quad (39) y = 0, \quad y = \pm \frac{1}{2}(3x - 1)$$

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} 9x - 11y + 38 = 0 \\ 11x - 9y + 24 = 0 \end{array} \right\} \quad (41) \left\{ \begin{array}{l} 4x + y = 16 \\ x - 4y = 4 \end{array} \right\}$$

$$(42) \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 10 = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{array} \right\} \quad (43) \left\{ \begin{array}{l} 8x - y = 4 \\ x + 8y = 32 \end{array} \right\}$$

- (44) $at \ t = 0 , s = 3 , v = 1 , a = 0$
 (45) $at \ t = 0 , s = -7 , v = 6 , a = 2$
 (46) $at \ t = 0 , s = -3 , v = 2 , a = 2$
 (47) $at \ t = 0 , s = -5 , v = 3 , a = -6 [, at \ v = 0 , s = -4 , a = 0]$
 (48) $at \ t = 0 , s = 0 , v = 80 , a = -32$
 $at \ v = 0 , s = 100 , a = -32$
 (49) $\frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g} , \frac{u^2 \sin 2\theta}{2g}$
 (50) $[a = 2 - 10t] , \frac{5}{2} =$ الزمن بين لحظتي السكون
 (51) $s = \frac{4}{3} , t = 3 , t = 1$ تتوقف عند
 (52) $2 \text{ sec} , 2 \text{ sec} , 64 \text{ ft}$
 (53) $h \cong 734.7 , t \cong 12.2 \text{ sec}$
 (54) $v = 3$
 (55) $87 \text{ m/sec} , 60 \text{ m/sec} , 18 \text{ m/sec}^2$
 (56) $144 \text{ ft} , 96 \text{ ft/sec}$
 (57) $v = 12.58 , a = 3.904$
 (58) $s = 87 , a = 48$
 (59) $v = -1 , a = 8$
 (60) $v = 53 , a = 44$
 (61) $v = 24 , a = 44$
 (62) $t = 2 \text{ sec} , a = -12 \text{ m/sec}^2$

وفي اتجاه مضاد لاتجاه بدء الحركة

تنعدم السرعة مرة واحدة عند $t = 4$ ، العجلة تساوي (٦٣)

$$t = \frac{2}{3} , t = 2 \text{ عندما } 5 \text{ m/sec}^2$$

$$, [V]_{t=2} = -120 \text{ m/sec} , [V]_{t=2/3} = -57.8 \text{ m/sec}$$

Exercise (11)

(1) $\frac{1}{3} \text{ rad}, 60^\circ / \pi$

(2) $\frac{1}{4} \text{ rad}, 45^\circ / \pi$

(3) $4 \text{ rad}, 720^\circ / \pi$

(4) $\frac{\pi}{5} \text{ rad}, 36^\circ$

(5) $1 \text{ rad}, 180^\circ / \pi$

(6) $5 \cos 5x$

(7) $5 \cos x$

(8) $\frac{-1}{3} \sin \frac{x}{3}$

(9) $\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}$

(10) $0.6 \sec 0.6x \cdot \tan 0.6x$

(11) $\frac{-1}{6} \operatorname{cosec} \left(\frac{x}{6} \right) \cot \left(\frac{x}{6} \right)$

(12) $3(\cos 3x - \sin 3x)$

(13) $2(\cos 2x + \sin 2x)$

(14) $\sec x (\tan x + \sec x)$

(15) $4 \cos 4x - 5 \sin 5x$

(16) $\frac{-1}{3} \sin \frac{\theta}{3} + \frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{4}$

(17) $2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$

(18) $\sin (3\pi - x)$

(19) $\frac{7}{2} \operatorname{cosec} \left(A - \frac{7}{2}x \right) \cot \left(A - \frac{7}{2}x \right)$

(20) $4 \sin^3 x \cos x$

(21) $6x^5 \cos x^6$

(22) $-12 \cos^2 4x - \sin 4x$

(23) $2x \sec^2 x \tan x^2$

(24) $-\frac{\sec^2 \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$

(25) $n(a \cos nx - b \sin nx)$

(26) $B \sin x$

(27) $\sec^3 \frac{x}{3}$

(28) $-3 \sin \left(3x + \frac{\pi}{2} \right)$

(29) $3 \sec^2 3x - 3 \tan^2 x \cdot \sec^2 x$

(30) $3x^2 + \frac{3}{4} \cos \frac{x}{4}$

(31) $\frac{a}{x^2} \sin \frac{a}{x}$

(32) $2(x \cos x + \sin x)$

(33) $\frac{\sin x - x \cos x}{2 \sin^2 x}$

$$(34) 6 \sin^2 x \cos x^2$$

$$(35) 2x \cdot \sec^2 x = 2 \tan x$$

$$(36) \frac{\tan x - x \sec^2 x}{3 \tan^2 x}$$

$$(37) \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2}$$

$$(38) 3 \cos 3x + \cos(3x)^2 \times 18x$$

$$(39) -6 \sin x^2 \cos^2 x^2$$

$$(40) 2x \tan x + x^2 \sec^2 x$$

$$(41) -4 \operatorname{cosec}(4x + 1)$$

$$(42) \frac{\sin x - 2x \cos x}{2\sqrt{x} \sin^2 x}$$

$$(43) x^3 - \sin(2x) \times 2 + 3x^2 \cos 2x$$

$$(44) \frac{2 \sin x}{(2 + \cos x)^2}$$

$$(45) \frac{-\sin x(1 - \sin x) - (1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$(46) 2 \cot 3x - 3 \operatorname{cosec}^2 3x$$

$$(47) \frac{-\sin x}{3\sqrt[3]{(\cos x)^2}}$$

$$(48) 2(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$(49) 4 \sin x \cos x$$

$$(50) \text{zero}$$

$$(51) 2x \frac{(\cos 2x + x \sin 2x)}{\cos^2 2x}$$

$$(52) \frac{\sin x \cos x (2 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2}$$

$$(53) \sin x + \cos x$$

$$(54) \frac{2 \sin x + x \cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$(55) 6\pi \cos(2\pi x)$$

$$(56) \sec x (2 \sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x)$$

$$(57) \frac{2 \sec^2 x}{(2 - \tan x)^2}$$

$$(58) 5 \cos 5x$$

$$(59) -4 \sin 4x$$

$$(60) 2x \cos x^2$$

$$(61) -4 \cos^3 x \times \sin x$$

$$(62) \frac{3 \cos x}{2\sqrt{\sin 3x}}$$

$$(63) -2t^2 \cos t \sin t + 2t \cos^2 t$$

$$(64) \cos (2t + 2)$$

$$(65) \frac{2t \cos 2t - \sin 2t}{2t^2}$$

$$(66) \frac{-2a \sin t}{(a - \cos t)^2}$$

$$(67) \frac{-2a \sec^2 z}{(a + \tan z)^2}$$

$$(68) 5 \sec 5z \cdot \tan 5z$$

$$(69) \operatorname{cosec} (1 - z) \cdot \cot (1 - z)$$

$$(70) z^3 \sec z \tan z + 3z^2 \sec z$$

$$(71) \frac{\sec z \tan z}{(1 + \sec z)^2}$$

$$(72) -\frac{1}{x^2} \sin^2 (1 - x^2) [6x^2 \cos (1 - x^2) + \sin (1 - x^2)]$$

$$(73) \frac{\sin (x + y) - y \cos x}{\sin x - \sin (x + y)}$$

$$(74) \frac{2x \tan y + y \sec^2 x}{x^2 \sec^2 y + \tan x}$$

$$(75) \frac{2x \sin x^2 - y^2 \sec x \tan x}{2y \sec x}$$

$$(76) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(77) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(78) x (2 \sin x + x \cos x)$$

$$(79) x \left(\frac{\sin 2x + x}{\cos^2 x} \right)$$

$$(80) \frac{\cos x - 2x \sin}{2\sqrt{x}}$$

$$(81) \frac{2 + \sin x}{(1 + 2 \sin x)^2}$$

$$(82) \frac{2 \sin^2 x}{\sqrt{2x - \sin 2x}}$$

$$(83) \frac{-\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1 + \cos^2 x)^3}}$$

$$(84) \frac{-\cot^2 \frac{x}{3}}{\sin^2 \frac{x}{3}}$$

$$(85) \frac{2 \sin^2 2\theta}{\sqrt{2\theta + \cos^2 (2\theta + \frac{\pi}{4})}}$$

$$(86) \sec^6 x$$

$$(87) \frac{1}{2} \cos \theta$$

Exercise (12)

$$(1) \text{ عظمی ، } x = \frac{\pi}{6} \text{ ، صغری ، } x = -\frac{\pi}{6}$$

$$(2) \text{ عظمی عند } x = \frac{\pi}{4}$$

$$(3) \text{ عظمی عند } 14^\circ 29' \text{ ، عند } 165^\circ 31' \text{ ، صغری عند } 90^\circ$$

$$(4) \text{ عظمی ، } x = \frac{\pi}{3}$$

$$(5) \text{ عظمی ، } x = \frac{\pi}{4}$$

$$(6) \text{ عظمی ، } x = \tan^{-1} 2$$

$$(7) \text{ } 33^\circ 42' \text{ تقريباً}$$

$$(8) \text{ صغری ، } -1 \text{ ، عندما } x = \frac{\pi}{4}$$

Exercise (13)

$$(1) \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \frac{\pi}{3}$$

$$(3) \frac{-\pi}{4}$$

$$(4) 0$$

$$(5) \frac{\pi}{6}$$

$$(6) (231.6^\circ)$$

$$(7) 16.6^\circ$$

$$(8) 111.9^\circ$$

$$(9) 22.4^\circ$$

$$(10) -40.1^\circ$$

$$(11) 23.7^\circ$$

$$(12) (\pi - \cos^{-1} x) \quad (13) \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$$

$$(14) \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad (15) \frac{-1}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$(16) \frac{-b}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(17) -[a] \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(17) -[b] \frac{a}{a^2+x^2}$$

$$(18) \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$(19) \frac{-4x}{\sqrt{1-4x^4}}$$

$$(20) \frac{-1}{1+(a-x)^2}$$

$$(21) \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$(22) \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$(23) \sin^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(24) \frac{3}{\sqrt{6x-9x^2}}$$

$$(25) \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(26) \frac{-2}{x\sqrt{x^2-4}}$$

$$(27) \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + 2x \sin^{-1} x$$

$$(28) \frac{2}{x^2-2x+5}$$

$$(29) \frac{1}{1+x^2}$$

$$(30) \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(31) \frac{2}{\sqrt{a^2x^2-1}}$$

$$(32) \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$(33) \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(34) \frac{-2}{x^2+1}$$

$$(35) \frac{2}{1+x^2}$$

$$(36) \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(37) \frac{3}{2x^2+2x+5}$$

$$(38) \frac{-3x^2}{9+x^2} + 3x^2 \cot^{-1} \frac{x}{3}$$

$$(39) \frac{1}{x^2+2x+2}$$

$$(40) \frac{1}{x\sqrt{25x^2-1}}$$

...

$$(41) \frac{1}{2} \sqrt{1 + \operatorname{cosec} x}$$

$$(42) 2x \tan^{-1} x + 1$$

$$(43) \frac{-1}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$(44) \frac{-1}{x^2+1}$$

$$(45) \frac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}} + 2x \cos^{-1}(1-x^2)$$

$$(46) \tan^{-1} x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$(47) \sec^2 x \sin^{-1} x + \frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(48) \frac{4x \sin^{-1}(x^2-2)}{\sqrt{4x^2-x^4-3}}$$

$$(49) \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(50) 4x \operatorname{arc} \cos x$$

Exercise (14)

$$(1) 6e^{6x}$$

$$(2) \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}}$$

$$(3) \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$(4) -3e^{-3x}$$

$$(5) \frac{-7}{3} \cdot e^{-\frac{7}{3}x}$$

$$(6) -3 \cdot e^{(4-3x)}$$

$$(7) -a e^{-ax}$$

$$(8) \frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}}$$

$$(9) a e^{ax+b}$$

$$(10) -9 e^{-9x}$$

$$(11) e^{\sin x} \cos x$$

$$(12) e^x (x^2 + 2x)$$

$$(13) \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$(14) e^{-2x} (\cos x - 2 \sin x)$$

$$(15) \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(16) \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(17) 2x e^{x^2}$$

$$(18) (x+1) e^x$$

$$(19) (1-x) e^{-x}$$

$$(20) x e^{-x} (2-x)$$

$$(21) e^x (x+5)$$

$$(22) \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$$(23) 2^x \ln 2$$

$$(24) e^{\frac{1}{x}} (3x^2 - x)$$

$$(25) e^x (\sin x + \cos x)$$

$$(26) 10e^x$$

$$(27) \frac{2 \times 10^{2x}}{0.4343}$$

$$(28) x^{n-1} \cdot a^x \cdot (n + x \log a)$$

$$(29) 2a^{2x+1} \log a$$

$$(30) -\sin x e^{\cos x}$$

$$(31) 2bx a^{bx^2} \log a$$

$$(32) (a+b)^x \log (a+b)$$

$$(33) e^{\tan x} \cdot \sec^2 x$$

$$(34) \frac{3}{x} - 3$$

$$(35) \frac{-y^2 e^x + 2x e^y}{x^2 e^y + 2y e^x}$$

$$(36) \frac{e^x \sin y + e^y \sin x}{e^y \cos x - e^x \cos y}$$

$$(37) \frac{1}{x}$$

$$(38) \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$$

$$(39) 1 + \log x$$

$$(40) \cot x$$

$$(41) \frac{2a}{a^2 - x^2}$$

$$(42) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$(43) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(44) \frac{1}{\sin x}$$

$$(45) \frac{e^x(2x-1)}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$(46) -ab e^{-bx} (\sin bx - \cos bx)$$

$$(47) \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$(48) \frac{1}{1+e^x}$$

$$(49) \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x} \cdot (b-x)}$$

$$(50) \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$$

$$(51) \frac{-a}{x\sqrt{b^2-x^2}}$$

$$(52) \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$(53) a^2 e^{ax}, a^3 e^{ax}, a^4 e^{ax}, a^n e^{ax}$$

$$(54) a^2 e^{-ax}, -a^3 e^{-ax}, a^4 e^{-ax}, (-1)^n a^n e^{-ax}$$

$$(55) \frac{-1}{x^2}, \frac{1 \times 2}{x^3}, \frac{-1 \times 2 \times 3}{x^4}, \frac{(-1)^{n-1} |n-1|}{x^n}$$

$$(56) \frac{(5x-2)\sqrt{x-1}}{2}$$

$$(57) -x^{-x}(1 + \ln x)$$

$$(58) \frac{x^4 - 8x^2 - 16}{(4x^2 + x^4)\sqrt{(16 - x^4)}}$$

$$(59) 2x^{\ln(x-1)} \cdot \ln x$$

$$(60) (\sin^{-1} x)^x \left[\frac{x}{\sin^{-1} x \sqrt{1-x^2}} + \ln (\sin^{-1} x) \right]$$

$$(61) e^{-x^2} \sin 3x [6 \cos 3x - 3x^2 \sin 3x]$$

$$(63) 2x + 3^x \log 3$$

$$(64) -2x e^{-x^2}$$

$$(65) e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

$$(66) 2a(e^{2ax} - e^{-2ax})$$

$$(67) \frac{2 \cot^2 x}{\sin x}$$

$$(68) (2x + x^2 \log 2) \cdot 2^x$$

$$(69) \frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}} \left(\cos \frac{x}{a} - \sin \frac{x}{a} \right)$$

$$(70) a^{\sin x} \cos x \log a$$

$$(71) \frac{1}{\cos x}$$

$$(72) 2x(1-x)e^{-2x}$$

$$(73) \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$(74) \frac{2}{x-ax^5}$$

$$(75) -\tan x \sin^2 x$$

$$(76) \frac{-1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

$$(77) x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\log x}{x^2}$$

$$(78) \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$(79) \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$(80) \frac{-1}{\sqrt{x-4x^2}}$$

$$(81) \cot 2x$$

$$(82) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$(83) 2\sqrt{1-x^2}$$

$$(84) 2e^x \sqrt{1-e^{2x}}$$

$$(85) \frac{2e^{2x}}{e^{4x}+1}$$

$$(86) \frac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$$

$$(87) \sqrt{\frac{2}{x}-4}$$

$$(88) \frac{4e^x}{1-e^{8x}}$$

Exercise (15)

$$(1) \frac{1}{4} \cosh \frac{x}{4}$$

$$(2) 3 \cosh 3x$$

$$(3) \frac{1}{3} \sinh \frac{x}{3}$$

$$(4) b \operatorname{sech}^2 bx$$

$$(5) \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2}$$

$$(6) b(\cosh bx + \sinh bx)$$

$$(7) \frac{-1}{x^2} \cosh \frac{1}{x}$$

$$(8) \sinh 2x$$

$$(9) 3 \cosh^2 x \sinh x \quad (10) a \cosh(ax+b)$$

$$(11) na \sinh^{-1}(ax) \cosh(ax)$$

$$(12) 2 \tanh x \operatorname{sech}^2 x$$

$$(13) x \cosh x$$

$$(14) 3x^2 \sinh 3x + 3x^3 \cosh 3x$$

$$(15) 1 \quad (16) \operatorname{sech}^2 x e^{\tanh x}$$

$$(17) \frac{-2}{(1+x)\sqrt{2(1+x^2)}}$$

$$(18) \frac{2}{1-x^2}$$

$$(19) \frac{2}{1-x^4}$$

$$(20) \frac{1}{2} \operatorname{sech} x$$

$$(21) \tanh^2 x$$

$$(22) -\frac{4}{\sinh^2 2x}$$

$$(23) 4 \sinh 4x$$

$$(24) \coth^2 x$$

$$(25) \sqrt{\cosh x + 1}$$

$$(26) \frac{1}{\cosh x}$$

$$(27) \frac{2}{\sinh 2x}$$

Exercise (16)

$$(1) \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}, \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

$$(2) \frac{a}{y^2}, -\frac{2ax}{y^3}$$

$$(3) \quad yx^{y-1}, x^y \log x$$

$$(4) \quad \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$(5) \quad \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$(6) \quad 3x^2+6xy+6y^2, 3x^2+12xy+6y^2$$

$$(7) \quad -2x \sin(x^2+y^2), -2y \sin(x^2+y^2)$$

$$(8) \quad (2xy+y^3)dx + (x^2+3xy^2)dy$$

$$(9) \quad 2(ax+by)dx + 2(bx+cy)dy$$

$$(10) \quad \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$(11) \quad \frac{y}{x}dx + \log x dy$$

$$(12) \quad e^{xy}(ydx + xdy)$$

$$(13) \quad a^x e^y (\log a dx + dy) \quad (14) \quad 0.04 \text{ تقريباً}$$

$$(15) \quad 5x^4 \text{ كل منهما تساوى}$$

$$(16) \quad 150\pi \Delta m^3 / \text{sec}$$

$$(17) \quad -2x, -4y$$

$$(18) \quad \frac{-x}{z} \quad (19) \quad \frac{dz}{dy} = \frac{-2y}{3z} \text{ (if } z \neq 0), \frac{dz}{dx} = \frac{-x}{3z}$$

$$(20) \quad \frac{-2xy+y^2}{x^2+2xy}$$

$$(21) \quad \frac{dw}{dx} = \left(2 + \cos^2 \frac{\pi}{6} - 2 \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} \right) \left(-\sin \frac{5\pi}{12} \right) - \left(\cos^2 \frac{5\pi}{12} - 2 \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} - 3 \right) \left(\sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$(22) \quad a=b=c \text{ ذات قيمة عظمى عندما } a \times b \times c \text{ تكون}$$

وهذا ينطبق على أى عدد من العوامل أى $(a \times b \times c \times d \times \dots)$.

الفهرس

٣	مقدمة
٥	* الباب الأول : مبادئ التحليل الرياضى ، الفئات ، الأعداد
٥ الفئات
٧ الأعداد
٩ الأعداد الصحيحة
١٠ الأعداد القياسية أو الكسرية
١٠ الأعداد غير القياسية
١٥ التمثيل الهندسى للأعداد القياسية
١٦ العمليات الجبرية على الأعداد الحقيقية
١٦ القيمة المطلقة للعدد الحقيقى
١٧ الأسس والجذور
١٧ القواعد الأساسية للوغاريتمات
١٨ التباينات
١٩ الفترات على خط الأعداد الحقيقى
٢٠ المقادير المتغيرة والمقادير الثابتة
٢٢	* الباب الثانى : الدوال
٢٢ تعريف الدالة
٢٢ رموز الدوال
٢٤ رمز الزيادة فى الدالة

٢٥	التمثيل البياني للدوال
٢٦	تصنيف الدوال
٣٨	* الباب الثالث : التغير في الدوال - النهايات
٣٨	التغير في الدوال
٤٢	النهايات
٤٤	الدالة الكسرية
٤٥	طرق حساب النهايات
٤٩	نهاية المتابعات
٥١	نهايات النسب المثلثية
٥٣	التوضيح الهندسى للنهاية
٥٤	النظريات الأساسية للنهايات
٧٠	الكميات المتناهية فى الصغر ، المتكافئة
٧٦	تمرين (١)
٨٢	* الباب الرابع : التغير ومعدل تغير الدالة والميل
٨٢	الحركة المنتظمة
٨٤	ميل الدالة الخطية
٨٦	الميل السالب
٨٧	ميل المنحنى
٩٣	تمرين (٢)
٩٥	* الباب الخامس : المعامل التفاضلى والتفاضل
٩٩	المعامل التفاضلى للمقدار الثابت
٩٩	تفاضل الدوال
١١٦	تمرين (٣)
١١٨	* الباب السادس : قواعد التفاضل
١١٨	تفاضل المجموع

١٢٨	تمرين (٤)
١٣٠	تفاضل حاصل الضرب
١٣٧	تمرين (٥)
١٣٨	تفاضل القسمة
١٤٦	تمرين (٦)
١٤٧	تفاضل دالة الدالة
١٥٧	تفاضل الدالة الضمنية
١٥٩	تمرين (٧)
١٦١	التفاضل المتتالي
١٦٣	الرموز البديلة للمعاملات التفاضلية
١٦٣	منحنيات الاشتقاق
١٧٧	تمرين (٨)
	* الباب السابع : النهايات العظمى والصغرى للدوال في متغير واحد ، نقط الانقلاب
١٧٨	تزايد وتناقص الدالة
١٧٩	إشارات المشتقة الأولى ودلائل تزايد وتناقص وثبوت الدالة عند نقطة
١٨١	الدوال المتزايدة
١٨٥	الدوال المتناقصة
١٨٧	القيم الثابتة
١٨٩	نقط التحول
١٩٢	القيم العظمى والصغرى
١٩٤	طرق التمييز بين النهايات العظمى والصغرى
١٩٩	الإيضاح اليباني
٢٠١	نقط الانقلاب
٢١٨	* الباب الثامن : تطبيقات على القيم العظمى والصغرى
٢٣٧	

٢٩٥	* الباب التاسع : المعدلات الزمنية المرتبطة
٢٩٥	أمثلة محلولة
٣٣١	تمرين (٩)
	* الباب العاشر : تطبيقات على المشتقة الأولى
٣٣٨	تطبيقات هندسية - تطبيقات على السرعة والعجلة
٣٣٨	موجز لأساسيات الهندسة التحليلية
٣٣٩	أمثلة محلولة على التطبيقات الهندسية للمشتقة الأولى
٣٤٧	السرعة والعجلة
٣٤٩	أمثلة على السرعة والعجلة
٣٥٦	تمرين (١٠)
٣٦٢	* الباب الحادى عشر : تفاضل الدوال المتسامية
٣٦٢	تفاضل الدوال المثلثية
٣٧١	أمثلة محلولة
٣٧٧	تمرين (١١)
٣٨٠	التفاضل المتتالى للدوال المثلثية
٣٨١	القيم العظمى والصغرى للدوال المثلثية
٣٨٢	الدالة الدورية
٣٨٩	تمرين (١٢)
٣٩٠	* الباب الثانى عشر : تفاضل الدوال المثلثية العكسية
٣٩٢	تفاضل الدالة $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x$
٣٩٣	تفاضل الدالة $\tan^{-1} x, \cot^{-1} x$
٣٩٤	تفاضل الدالة $\sec^{-1} x, \operatorname{cosec}^{-1} x$
٣٩٧	أمثلة محلولة
٤٠٤	تمرين (١٣)
٤٠٧	* الباب الثالث عشر : الدوال الأسية واللوغاريتمية

٤٠٧ عام
٤١٥ تفاضل e^x
٤١٨ رسم منحنى e^x ، e^{-x}
٤١٩ اللوغاريتمات النابيسية أو اللوغاريتمات الطبيعية
٤٢٠ تفاضل $\text{Log}_e x$
٤٢١ تفاضل الدوال الأسية فى الصورة العامة
٤٣٤ تمرين (١٤)
٤٣٧	* الباب الرابع عشر : الدوال الزائدية
٤٣٧ عام
٤٣٩ بعض العلاقات للدوال الزائدية
٤٤١ تفاضل الدوال الزائدية
٤٤٢ منحنيات الدوال الزائدية
٤٤٤ تفاضل الدوال الزائدية العكسية
٤٤٥ المكافئ اللوغاريتمى للدوال الزائدية العكسية
٤٤٧ موجز لتفاضل الدوال الزائدية العكسية
٤٥١ تمرين (١٥)
٤٥٣	* الباب الخامس عشر : التفاضل الجزئى
٤٥٣ التفاضل الجزئى للدوال ذات المتغيرين
٤٦٢ التفاضل الجزئى للدوال فى أكثر من متغيرين
٤٦٥ مصفوفة هيس والمحدد الهيسى
٤٦٨ توضيح معنى التفاضل الجزئى بيانياً وهندسياً
٤٨١ تمرين (١٦)
٤٨٣	* أجوبة التمارين

رقم الإيداع ٩٨ / ١٣٧٩٩
977-271-308-x

هذا الكتاب

لقد غرس علم الرياضيات جذوره في مجال الصناعة والتكنولوجيا منذ القدم .. ومع نشأة علم التفاضل توغلت أغصان الرياضيات بين جميع جنبات الأبحاث والدراسات التكنولوجية الحديثة التي تقدم كل يوم ما هو جديد ومفيد .

إن علم التفاضل هو أحد بوابات علم الرياضيات للانطلاق نحو العالم الحديث .. عالم التطور السريع المتلاحق .

وإذا كانت الرياضيات بصفة عامة لها سحرها وجاذبيتها لدى الباحثين والدارسين ، فإن حساب التفاضل له مذاق خاص .. بشرط أن يستوعبه الدارس ويفهم مبادئه من ناحية ، وآفاقه من ناحية أخرى ، وأن يستشعر نواتجه وتطبيقاته ..

ونحن نقدم هذا الكتاب لخدمة قطاع كبير من الباحثين الذين اتخذوا لأنفسهم طريق الجد والاجتهاد للوصول إلى الغاية العظيمة وهي التقدم العلمي لوطنهم وذويهم .

إن هذا الكتاب يشرح الموضوعات باللغة العربية مع استعمال الرموز الأجنبية حتى يربط بين لغتنا التي نتحدث بها وبين المراجع الأجنبية التي قد يتعرض لها الباحث في مشواره حياته مع هذا العلم الراقى .

إننا نرجو أن يحقق هذا الكتاب الغرض من تقديمه في خدمة الباحثين عن العلوم النافعة .. والله الموفق

الناشر

